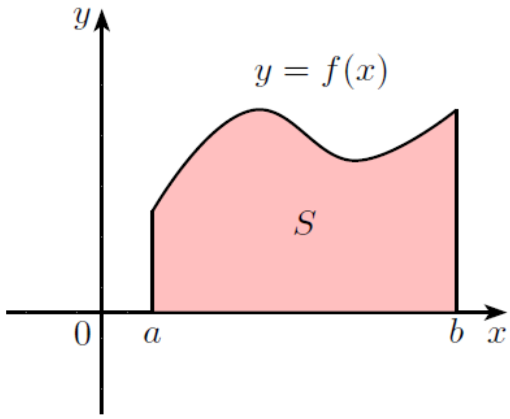
Определени интеграли - 4

Геометричен смисъл на определен интеграл

Пресмятане на лице на криволинеен трапец заграден от една функция и абциса.

Нека $f(x)$ е непрекъсната и неотрицателна в интервала $[a, b]$ и $a < b$.

ОПР. Криволинеен трапец се нарича множеството $\{(x, y) : a \le x \le b, \text{ и } 0 \le y \le f(x)\}$.



Лицето S на **криволинейния трапец** е равно на:

$$S = \int_a^b f(x)dx.$$

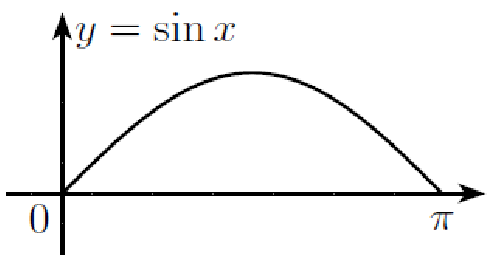
Забележка: Ако $f(x) \le 0$ при $a \le x \le b$, то лицето на криволинейния трапец $\{(x, y) : a \le x \le b, \text{ и } f(x) \le y \le 0\}$ е равно на

$$S = -\int_a^b f(x)dx.$$

Забележка: Графиката на функцията е под абцисната ос в интервала $[a, b]$.

Пример 1.

$$y = \sin x, \; 0 \le x \le \pi.$$



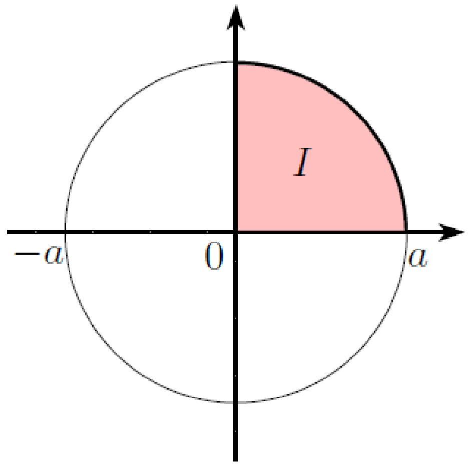
$$S = \int_0^{\pi} \sin x dx = -\cos x \Big|_0^{\pi}$$

$$= -\cos \pi + \cos 0 = -(-1) + 1 = 2.$$

Пример 2.

Да се изчисли лицето на кръга описан с уравнението:

$$x^2 + y^2 \leq a^2$$



Ще разгледаме само частта в интервала **[0, a]** тъй като четирите части са равни –функцията е четна).

$$I = \int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} dx$$

Правим полагането:

$$x = a \sin t, \; dx = a \cos t dt,$$

$$\sqrt{a^2 - x^2} = a \cos t,$$

x	**0**	**a**
t	**0**	**π/2**

$$I = \int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} dx \quad = \int_0^{\frac{\pi}{2}} a^2 \cos^2 t dt = a^2 \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{2}$$

$$I = \frac{\pi a^2}{4}$$

$$S = 4I = \pi a^2$$

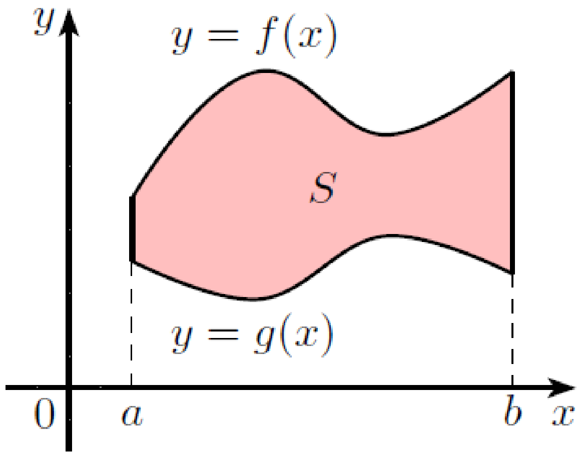
Пресмятане на лице на криволинеен трапец заграден от две функции.

Нека $g(x) \leq f(x), \; x \in [a, b]$. Тогава лицето S на криволинейния трапец

$$\{(x, y) : a \leq x \leq b, g(x) \leq y \leq f(x)\}$$

Тогава лицето се пресмята по формулата:

$$S = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx.$$



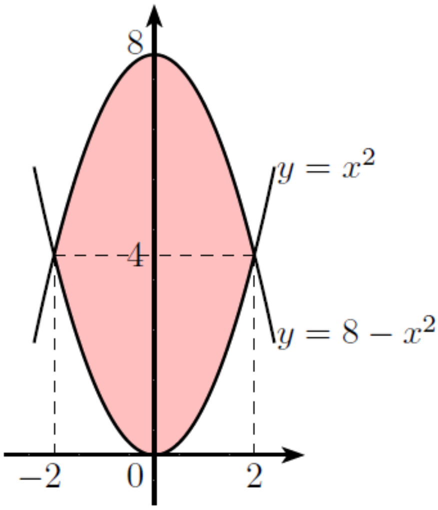
Пример 3.

Да се намери лицето ***S*** на фигурата, определена с неравенствата:

y ≥ x²

и

y ≤ 8 - x².



$$S = \int_{-2}^{2} [8 - x^2 - x^2]dx = 2\int_0^2 [8 - 2x^2]dx$$

$$= 2\Big(\int_0^2 8dx - \int_0^2 2x^2dx\Big) = 2\Big(8x\Big|_0^2 - 2\frac{x^3}{3}\Big|_0^2\Big)$$

$$= 2(8 \cdot 2 - 2 \cdot \frac{8}{3}) = 32 - \frac{32}{3} = \frac{64}{3}\cdot$$

Пресмятане на дължина на крива (дъга)

Една крива **Γ** в пространството се задава параметрично с помощта на три функции:

$$\Gamma: \quad \begin{aligned} x &= x(t), \\ y &= y(t), \\ z &= z(t). \end{aligned} \qquad \text{където} \qquad \alpha \leq t \leq \beta.$$

Когато параметърът t пробягва интервала $[\alpha, \beta]$, точката $(x(t),\ y(t),\ z(t))$ пробягва Γ.
При параметрично задаване на дъгата Γ, нейната дължина L се пресмята по формулата:

$$L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}dt.$$

Тук $\dot{x} = \dfrac{dx}{dt},\ \dot{y} = \dfrac{dy}{dt},\ \dot{z} = \dfrac{dz}{dt}\cdot$

Ако дъгата е равнинна, то $z = 0$ и тогава

$$L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}dt.$$

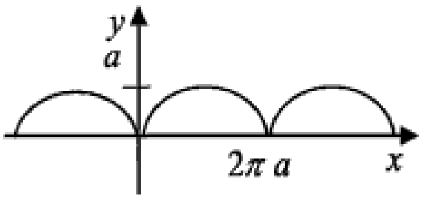
Ако дъгата е зададена като графика на функцията $y = y(x),\ a \le x \le b$, то тогава

$$L = \int_{a}^{b} \sqrt{1 + y'^2}dx.$$

Пример 4.

Да се намери дължината на първата арка на циклоидата.

Циклоида



$$\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases},\ t \in (-\infty; +\infty)$$

$$x = a(t - \sin t),\ y = a(1 - \cos t),\ 0 \le t \le 2\pi.$$

$$\dot{x} = a(1 - \cos t),\ \dot{y} = a \sin t,$$

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = a^2(1 - 2\cos t + \cos^2 t) + a^2 \sin^2 t$$

$$= a^2(2 - 2\cos t) = 2a^2(1 - \cos t) = 4a^2 \sin^2 \frac{t}{2},$$

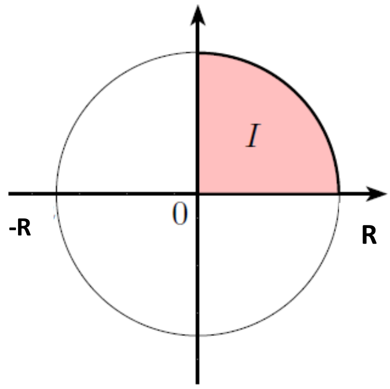
$$\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = 2a|\sin \frac{t}{2}|.$$

Тогава:

$$L = \int_0^{2\pi} 2a|\sin\frac{t}{2}|dt = 4a\int_0^{2\pi}\sin\frac{t}{2}d\frac{t}{2}$$
$$= 4a(-\cos\frac{t}{2})\Big|_0^{2\pi} = 4a(-\cos\pi + \cos 0) = 8a.$$

Пример 5.

Ще пресметнем дължината $\boldsymbol{l}$ на окръжността с радиус $\boldsymbol{R > 0}$.



Без ограничение на общността ще предполагаме, че началото **O** на координатната система ***Oxy*** е разположено в центъра на окръжността.

Тогава уравнението й е $\boldsymbol{x^2 + y^2 = R^2}$, а нейната горна половина се представя с графиката на функцията

$$f(x) = \sqrt{R^2 - x^2}, \quad x \in [-R, R].$$

С помощта на формулата:

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2}\,dx$$

ще пресметнем една четвърт от дължината на окръжността.

За тази цел пресмятаме $f'(x) = -x/\sqrt{R^2 - x^2}$,

откъдето получаваме $1 + f'(x)^2 = 1 + \dfrac{x^2}{R^2 - x^2} = \dfrac{R^2}{R^2 - x^2}$.

Тогава намираме:

$$\frac{1}{4}l = \int_0^R \sqrt{1 + f'(x)^2}\,dx = \int_0^R \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2}}\,dx = R\arcsin\frac{x}{R}\Big|_0^R =$$

$$= R[\arcsin 1 - R\arcsin 0] = \frac{\pi R}{2}$$

Следователно дължината на окръжността е $l = 2\pi R$.

Задачи за самостоятелна работа

Зад 1.

S=? $\begin{cases} y = x^2 \\ x + y = 2 \end{cases}$ Отг. $\frac{17}{6}$

Зад 2.

S=? $\begin{cases} y = x^2 \\ y = x \end{cases}$ Отг. $\frac{1}{6}$

Зад 3.

S=? $\begin{cases} y^2 = 2x \\ x^2 = 2y \end{cases}$ Отг. $\frac{1}{3}$

Зад 4.

S=? $\begin{cases} y = x^2 + 1 \\ x = 1, x = 3 \\ y = 0 \end{cases}$ Отг. $\frac{32}{3}$

Зад 5.

S=? $\begin{cases} 2y = x^2 - 2 \\ y = 0 \end{cases}$ Отг. $\frac{32}{3}$

Зад 6.

S=? $\begin{cases} y = -x^2 + 2x + 3 \\ y = 0 \end{cases}$ Отг. $\frac{32}{3}$

Зад 7. Пресметнете дължината на кривата линия, графика на функцията $y = f(x)$:

а) $y = \frac{2}{3} x^{3/2}$, $x \in [0, 3]$. Отг. $14/3$.

б) $y = \frac{1}{2} x^2 - 1$, $x \in \left[-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right]$. Отг. $\sqrt{6} + \ln\left(\sqrt{2} + \sqrt{3}\right)$.