Определени интеграли - 3

Интегриране посредством субституции (смяна на променливата)

ТЕОРЕМА (за смяна на променливата). Нека функцията **f(x)** е непрекъсната в интервала **[a, b]**, а **x = ϕ(t)** има непрекъсната производна в интервала **[α,β]** и стойностите и` принадлежат на интервала **[a, b]**. Освен това нека **φ(α) = a** и **φ(β) = b.**

Тогава

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt$$

Техниката за пресмятане на определените интеграли посредством субституции е същата както при неопределените, като същите типове интеграли. Единствената разлика е, че тук трябва да се преизчислят стойностите на интервалите в зависимост от полагането. Тук няма връщане към първоначалните променливи.

Пример 1.

$$\int_0^4 \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$$

Полагаме $\sqrt{x}=t$ или $x=t^2$, откъдето $dx=2tdt$
и при $x=0$ имаме $t=0$, а при $x=4$ получаваме $t=2$

$$\int_0^4 \frac{dx}{1+\sqrt{x}} = \int_0^2 \frac{2tdt}{1+t} = 2\int_0^2 \frac{t+1-1}{t+1}dt = 2\left(\int_0^2 dt - \int_0^2 \frac{dt}{t+1}\right) =$$

$$= 2\left(t\Big|_0^2 - \ln|t+1|\Big|_0^2\right) = 2(2-\ln 3) = 4-2\ln 3$$

Пример 2.

$$\int_0^2 \sqrt{4-x^2}\,dx$$

Ако направим субституцията **x = 2 sin t**, то **dx = 2 cos t dt** получаваме

$$\sqrt{4-x^2} = \sqrt{2^2(1-\sin^2 t)} = 2\mid \cos t \mid.$$

Сменяме границите на интеграла като ги изчисляваме по формулата **x = 2 sin t** като изчисляваме **t** в съответствие с таблицата:

t= arcsin $\frac{x}{2}$ от където се получава:

x	0	2
t	0	π/2

Сега интегралът добива вида:

$$4\int_0^{\frac{\pi}{2}} |\cos t\,|\cos t\,dt = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\,dt = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2t}{2}\,dt =$$

$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1+\cos 2t)\,dt =$$

$$2\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} 1\,dt + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2t\,dt\right) = 2\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} 1\,dt + \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2t\,d2t\right) =$$

$$= 2t\,\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \sin 2t\,\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \pi$$

Пример 3.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{3+2\cos x}$$

Полагаме $\mathrm{tg}\frac{x}{2} = t \Rightarrow dx = \frac{2}{1+t^2}dt;\ \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$

$\mathrm{tg}0 = t \Rightarrow t = 0,\quad \mathrm{tg}\frac{\pi}{4} = t \Rightarrow t = 1 \Longrightarrow$

x	0	$\frac{\pi}{2}$
t	0	1

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{3+2\cos x} = \int_0^1 \frac{\frac{2}{1+t^2}}{3+2\frac{1-t^2}{1+t^2}}dt = 2\int_0^1 \frac{\frac{1}{1+t^2}}{\frac{3+3t^2+2-2t^2}{1+t^2}}dt = 2\int_0^1 \frac{dt}{t^2+5} =$$

$$= 2\int_0^1 \frac{dt}{t^2+(\sqrt{5})^2} = \frac{2}{\sqrt{5}}\mathrm{arctg}\frac{t}{\sqrt{5}}\Big|_0^1 = \frac{2}{\sqrt{5}}\Big(\mathrm{arctg}\frac{1}{\sqrt{5}} - \underbrace{\mathrm{arctg}0}_{0}\Big) =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{5}}\mathrm{arctg}\frac{1}{\sqrt{5}}$$

Пример 4.

$$\int_1^4 \frac{1}{x(\sqrt{x}+1)}\,dx$$

Тук за да се освободим от $\sqrt{x}$ е удобно да пс

$x = t^2,\ \ dx = 2tdt.$

x	1	4
t	1	2

$$\int_1^4 \frac{1}{x(\sqrt{x}+1)}\,dx = \int_1^2 \frac{2t}{(t+1)t^2}\,dx = 2\int_1^2 \frac{1}{(t+1)t}\,dx$$

За да решим последния интеграл трябва да разложим подинтегралната функция на елементарни дроби (вж. гл. за неопр. интеграл). Имаме

$$\frac{1}{t(t+1)} = \frac{A}{t} + \frac{B}{t+1},$$

откъдето следва, че $1 = A(t+1) + Bt$. Последното равенство е изпълнено за всяко t при $A = 1,\ B = -1$. Тогава получаваме

$$2\int_1^2 \frac{1}{(t+1)t}\,dx = 2\int_1^2 \frac{1}{t}\,dx + 2\int_1^2 \frac{1}{t+1}\,dx = 2\ln|t|\Big|_0^2 - 2\ln|t+1|\Big|_0^2$$

$$= 2(\ln 2 - \ln 1) - 2(\ln 3 - \ln 2) = 4\ln 2 - 2\ln 3 = 2\ln\frac{4}{3}$$

Пример 5.

$$\int_{\ln 2}^{2\ln 2} \frac{1}{e^x - 1}\,dx$$

Тук полагаме $e^x = t$, откъдето $x = \ln t,\ \ dx = \frac{1}{t}dt$.

x	ln2	2ln2
t	2	4

$$\int_{\ln 2}^{2\ln 2} \frac{1}{e^x - 1}\,dx = \int_2^4 \frac{1}{(t-1)t}\,dx =$$

$$= \int_2^4 \frac{1}{(t-1)}\,dx - \int_2^4 \frac{1}{t}\,dx = \ln|t-1|\Big|_2^4 - \ln|t|\Big|_2^4$$

$$= \ln 3 - \ln 1 - (\ln 4 - \ln 2) = \ln 3 - \ln 2 = \ln\frac{3}{2}$$

Пример 5.

$$\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\,dx, \ a > 0;$$

полагаме $x = a\cos t$ (или $x = a\sin t$). $dx = -a\sin t,$

x	0	a
t	**π/2**	0

$$\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\,dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \sqrt{a^2 - a^2\cos^2 t}(-a\sin t)\,dt =$$

$$= -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2(1-\cos^2 t)}(-a\sin t)\,dt = a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t\,dt$$

$$= \frac{a^2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos 2t)\,dt = \frac{a^2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} 1\,dt - \frac{a^2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2t\,dt$$

$$= \frac{a^2}{2}.\frac{\pi}{2} - \frac{a^2}{4}\sin 2t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi.a^2}{4} - 0 = \frac{\pi.a^2}{4}$$

Задачи за самостоятелна работа

Зад 1.

$$\int_0^9 \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$$

Отг. $6-2\ln 4$

Зад 2.

$$\int_4^9 \frac{x-1}{\sqrt{x}}\,dx$$

Отг. $\frac{32}{3}$

Зад 3.

$$\int_2^6 \sqrt{x-2}\,dx$$

Отг. $\frac{16}{3}$

Зад 4.

$$\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{1+x}+\sqrt{(1+x)^3}}$$

Отг. $\frac{\pi}{6}$

Зад 5.

$$\int_3^7 \frac{x}{\sqrt{x+2}-1}\,dx$$

Отг. $16-2\ln 2-\frac{4}{3}\sqrt{5}+2\ln(\sqrt{5}-1)$

Зад 6.

$$\int_3^4 \frac{3x-2}{x^2-4x+5}\,dx$$

Отг. $\frac{3}{2}\ln\frac{5}{2}+4\operatorname{arctg}2-\pi$