# Определени интеграли - 2

## Решаване на интеграли посредством интегриране по части

**Теорема. (интегриране по части).** Нека функциите $u(x)$ и $v(x)$ имат непрекъснати производни $u'(x)$ и $v'(x)$ в даден интервал $[a, b]$. Тогава е в сила формулата за интегриране по части при определените интеграли

$$\int_a^b u(x)\,\mathrm{d}v(x) = \Big|u(x)v(x)\Big|_a^b - \int_a^b v(x)\,\mathrm{d}u(x)$$
,

Формулата може да се запише накратко така:

$$\int_a^b udv = uv\Big|_a^b - \int_a^b vdu$$

Техниката за пресмятане на определените интеграли с помощта на горните формули е същата както при неопределените, като същите типове интеграли, които могат да се интегрират по части като неопределени, могат да се интегрират и като определени.

**Пример 1.**

$$\int_0^1 xe^x\,dx = \int_0^1 x\,de^x = xe^x\Big|_0^1 - \int_0^1 e^x\,dx = 1e^1 - 0e^0 - e^x\Big|_0^1 = e - (e^1 - e^0) = 1$$
.

**Пример 2.**

$$\int_0^\pi x\sin x dx = \int_0^\pi xd(-\cos x) = -x\cos x\Big|_0^\pi + \int_0^\pi cisxdx = -x\cos x\Big|_0^\pi + \sin x\Big|_0^\pi$$

$$= -\pi\cos\pi + 0.\cos 0 + \sin\pi - \sin 0 = \pi$$

**Пример 3.**

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos xdx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} xd\sin x = x.\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin xdx =$$

$$= \frac{\pi}{2}.\sin\frac{\pi}{2} - 0.\sin 0 + \cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} + 1$$

**Пример 4.**

$$\int_1^2 x\ln x dx = \int_1^2 \ln x d\frac{x^2}{2} = \frac{x^2}{2}\ln x\Big|_1^2 - \int_1^2 \frac{x^2}{2} d\ln x = \frac{2^2}{2}\ln 2 - \frac{1^2}{2}\ln 1 - \frac{1}{2}\int_1^2 x^2.\frac{1}{x}dx$$

$$= 2\ln 2 - \frac{1}{2}.\frac{x^2}{2}\Big|_1^2 = 2\ln 2 - \frac{3}{4}$$

**Пример 5.**

$$\int_1^e (\ln x)^2 dx = x(\ln x)^2\Big|_1^e - \int_1^e x.2\ln x.\frac{1}{x}dx = e - 0 - 2\int_1^e \ln x dx =$$

$$= e - 2x.\ln x\Big|_1^e + 2\int_1^e x.\frac{1}{x}dx = e - 2e + 2x\Big|_1^e = -e + 2e - 2 = e - 2$$

**Пример 6.**

$$\int_1^e (1-\ln x)^2 dx = (e-1) + 2\int_1^e \ln x dx + \int_1^e (\ln x)^2 dx$$

от предната задача

$$\int_1^e (\ln x)^2 dx = e - 2, \int_1^e \ln x dx = x\ln x\Big|_1^e - \int_1^e x.\frac{1}{x}dx = e - (e-1) = 1$$

тогава

$$\int_1^e (1-\ln x)^2 dx = (e-1) + 2 + e - 2 = 2e - 1$$

**Пример 7.**

$$\int_0^1 x^2 e^{2x} dx = \frac{1}{2}\int_0^1 x^2 de^{2x} = \frac{x^2 e^{2x}}{2}\Big|_0^1 - \frac{1}{2}\int_0^1 e^{2x}.2xdx = \frac{e^2}{2} - \frac{1}{2}\int_0^1 xde^{2x}$$

$$= \frac{e^2}{2} - \frac{x}{2}.e^{2x}\Big|_0^1 + \frac{1}{2}\int_0^1 e^{2x}dx = \frac{e^2}{2} - \frac{e^2}{2} + \frac{1}{4}e^{2x}\Big|_0^1 = \frac{e^2 - 1}{4}$$

**Пример 8.**

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \arcsin x dx = x\arcsin x\Big|_0^{\frac{1}{2}} - \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx = \frac{1}{2}.\frac{\pi}{6} - 0 + \frac{1}{2}\int_{0=x}^{\frac{1}{2}=x} \frac{d(1-x^2)}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$=\frac{\pi}{12}+\frac{1}{2}\cdot\frac{\left(1-x^2\right)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}\Bigg|_{x=0}^{x=\frac{1}{2}}=\frac{\pi}{12}+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-1\right)$$

**Пример 9.**

$$\int_0^1 x^2 e^{2x}dx=\frac{1}{2}\int_0^1 x^2 de^{2x}=\frac{x^2e^{2x}}{2}\Bigg|_0^1-\frac{1}{2}\int_0^1 e^{2x}.2xdx=\frac{e^2}{2}-\frac{1}{2}\int_0^1 xde^{2x}$$

$$=\frac{e^2}{2}-\frac{x}{2}.e^{2x}\Bigg|_0^1+\frac{1}{2}\int_0^1 e^{2x}dx=\frac{e^2}{2}-\frac{e^2}{2}+\frac{1}{4}e^{2x}\Bigg|_0^1=\frac{e^2-1}{4}$$

## Задачи за самостоятелна работа

**Зад 1.**

$\int_0^1 \sqrt{x^2+1}\,dx$. Отг. $\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{2}\ln(1+\sqrt{2})$.

**Зад 2.**

$\int_0^{\pi} x\sin x\,dx$. Отг. $\pi$.

**Зад 3.**

$\int_0^{\pi} x^2\cos x\,dx$. Отг. $4\pi$.

**Зад 4.**

$\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{2x}\cos x\,dx$. Отг. $\frac{e^2-2}{5}$.

**Зад 5.**

$\int_0^{\sqrt{3}} x\,\mathrm{arctg}\,x\,dx$. Отг. $\frac{2\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

**Зад 6.**

$$\int_0^1 \frac{dx}{(1+x^2)^2}$$ . Отг. $\frac{\pi}{8}+\frac{1}{4}$ .

**Зад 7.**

$$\int_0^1 xe^{-x}dx$$ Отг. $1-\frac{2}{e}$

**Зад 8.**

$$\int_0^{2\pi} x\sin 2x dx$$ Отг. $-\pi$

**Зад 9.**

$$\int_0^1 (x-1)e^{-x}dx$$ Отг. $-\frac{1}{e}$

**Зад 10.**

$$\int_0^{\pi} x^3 \sin x dx$$ Отг. $\pi^3-6\pi$

**Зад 11.**

$$\int_0^{e-1} \ln(x+1)dx$$ Отг. 1

**Зад 12.**

$$\int_0^2 2x\ln\left(x^2+4\right)dx$$ Отг. $8\ln 8-4\ln 4-4$