Определени интеграли

Решаване на интеграли с непосредствено интегриране

Дефиниция:

Нека функцията y f (x) е дефинирана, непрекъсната и неотрицателна в интервала [a ,b].

За да пресметнем лицето на криволинейния трапец **abAB** разделяме интервала [a,b] на ***n*** части с помощта на точките $a=x_0< x_1< x_2<\ldots\ldots <x_n=b$ и означаваме с $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ дължината на ***к***-тия подинтервал , ($к = 1,2, ..., n$).

Построяваме правоъгълници с основа съответния подинтервал и височина - стойността на функцията в произволна точка ζ_k в този подинтервал.

Сумата от лицата на тези правоъгълници дава приближено лицето на криволинейния трапец abBA и е равно на

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k$$

Нарича се **интегрална сума** на функцията f(x)в интервала [a, b].

Ако се увеличи броя на деленията *n* на интервала т.е. дължината на всеки подинтервал стане по-малка величина, то интегралната сума ще даде по-точно приближение на лицето на криволинейния трапец.

Очаква се при $\Delta x_k \to 0$ границата на сумата да бъде точно това лице.

Дефиниция: Ако съществува границата на сумата

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k$$

при $n \to \infty$ и $\Delta x_k = \to 0$, за всяко , k независимо от избора на точките x_k и ζ_k тя се нарича определен интеграл от функцията **f(x)** в интервала **[a, b]** и се означава

$$S = \int_a^b f(x)dx$$

т.е.

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\Delta x_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k$$

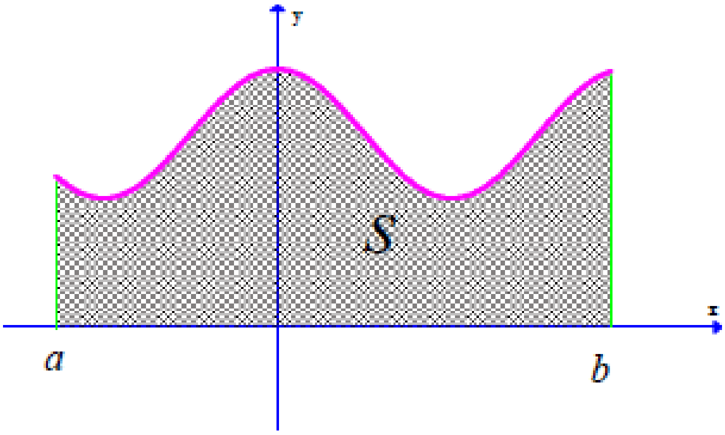
a - долна граница на интеграла **f(x)** - подинтегрална функция

b - горна граница на интеграла **x** - интеграционна променлива

Геометричен смисъл на определения интеграл:

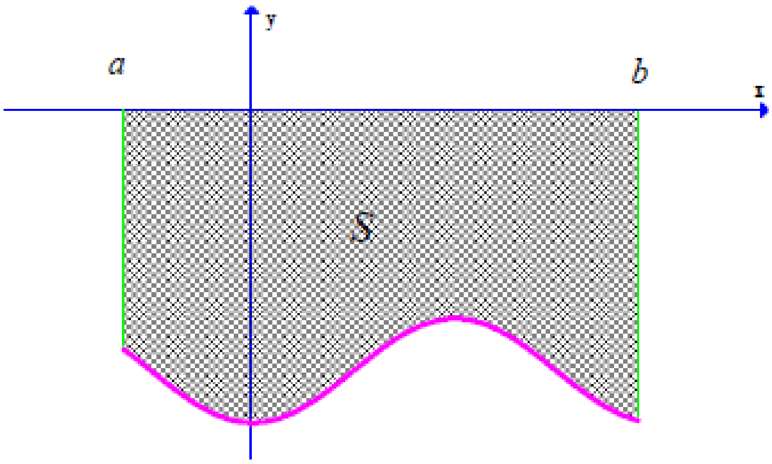
Ако $y = f(x)$ е непрекъсната и $f(x) \geq 0$ в $[a,b]$, то лицето S на криволинейния трапец $\{(x,y): a \leq x \leq b,\ 0 \leq y \leq f(x)\}$ определен от графиката на функцията е равно на определения интеграл от $f(x)$ в $[a,b]$,

$$S = \int_a^b f(x)dx$$



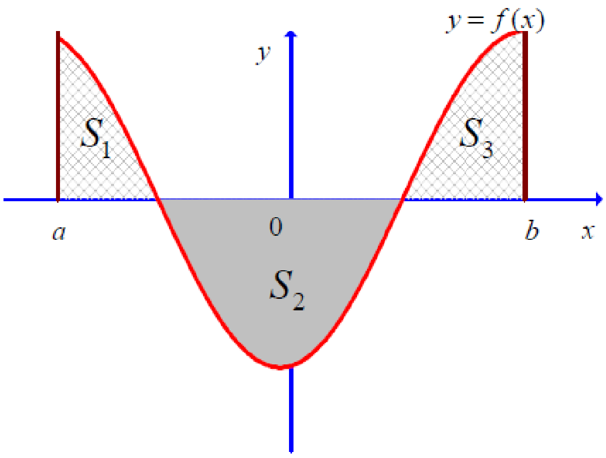
Ако $f(x) \leq 0$ при $a \leq x \leq b$, то лицето на криволинейния трапец $\{(x,y): a \leq x \leq b,\ f(x) \leq y \leq 0\}$ е равно на

$$S = -\int_a^b f(x)dx$$



т.е. $\int_a^b |f(x)| dx = S$

В общия случай:



$$\int_a^b f(x)dx = S_1 - S_2 + S_3$$

$$\int_a^b |f(x)|dx = S_1 + S_2 + S_3$$

Свойства на определения интеграл:

1) $\int_a^b Af(x)dx = A\int_a^b f(x)dx, \quad A = const.$

2) $\int_a^b \left(f(x) \pm g(x)\right)dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$

3) $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx, \quad \int_a^a f(x)dx = 0$

4) $\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx$ за всяко a, b и c

5) $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)|, \quad b > a$

6) Ако за всяко $x \in [a,b]$ е изпълнено $\begin{cases} f(x) \ge 0, \text{ то } \int_a^b f(x)dx \ge 0 \\ f(x) \le 0, \text{ то } \int_a^b f(x)dx \le 0 \end{cases}$

7) Ако за всяко $x \in [a,b]$ е изпълнено $f(x) \le g(x)$, то $\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx$

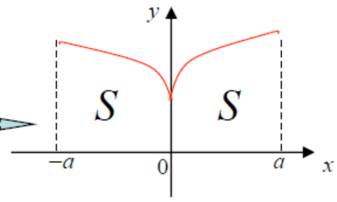
8) Ако $f(x)$ е непрекъсната функция в затворения интервал $[a,b]$,

то съществува число $c \in [a,b]$ така, че $\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a)$

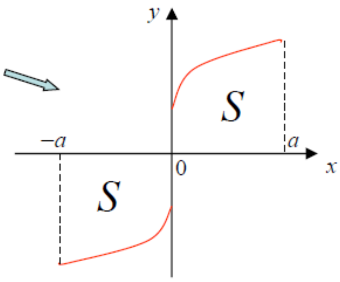
Това свойство се нарича **теорема за средните стойности**

9) Стойността на определения интеграл не зависи от означението на независимата променлива т.е. $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt$

10) Ако $f(x)$ е четна, то $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx$



Ако $f(x)$ е нечетна, то $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$



Формула на Нютон -Лайбниц

Дава връзката между неопределения интеграл (примитивните функции) и определения интеграл на една функцията **f(x)** в интервала **[a, b]**

Теорема: **Ако f(x)** е непрекъсната функция в интервала **[a, b]** и **F(x)** е коя да е нейна примитивна функция в този интервал, то

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

формула на Нютон-Лайбниц.

Ако въведем означението

$$F(b) - F(a) = F(x)\Big|_a^b$$

то формулата на **Нютон-Лайбниц** се записва така:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

Тази формула ни дава метод за пресмятане на определения интеграл чрез решаване на неопределения интеграл от същата функция и изчисляване на стойността му за горната и долната граници.

Готфрид Вилхелм фон Лайбниц
1646 – 1716 г.

немски философ, математик, дипломат, библиотекар и юрист

Основните математически постижения на Лайбниц са в областта на диференциалното и интегралното смятане - знаците за диференциране, правила за диференциране, твърдения за екстремумите и инфлексните точки, знака за интеграл, дава дефиниции за точки на прекъсване

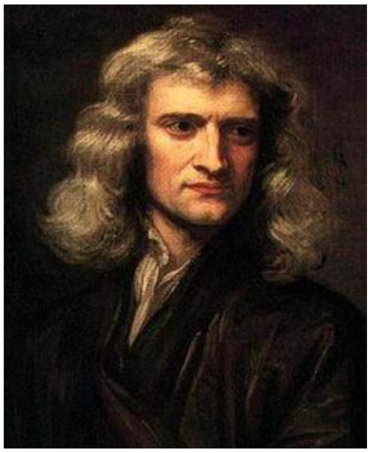
Поставя основите на теорията на редовете и на теорията на диференциалните уравнения. Той внася в анализа широко употребяваните днес термини: функция, диференциал, диференциално уравнение, алгоритъм, абсциса, ордината и др.

Той е и един от основоположниците на математическата логика.

Исак Нютон
1643 -1727 г.

английски учен

Математик, физик, астроном, теолог, алхимик, философ и политик



Известен с откриването на:

- Математическия анализ (независимо от Готфрид Лайбниц)
- Нютоновата механика
- Закона за всемирното привличане
- Дисперсия на светлината
- математик, физик, астроном, теолог,

Решаване на определени интеграли с непосредствено интегриране

Пример 1.

$$\int_0^2 x\,dx = \frac{x^2}{2}\Big|_0^2 = \frac{2^2}{2} - \frac{0^2}{2} = 2$$

Пример 2.

$$\int_{-1}^2 x^2 dx = \frac{x^3}{3}\Big|_{-1}^2 = \frac{2^3}{3} - \frac{(-1)^3}{3} = \frac{8}{3} + \frac{1}{3} = 3$$

Пример 3.

$$\int_1^4 \sqrt{x}\,dx = \int_1^4 x^{\frac{1}{2}} dx = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\Big|_1^4 = \frac{2}{3}\sqrt{x^3}\Big|_1^4 =$$

$$= \frac{2}{3}(\sqrt{4^3} - \sqrt{1^3}) = \frac{2}{3}(8-1) = \frac{14}{3}$$

Пример 4.

$$\int_0^\pi \sin x\,dx = -\cos x\Big|_0^\pi = -(\cos\pi - \cos 0) = -(-1-1) = 2$$

Пример 5.

$$\int_1^5 x^2 dx = \frac{x^3}{3}\Big|_1^5 = \frac{5^3}{3} - \frac{1^3}{3} = \frac{124}{3}$$

Пример 6.

$$\int_1^4 \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x}\Big|_1^4 = 2\sqrt{4} - 2\sqrt{1} = 2$$

Пример 7.

$$\int_0^2 \left(e^x+10\right)dx=\int_0^2 e^x dx+\int_0^2 10dx=e^x\Big|_0^2+10x\Big|_0^2=$$

$$=e^2-e^0+10.2-10.0=\ e^2+19$$

Пример 8.

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}=arctgx\Big|_0^1=arctg1-arctg0=\frac{\pi}{4}$$

Пример 9.

$$\int_0^3 \left(\frac{2}{x+1}+e^{\frac{x}{3}}\right)dx=\int_0^3 \frac{2}{x+1}dx+\int_0^3 e^{\frac{x}{3}}dx=2\int_0^3 \frac{d(x+1)}{x+1}+3\int_0^3 e^{\frac{x}{3}}d\frac{x}{3}$$

$$=2\ln|x+1|\Big|_0^3+3e^{\frac{x}{3}}\Big|_0^3=2(\ln 4-\underbrace{\ln 1}_{0})+3(e^{\frac{3}{3}}-\underbrace{e^0}_{1})=$$

$$=2\ln 4+3(e-1)\ =4\ln 2+3e-3$$

$$\boxed{\ln 4=\ln 2^2=2\ln 2}$$

Задачи за самостоятелна работа

Зад 1.

$$\int_1^4 \sqrt{x}dx$$

Зад 2.

$$\int_1^4 \left(1+e^{\frac{x}{4}}\right)dx$$

Зад 3.

$$\int_1^5 \frac{dx}{3x-2}$$

Зад 4.

$$\int_0^3 e^{\frac{x}{3}}dx$$

Зад 5.

$$\int_2^4 \frac{x+1}{x+2}dx$$ Отг. $2-\ln 6+\ln 4$

Зад 6.

$$\int_{-2}^2 \frac{x^2dx}{x^2+4}$$ Отг. $\pi-4$