Неопределени интеграли

Интегриране чрез смяна на променливата
(полагане, субституция)

Нека функцията f (x) е дефинирана в интервала D, а x = φ(t) има непрекъсната производна в интервала D_1 и е обратима.

Тогава

$$\int f(x)\,dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt + C$$

Равенството трябва да се разбира по следния начин: лявата страна на равенството е равна на дясната, ако след интегрирането направим субституцията **x = φ(t)** и изберем подходяща константа C.

<u>Субституции:</u>

1. $\int R\left(x,\sqrt{a^2-x^2}\right)dx,$ полагаме $x = a\sin t,\quad t = \arcsin\frac{x}{a},\quad dx = a\cos t dt$;
2. $\int R\left(x,\sqrt{a^2+x^2}\right)dx,$ полагаме $x = a tgt,\quad t = \mathrm{arc}\,tg\frac{x}{a},\quad dx = \frac{a}{\cos^2 t}dt$;
3. $\int R\left(x,\sqrt{x^2-a^2}\right)dx,$ полагаме $x = \frac{a}{\sin t},\quad t = \arcsin\frac{a}{x},\quad dx = -\frac{a\cos t}{\sin^2 t}$;
4. $\int R\left(x,ax^2+bx+c\right)dx,$ полагаме $x = t-\frac{b}{2a},\quad t = x+\frac{b}{2a},\quad dx = dt$;
5. $\int R\left(\sin x,\cos x\right)dx,$ полагаме $x = 2arctgt,\quad t = tg\frac{x}{2},\quad \sin x = \frac{2t}{1+t^2},\quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$;
6. $\int R\left(x,\sqrt[n]{x},\sqrt[m]{x}\right)dx,$ полагаме $x = t^k,\quad k = HOK(n,m,\ldots),\quad t = \sqrt[k]{x},\quad dx = k.t^{k-1}dt$;

Интегриране чрез смяна на променливата (полагане) ще прилагаме, когато желаем да пресметнем интеграла и можем да подберем функцията φ(t) така, че след заместването на **x** с **φ(t)** полученият интеграл да е по-лесен за пресмятане.

Пример 1.

$$I = \int \sqrt{a^2-x^2}\,dx \qquad (a>0)$$

Ако в интеграла направим субституцията x = a sin t, то dx = a cos tdt и

$$\sqrt{a^2-x^2}=\sqrt{a^2(1-\sin^2 t)}=a\cos t$$

Тогава интегралът добива вида:

$$I=a^2\int\cos^2 t\,dt=a^2\int\frac{1+\cos 2t}{2}\,dt=\frac{a^2}{2}\int(1+\cos 2t)\,dt=\frac{a^2}{2}\left(\int 1\,dt+\int\cos 2t\,dt\right)=$$

$$=\frac{a^2}{2}\left(\int 1\,dt+\frac{1}{2}\int\cos 2t\,d2t\right)=\frac{a^2}{2}t+\frac{a^2}{4}\sin 2t+C=\frac{a^2}{2}(t+\sin t\cos t)+C=$$

$$=\frac{a^2}{2}\left(t+\sin t\sqrt{1-\sin^2 t}\right)+C.$$

Но $t=\arcsin\frac{x}{a}$ и следователно

$$I=\frac{a^2}{2}\left(\arcsin\frac{x}{a}+\sin\left(\arcsin\frac{x}{a}\right)\sqrt{1-\sin^2\left(\arcsin\frac{x}{a}\right)}\right)+C=\frac{a^2}{2}\left(\arcsin\frac{x}{a}+\frac{x}{a}\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\right)+$$

$$C=\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}+\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+C$$

Пример 2.

$$\int\frac{dx}{x^2+6x+13}$$

$$\text{пол. } x=t-\frac{6}{2}=t-3,\quad t=x+3,\quad dx=dt$$

$$\int\frac{dx}{x^2+6x+13}=\int\frac{dt}{(t-3)^2+6(t-3)+13}=\int\frac{dt}{t^2+4}=\frac{1}{2}arctg\frac{t}{2}=\frac{1}{2}arctg\frac{x+3}{2}+c$$

Пример 3.

$$I=\int\frac{1}{2+\sqrt{x+3}}\,dx$$

Ако в интеграла направим субституцията

$x=t^2-3,\quad (x+3\geq 0)$, то $\sqrt{x+3}=t$ и $dx=2tdt$

Тогава интегралът добива вида

$$I=\int\frac{2t}{2+t}\,dt=2\int\frac{t+2-2}{2+t}\,dt=$$

$$=2\left(\int 1\,dt-2\int\frac{1}{t+2}\,d(t+2)\right)=2t-4\ln|t+2|+C=2\sqrt{x+3}-4\ln(2+\sqrt{x+3})+C$$

Пример 4.

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+1\right)}$$

пол. $x=t^2,\quad t=\sqrt{x},\quad dx=2.tdt$

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+1\right)}=\int\frac{2tdt}{t(t+1)}=2\int\frac{dt}{t+1}=2\int\frac{d(t+1)}{t+1}=2\ln|t+1|=2\ln\left(\sqrt{x}+1\right)+c$$

Пример 5.

$$\int\frac{dx}{1+\sqrt{x}}$$

пол. $x=t^2,\quad t=\sqrt{x},\quad dx=2.tdt$

$$\int\frac{dx}{1+\sqrt{x}}=2\int\frac{tdt}{1+t}=2\int\frac{t+1-1}{1+t}dt=2\int\frac{t+1}{1+t}dt-2\int\frac{1}{1+t}dt=2t-2\ln|1+t|=$$

$$=\ 2\sqrt{x}-2\ln\left(\sqrt{x}+1\right)+c$$

Пример 6.

$$\int x\sqrt{x-3}dx$$

пол. $t=\sqrt{x-3},\quad x=t^2+3,\quad dx=2tdt$

$$\int x\sqrt{x-3}dx=\int(t^2+3)t.2tdt=2\int(t^4+3t^2)dt=2\int t^4dt+6\int t^2dt=2.\frac{t^5}{5}+6.\frac{t^3}{3}\ =$$

$$=\ \frac{2}{5}\sqrt{(x-3)^5}+2\sqrt{(x-3)^3}+c$$

Пример 7.

$$\int \frac{\sqrt[4]{x}}{\sqrt{x}+1}dx$$

$$x = t^4, \quad t = \sqrt[4]{x}, \quad dx = 4.t^3dt$$

$$\sqrt[4]{x} = \sqrt[4]{t^4 = t}, \quad \sqrt{x} = \sqrt{t^4} = t^2$$

$$\int \frac{\sqrt[4]{x}}{\sqrt{x}+1}dx = \int \frac{t}{t^2+1}.4t^3dt = 4\int \frac{t^4}{t^2+1}dt = 4\int \frac{(t^4-1)+1}{t^2+1}dt = 4\int \frac{(t^2-1)(t^2+1)}{t^2+1}dt + 4\int \frac{1}{t^2+1}dt =$$

$$= \frac{4}{3}t^3 - 4t + 4arctgt + c = \frac{4}{3}\sqrt[4]{x^3} - 4\sqrt[4]{x} + 4arctg\sqrt[4]{x} + c$$

Пример 8.

$\int \sqrt{1-x^2}dx$ пол. $x = \sin t, \quad t = \arcsin x, \quad dx = \cos t dt,$

$$\int \sqrt{1-x^2}dx = \int \sqrt{1-\sin^2 t}.\cos t dt = \int \cos^2 t dt = \int \frac{1+\cos 2t}{2}dt = \frac{1}{2}\int dt + \frac{1}{2}\int \cos 2t dt =$$

$$= \frac{1}{2}t + \frac{1}{4}\int \cos 2t d2t = \frac{1}{2}t + \frac{1}{4}\sin 2t + c =$$

$$= \frac{1}{2}\arcsin x + \frac{1}{4}\sin(2\arcsin x) + c = \frac{1}{2}\arcsin x + \frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2} + c$$

Задачи за самостоятелна работа

$\int \frac{1-\sqrt[3]{2x}}{\sqrt{2x}}dx$ Отг. $\sqrt{2x}-\frac{3}{5}\sqrt[6]{(2x)^5}+c$;

$\int \frac{\sqrt{x}dx}{\sqrt[3]{x^2}-x}$ Упътване: $t^4-1=(t^2-1)(t^2+1)$ Отг. $-2\sqrt[6]{x}-6\sqrt{x}-3\ln\left|\frac{\sqrt[6]{x}-1}{\sqrt[6]{x}+1}\right|+c$

$\int \frac{\sqrt{9-x^2}}{x^2}dx$ Отг. $-\cot g\left(\arcsin\frac{x}{3}\right)-\arcsin\frac{x}{3}+c=-\frac{\sqrt{9-x^2}}{x}-\arcsin\frac{x}{3}+c$

$\int \frac{x}{\sqrt{16-x^2}}dx$ Отг. $-\sqrt{16-x^2}+c$

$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$ Упътване: пол. $x=\frac{1}{\sin t}$, Отг. $-\arcsin\frac{1}{x}+c$

$\int \frac{3-\sqrt[3]{(x-2)^2}}{\sqrt{x-2}}dx$ Отг. $6\sqrt{x-2}-\frac{6}{7}(x-2)\sqrt[6]{x-2}+c$

$\int \sqrt{4-x^2}dx$ Отг. $2\arcsin\frac{x}{2}+\sin\left(2\arcsin\frac{x}{2}\right)+c=\frac{1}{2}x\sqrt{4-x^2}+2\arcsin\frac{x}{2}+c$

$\int \frac{dx}{\sqrt{(1+x^2)^3}}$ Отг. $\sin(arctgx)+c=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}+c$

$\int \frac{dx}{1+\sin x+\cos x}$ Упътване : Пол $tg\frac{x}{2}=t, x=2arctgt$

Отг. $\ln\left|tg\frac{x}{2}+1\right|+c$