Неопределени интеграли
Интегриране по части

Нека $u = u(x)$ и $v = v(x)$ са две диференцируеми в даден интервал функции.

Тогава:

$$(uv)' = u'v + uv'$$

Следователно:

$$uv = \int vu'\,dx + \int uv'\,dx$$
$$uv = \int v\,du + \int u\,dv$$

$$\int u(x)dv(x) = u(x)v(x) - \int v(x)du(x)$$

Формулата се нарича формула за интегриране по части.
По разбираема се записва в този вид:

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

Пример 1.

$$\int \ln x\,dx = x\ln x - \int x d\ln x = x\ln x - \int x\frac{1}{x}dx = x\ln x - \int 1dx = x(\ln x - 1) + C$$

Пример 2.

$$5\int x^4 \ln x\,dx = (\text{внасяме } x^4 \text{ под знака на диференциала})$$

$$= \int \ln x\,dx^5 =$$

$$x^5\ln x - \int x^5 d\ln x = x^5\ln x - \int x^5\frac{1}{x}dx = x^5\ln x - \int x^4 dx = x^5\ln x - \frac{x^5}{5} + C$$

Пример 3.

$$\int \operatorname{arctg} x\, dx = x \operatorname{arctg} x - \int x d \operatorname{arctg} x = x \operatorname{arctg} x - \int \frac{x}{1+x^2}\, dx = x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\int \frac{1}{1+x^2}\, d(x^2+1) = x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\ln|1+x^2| + C$$

Пример 4.

$$\int (x^2-2x+2)e^x dx = \int (x^2-2x+2) de^x$$
$$= (x^2-2x+2)e^x - \int e^x(2x-2)dx$$
$$= (x^2-2x+2)e^x - \int (2x-2)de^x$$
$$= (x^2-2x+2)e^x - [(2x-2)e^x - \int e^x 2dx]$$
$$= (x^2-2x+2)e^x - (2x-2)e^x + 2e^x + C$$
$$= (x^2-4x+6)e^x + C$$

Пример 5.

$$\int x^3 e^x\, dx = \int x^3\, de^x = x^3 e^x - \int e^x\, dx^3 = x^3 e^x - 3\int x^2 e^x\, dx = x^3 e^x - 3\int x^2\, de^x = x^3 e^x - 3\left(x^2 e^x - \int e^x\, dx^2\right) = x^3 e^x - 3\left(x^2 e^x - 2\int x e^x\, dx\right) =$$
$$= x^3 e^x - 3x^2 e^x + 6\int x e^x\, dx = x^3 e^x - 3x^2 e^x + 6\int x\, de^x = x^3 e^x - 3x^2 e^x + 6\left(x e^x - \int e^x\, dx\right) =$$
$$= x^3 e^x - 3x^2 e^x + 6x e^x - 6e^x + C = e^x(x^3 - 3x^2 + 6x - 6) + C$$

<u>ПРЕПОРЪКА:</u>

1. При интервали от вида:

$$\int P_n(x) e^{\alpha x} dx, \int P_n(x) \cos \beta x dx, \int P_n(x) \sin \beta x dx$$

в диференциала се внасят функциите: $e^{\alpha x}, \cos \beta x, \sin \beta x$

2. При интервали от вида:

$$\int P_n(x)\ln x dx,\quad \int P_n(x)\,\mathrm{arctg}\, x dx$$

в диференциала се внасят функциите: Pn(x)

Пример 6.

$$\int x^2\cos x\,dx = \int x^2\,d\sin x = x^2\sin x - \int \sin x\,dx^2 = x^2\sin x - 2\int x\sin x\,dx =$$

$$= x^2\sin x + 2\int x\,d\cos x = x^2\sin x + 2\left(x\cos x - \int \cos x\,dx\right) =$$

$$= x^2\sin x + 2x\cos x - 2\sin x + C$$

Пример 7.

$$I = \int e^x\sin x\,dx = \int \sin x\,de^x = e^x\sin x - \int e^x\,d\sin x = e^x\sin x -$$

$$\int e^x\cos x\,dx = e^x\sin x - \int \cos x\,de^x = e^x\sin x - \left(e^x\cos x - \int e^x\,d\cos x\right) =$$

$$= e^x\sin x - e^x\cos x - \int e^x\sin x\,dx = e^x(\sin x - \cos x) - I$$

$$2I = e^x(\sin x - \cos x)$$

$$I = \frac{1}{2}e^x(\sin x - \cos x)$$

Задачи за самостоятелна работа

$\int 3x^2 e^{x^3}\, dx$ Отг. $e^{x^3} + C$

$\int 7\cos x \sin^6 x\, dx$ Отг. $\sin^7 x + C$

$\int 3\cos^3 x \sin^2 x\, dx$ Отг. $\sin^3 x - \dfrac{3\sin^5\ x}{5} + C$

$\int \dfrac{\ln x}{x^2}\, dx$ Отг. $-\dfrac{\ln x}{x} - \dfrac{1}{x} + C$

$\int \ln(x^2+1)\, dx$ Отг. $x\ln(x^2+1) - 2x + 2\operatorname{arctg} x + C$

$\int 2xe^{2x}\, dx$ Отг. $xe^{2x} - \dfrac{1}{2}e^{2x} + C$

$\int x^2 e^{-x}\, dx$ Отг. $-x^2e^{-x} - 2xe^{-x} - 2e^{-x} + C$