Неопределени интеграли
Интегриране чрез внасяне под знака на диференциала

Както знаем, ако φ(x) е диференцируема функция, то $d\varphi(x) = \varphi'(x)dx$.
В тази случай имаме:

$$\int f(x)\varphi'(x)\,dx = \int f(x)\,d\varphi(x)$$

Когато прилагаме това равенство ще казваме, че внасяме функцията φ'(x) под знака на диференциала или че извършваме действието внасяне под знака на диференциала. То се състои в това, че вместо функцията φ'(x), която е пред диференциала, написваме под диференциала една нейна примитивна функция. Поради тази причина често казваме, че внасянето под знака на диференциала е интегриране и внасяме под знака на диференциала функции, които лесно се интегрират (например има ги в табличните интеграли). Ползата от това действие се вижда ясно при прилагане на свойство 5.

Пример 1.

$$\int \sin x \cos x\,dx = (\text{внасяме под знака на диференциала } \cos x)$$

$$\int \sin x\,d\sin x = \frac{1}{2}\sin^2 x + C$$

Пример 2.

$$2\int xe^{x^2}\,dx = (\text{внасяме под знака на диференциала } x)$$

$$= \int e^{x^2}\,dx^2 = e^{x^2} + C$$

Пример 3.

$$2\int \frac{x}{x^2+1}\,dx = (\text{внасяме под знака на диференциала } x) =$$

$$= \int \frac{1}{x^2+1}\,d(x^2+1) = \ln|x^2+1| + C$$

Пример 4.

$$\int \sin^3 x\,dx = \int \sin^2 x \sin x\,dx = -\int \sin^2 x\,d\cos x = \int (\cos^2 x - 1)\,d\cos x =$$

$$= \int \cos^2 x\,d\cos x - \int 1\,d\cos x = \frac{1}{3}\cos^3 x - \cos x + C$$

Пример 5.

$$\int \operatorname{tg} x\, dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}\, dx = -\int \frac{1}{\cos x}\, d\cos x = -\ln|\cos x| + C$$

Пример 6.

$$\int \frac{1}{\sin x}\, dx = \int \frac{1}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}\, dx = \int \frac{1}{\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}\, d\frac{x}{2} = \int \frac{1}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2}}\, d\frac{x}{2} =$$

$$= \int \frac{1}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}\, d\operatorname{tg}\frac{x}{2} = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + C$$

Пример 7.

$$\int \frac{1}{\cos x}\, dx = \int \frac{1}{\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)}\, d\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right| + C$$

Пример 8.

$$\int \frac{dx}{x+a} = \int \frac{d(x+a)}{x+a} = \ln|x+a| + C$$

Пример 9.

$$\int \frac{x\,dx}{x^2+1} = \frac{1}{2}\int \frac{dx^2}{x^2+1}$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{d(x^2+1)}{x^2+1} = \frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right) + C$$

Задачи за самостоятелна работа

$$\int \cos(2x-1)\,dx$$ Отг. $\frac{1}{2}\sin(2x-1)+C$

$$\int \left(e^{2x-213}-\sin(5x+3)\right)\,dx$$ Отг. $\frac{1}{2}e^{2x-213}+\frac{1}{5}\cos(5x+13)+C$

$$\int \frac{1}{4x^2+25}\,dx$$ Отг. $\frac{1}{10}\operatorname{arctg}\frac{2x}{5}+C$

$$\int \frac{1}{9x^2-16}\,dx$$ Отг. $\frac{1}{24}\ln\left|\frac{3x-4}{3x+4}\right|+C$

$$\int \frac{e^x\,dx}{\sqrt{e^x+1}}$$ $2\sqrt{e^x+1}+C$

$$\int \frac{dx}{x\ln x}$$ $\ln(|\ln x|)+C$