Неопределени интеграли
Решаване на интеграли с непосредствено интегриране

Понятието неопределен интеграл е свързано с действието, което е обратно на диференцирането. Намирането на функция, чиято производна е равна на дадена функция, се нарича интегриране и методите за интегриране се оказват доста по-сложни от методите за диференциране.

Нека е дадена функцията f(x), дефинирана и непрекъсната в даден интервал.

Дефиниция:

Ще казваме, че функцията F(x), дефинирана в същия интервал, е примитивна функция на f(x), ако F(x) е диференцируема в този интервал и **F'(x) = f(x).**

Дефиниция:

Множеството от всички примитивни функции на функцията f(x) се нарича неопределен интеграл и се означава с

$$\int f(x)\,dx,$$

а функцията f(x) се нарича подинтегрална функция, т.е.

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C \qquad \text{където} \qquad F'(x) = f(x)$$

Намирането на примитивните функции на дадена функция f(x) се нарича интегриране на f(x).

ПРИМЕРИ:

$$\int e^x\,dx = e^x + C, \text{ защото } (e^x)' = e^x.$$

$$\int \cos x\,dx = \sin x + C, \text{ защото } (\sin x)' = \cos x.$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \operatorname{tg} x + C, \text{ защото } (\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

СВОЙСТВА:

1. $\left(\int f(x)\,dx\right)' = f(x)$

2. $\int dF(x) = \int F'(x)\,dx = F(x)$

3. $\int af(x)\,dx = a\int f(x)\,dx$ *а-константа*

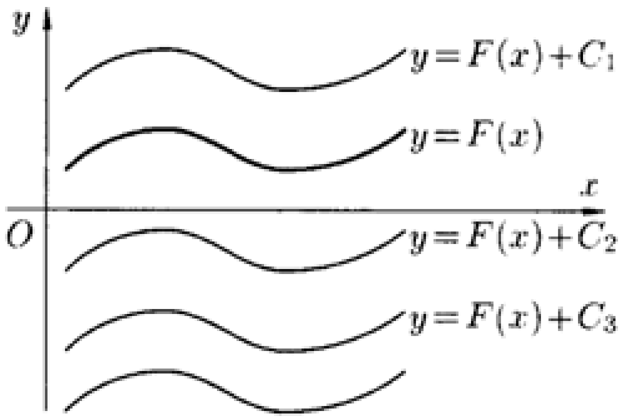
4. $\int (f(x)+g(x))\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$

5. Ако $\int f(x)\,dx = F(x)+C$ и $\varphi(x)$ е диференцируема функция, то

$$\int f(\varphi(x))\,d\varphi(x) = \int f(\varphi(x))\varphi'(x)\,dx = F(\varphi(x))+C$$

Геометрична интерпретация на неопределения интеграл

Неопределения интеграл представлява семейство паралелно разположени криви $F(x)+C$, където при всяко конкретно числово значение на параметъра C, съответства определена крива от указаното семейство.



ТАБЛИЧНИ ИНТЕГРАЛИ

1. $\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \qquad (n \neq -1)$

2. $\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C \qquad (x \neq 0)$

3. $\int a^x\,dx = \frac{1}{\ln a} \cdot a^x + C$

4. $\int e^x\,dx = e^x + C$

5. $\int \cos x\,dx = \sin x + C$

6. $\int \sin x\,dx = -\cos x + C$

7. $\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \operatorname{tg} x + C$

8. $\int \frac{1}{\sin^2 x}\,dx = -\operatorname{cotg} x + C$

9. $\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \operatorname{arctg} x + C$

10. $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arcsin x + C$

11. $\int \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm a}}\,dx = \ln|x + \sqrt{x^2 \pm a}| + C \qquad (a \neq 0)$

12. $\int \frac{1}{x^2 - a^2}\,dx = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C$

Решаване на интеграли с непосредствено интегриране

Под непосредствено интегриране ще разбираме пресмятане на неопределени интеграли чрез прилагане на основните свойства и табличните интеграли.

Пример 1.

$$\int (x^4 + 4x^3 - 3x + 1)\,dx = \int x^4\,dx + 4\int x^3\,dx - 3\int x\,dx + \int 1\,dx =$$

$$= \frac{x^5}{5} + 4\frac{x^4}{4} - 3\frac{x^2}{2} + x + C = \frac{1}{5}x^5 + x^4 - \frac{3}{2}x^2 + x + C$$

Пример 2.

$$\int \frac{x^6 + 5x^3\sqrt{x} - 3x + 2}{x^2}\,dx = \int x^4\,dx + 5\int x\sqrt{x}\,dx - 3\int \frac{1}{x}\,dx + 2\int \frac{1}{x^2}\,dx =$$

$$= \frac{x^5}{5} + 5\int x^{\frac{3}{2}}\,dx - 3\ln|x| + 2\int x^{-2}\,dx = \frac{1}{5}x^5 + 2x^{\frac{5}{2}} - 3\ln|x| - \frac{2}{x} + C$$

Ще демонстрираме прилагането на свойство 5, в случая когато $\varphi(x) = ax + b$, където (a,b - константи) Тогава имаме:

$$\int f(ax+b)\,dx = \frac{1}{a}\int f(ax+b)\,d(ax+b) = \frac{1}{a}F(ax+b) + C$$

Пример 3.

$$\int \frac{1}{3x+2}\,dx = \frac{1}{3}\int \frac{1}{3x+2}\,d3x = \frac{1}{3}\int \frac{1}{3x+2}\,d(3x+2) = \frac{1}{3}\ln|3x+2| + C$$

Пример 4.

$$\int \frac{1}{\cos^2(2x-11)}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{\cos^2(2x-11)}\,d2x = \frac{1}{2}\int \frac{1}{\cos^2(2x-11)}\,d(2x-11) =$$

$$= \frac{1}{2}\,\mathrm{tg}(2x-11) + C$$

Пример 5.

$$\int \sin(\frac{x}{4}-5)\,dx = 4\int \sin(\frac{x}{4}-5)\,d\frac{x}{4} = 4\int \sin(\frac{x}{4}-5)\,d(\frac{x}{4}-5) = -4\cos(\frac{x}{4}-5)+C$$

Пример 6.

$$\int \cos^2 x\,dx = \int \frac{1+\cos 2x}{2}\,dx = \frac{1}{2}\int (1+\cos 2x)\,dx = \frac{1}{2}\left(\int 1\,dx + \int \cos 2x\,dx\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\int 1\,dx + \frac{1}{2}\int \cos 2x\,d2x\right) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x + C$$

Пример 7.

$$\int \frac{1}{x^2+a^2}\,dx = \frac{1}{a^2}\int \frac{1}{\left(\frac{x}{a}\right)^2+1}\,dx = \frac{1}{a^2}.a\int \frac{1}{\left(\frac{x}{a}\right)^2+1}\,d\left(\frac{x}{a}\right) = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C$$

Пример 7.

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx = \frac{1}{a}\int \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}}\,dx = \frac{1}{a}.a\int \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}}\,d\frac{x}{a} = \arcsin\frac{x}{a} + C$$

Задачи за самостоятелна работа

$\int (5x^4 - 4x^3 + x - 1)\,dx$ Отг. $x^5 - x^4 + \frac{x^2}{2} - x + C$

$\int \left(x^3 + 3\sqrt{x} - \frac{1}{x}\right)dx$ Отг. $\frac{x^4}{4} + 2x\sqrt{x} - \ln|x| + C$

$\int \left(x^2 - 3\sqrt{x} - \frac{2}{x^2}\right)dx$ Отг. $\frac{x^3}{3} - 2x\sqrt{x} + \frac{2}{x} + C$

$\int \frac{x^5 + 3x^2 - 1}{x^2}\,dx$ Отг. $\frac{x^4}{4} + 3x + \frac{1}{x} + C$

$\int \frac{x^6 - 3x^4 + 2x^2 - x + 1}{x^2}\,dx$ Отг. $\frac{x^5}{5} - x^3 + 2x - \ln|x| - \frac{1}{x} + C$