

**Теорема 1.** *Съществуват 5 проективни класа криви от втора степен:*

№	наименование	представител	бележки
1	имагинерна крива	$q_1 : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$	Няма реални точки. Няма особени точки.
2	овална крива	$q_2 : x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0$	Няма особени точки.
3	две комплексно спрегнати прави	$q_3 : x_1^2 + x_2^2 = 0$	Състои се от две комплексно спрегнати прави и има единствена реална точка – пресечната им точка. Това е и единствената особена точка. За $q_3$ това са правите $x_1 - ix_2 = 0$ и $x_1 + ix_2 = 0$ и точката $(0, 0, 1)$ .
4	две реални прави	$q_4 : x_1^2 - x_2^2 = 0$	Състои се от две реални прави. Пресечната им точка е единствената особена точка. За $q_4$ това са правите $x_1 - x_2 = 0$ и $x_1 + x_2 = 0$ и точката $(0, 0, 1)$ .
5	една двойна права	$q_5 : x_1^2 = 0$	Състои се от една реална права, всички точки на която са особени. За $q_5$ това е правата $x_1 = 0$ .

**Теорема 2.** *Съществуват 8 проективни класа повърхнини от втора степен:*

№	наименование	представител	бележки
1	имагинерна повърхнина	$q_1 : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 0$	Няма реални точки. Няма особени точки.
2	овална повърхнина	$q_2 : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_4^2 = 0$	Няма особени точки.
3	проективен хиперболоид	$q_3 : x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 - x_4^2 = 0$	Няма особени точки.
4	имагинерен конус	$q_4 : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$	Има единствена реална точка, която е и единствената особена точка. За $q_4$ това е точката $(0, 0, 0, 1)$ .
5	конус	$q_5 : x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0$	Има единствена особена точка. За $q_5$ това е точката $(0, 0, 0, 1)$ .
6	две комплексно спрегнати равнини	$q_6 : x_1^2 + x_2^2 = 0$	Състои се от две комплексно спрегнати равнини. Множеството от особените точки е пресечната им права, а върху нея лежат и всички реални точки. За $q_6$ това са равнините $x_1 - ix_2 = 0$ и $x_1 + ix_2 = 0$ и правата $x_1 = 0, x_2 = 0$ .
7	две реални равнини	$q_7 : x_1^2 - x_2^2 = 0$	Състои се от две реални равнини. Множеството от особените точки е пресечната им права. За $q_7$ това са равнините $x_1 - x_2 = 0$ и $x_1 + x_2 = 0$ и правата $x_1 = 0, x_2 = 0$ .
8	една двойна равнина	$q_8 : x_1^2 = 0$	Състои се от една реална равнина, всички точки на която са особени. За $q_8$ това е равнината $x_1 = 0$ .

**Теорема 3.** *Съществуват 9 афинни класа криви от втора степен:*

№	наименование	представител/ афинно канонично уравнение	проект. клас	бележки
1	имагинерна елипса	$q_1 : x_1^2 + x_2^2 + 1 = 0$	1	Няма реални точки.
2	елипса	$q_2 : x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0$	2	
3	хипербола	$q_3 : x_1^2 - x_2^2 + 1 = 0$	2	
4	парабола	$q_4 : x_1^2 - 2x_2 = 0$	2	
5	две комплексно спрегнати пресичащи се прави	$q_5 : x_1^2 + x_2^2 = 0$	3	Състои се от две комплексно спрегнати пресичащи се прави и има единствена реална точка – пресечната им точка. За $q_5$ това са правите $x_1 - ix_2 = 0$ и $x_1 + ix_2 = 0$ и точката $(0, 0)$ .
6	две комплексно спрегнати успоредни прави	$q_6 : x_1^2 + 1 = 0$	3	Няма реални точки. Състои се от две комплексно спрегнати успоредни прави. За $q_6$ това са правите $x_1 - i = 0$ и $x_1 + i = 0$ .
7	две реални пресичащи се прави	$q_7 : x_1^2 - x_2^2 = 0$	4	Състои се от две реални пресичащи се прави. За $q_7$ това са правите $x_1 - x_2 = 0$ и $x_1 + x_2 = 0$ и пресечната им точка е $(0, 0)$ .
8	две реални успоредни прави	$q_8 : x_1^2 - 1 = 0$	4	Състои се от две реални успоредни прави. За $q_8$ това са правите $x_1 - 1 = 0$ и $x_1 + 1 = 0$ .
9	една двойна права	$q_9 : x_1^2 = 0$	5	Състои се от една реална права. За $q_9$ това е правата $x_1 = 0$ .

Теорема 4. Съществуват 17 афинни класа повърхнини от втора степен:

№	наименование	представител/ афинно канонично уравнение	проект. клас	бележки
1	имагинерен елипсоид	$q_1 : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 1 = 0$	1	Няма реални точки.
2	елипсоид	$q_2 : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 1 = 0$	2	
3	двоен хиперболоид елиптичен	$q_3 : x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 + 1 = 0$	2	
4	параболоид прост	$q_4 : x_1^2 + x_2^2 - 2x_3 = 0$	2	
5	хиперболоид	$q_5 : x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 - 1 = 0$	3	
6	хиперболичен параболоид	$q_6 : x_1^2 - x_2^2 - 2x_3 = 0$	3	
7	имагинерен конус	$q_7 : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$	4	Само една реална точка. За $q_7$ тя е $(0, 0, 0)$ .
8	елиптичен цилиндър	$q_8 : x_1^2 + x_2^2 + 1 = 0$	4	Няма реални точки.
9	конус	$q_9 : x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0$	5	
10	елиптичен цилиндър	$q_{10} : x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0$	5	
11	хиперболичен цилиндър	$q_{11} : x_1^2 - x_2^2 - 1 = 0$	5	
12	параболичен цилиндър	$q_{12} : x_1^2 - 2x_2 = 0$	5	
13	две комплексно спрегнати пресичащи се равнини	$q_{13} : x_1^2 + x_2^2 = 0$	6	Състои се от две комплексно спрегнати пресичащи се равнини и реалните точки лежат върху пресечната им права. За $q_{13}$ това са равнините $x_1 - ix_2 = 0$ и $x_1 + ix_2 = 0$ и пресечната им права е $x_1 = 0, x_2 = 0$ .
14	две комплексно спрегнати успоредни равнини	$q_{14} : x_1^2 + 1 = 0$	6	Няма реални точки. Състои се от две комплексно спрегнати успоредни равнини. За $q_{14}$ това са равнините $x_1 - i = 0$ и $x_1 + i = 0$ .
15	две реални пресичащи се равнини	$q_{15} : x_1^2 - x_2^2 = 0$	7	Състои се от две реални пресичащи се равнини. За $q_{15}$ това са равнините $x_1 - x_2 = 0$ и $x_1 + x_2 = 0$ и те се пресичат по правата $x_1 = 0, x_2 = 0$ .
16	две реални успоредни равнини	$q_{16} : x_1^2 - 1 = 0$	7	Състои се от две реални успоредни равнини. За $q_{16}$ това са равнините $x_1 - 1 = 0$ и $x_1 + 1 = 0$ .
17	една двойна равнина	$q_{17} : x_1^2 = 0$	8	Състои се от една реална равнина. За $q_{17}$ това е равнината $x_1 = 0$ .

**Теорема 5.** *Съществуват безбройно много метрични класове криви от втора степен. Те се задават от кривите с уравнения:*

представител/ метрично канонично уравнение	афинен клас
$\frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} + 1 = 0, a_1 \geq a_2 > 0$	имагинерна елипса
$\frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} - 1 = 0, a_1 \geq a_2 > 0$	елипса
$\frac{x_1^2}{a_1^2} - \frac{x_2^2}{a_2^2} + 1 = 0, a_1 > 0, a_2 > 0$	хипербола
$x_1^2 - 2px_2 = 0, p > 0$	парабола
$x_1^2 + a^2x_2^2 = 0, a \geq 1$	две комплексно спрегнати пресичащи се прави
$x_1^2 + a^2 = 0, a > 0$	две комплексно спрегнати успоредни прави
$x_1^2 - a^2x_2^2 = 0, a \geq 1$	две реални пресичащи се прави
$x_1^2 - a^2 = 0, a > 0$	две реални успоредни прави
$x_1^2 = 0$	една двойна права

**Теорема 6.** *Съществуват безбройно много метрични класове повърхнини от втора степен. Те се задават от повърхнините с уравнения:*

представител/ метрично канонично уравнение	афинен клас
$\frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} + \frac{x_3^2}{a_3^2} + 1 = 0, a_1 \geq a_2 \geq a_3 > 0$	имагинерен елипсоид
$\frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} + \frac{x_3^2}{a_3^2} - 1 = 0, a_1 \geq a_2 \geq a_3 > 0$	елипсоид
$\frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} - \frac{x_3^2}{a_3^2} + 1 = 0, a_1 \geq a_2 > 0, a_3 > 0$	двоен хиперболоид
$\frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} - 2x_3 = 0, a_1 \geq a_2 > 0$	елиптичен параболоид
$\frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} - \frac{x_3^2}{a_3^2} - 1 = 0, a_1 \geq a_2 > 0, a_3 > 0$	прост хиперболоид
$\frac{x_1^2}{a_1^2} - \frac{x_2^2}{a_2^2} - 2x_3 = 0, a_1 \geq a_2 > 0$	хиперболичен параболоид
$\frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} + x_3^2 = 0, a_1 \geq a_2 \geq 1$	имагинерен конус
$\frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} + 1 = 0, a_1 \geq a_2 > 0$	имагинерен елиптичен цилиндър
$\frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} - x_3^2 = 0, a_1 \geq a_2 > 0$	конус
$\frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} - 1 = 0, a_1 \geq a_2 > 0$	елиптичен цилиндър
$\frac{x_1^2}{a_1^2} - \frac{x_2^2}{a_2^2} + 1 = 0, a_1 > 0, a_2 > 0$	хиперболичен цилиндър
$x_1^2 - 2px_2 = 0, p > 0$	параболичен цилиндър
$x_1^2 + a^2x_2^2 = 0, a \geq 1$	две комплексно спрегнати пресичащи се равнини
$x_1^2 + a^2 = 0, a > 0$	две комплексно спрегнати успоредни равнини
$x_1^2 - a^2x_2^2 = 0, a \geq 1$	две реални пресичащи се равнини
$x_1^2 - a^2 = 0, a > 0$	две реални успоредни равнини
$x_1^2 = 0$	една двойна равнина