на координатната система $Ox'y'z'$ в $O''x''y''z''$, като точката O'' има координати $(\alpha, 0, 0)$ спрямо $Ox'y'z'$, преобразува (18) в уравнението

$$s_1 x''^2 + 2a'_{24}y'' + 2a'_{34}z'' + a''_{44} = 0, \tag{20}$$

като

$$a''_{44} = a'_{44} + s_1\alpha^2 + 2a'_{14}\alpha.$$

Сега имаме два подслучая:

а) Ако $a'_{24} = a'_{34} = 0$, имаме уравнението

$$s_1 x''^2 + a''_{44} = 0 \quad (s_1 \neq 0). \tag{21}$$

б) Да приемем, че поне един от коефициентите a'_{24}, a'_{34} е различен от нула, например $a'_{34} \neq 0$. Транслацията на системата $O''x''y''z''$ до $O'''x'''y'''z'''$ посредством

$$x'' = x''', \quad y'' = y''', \quad z'' = z''' + \gamma, \tag{22}$$

като точката O''' има координати $\left(0,\, 0,\, \gamma = -\dfrac{a''_{44}}{2a_{34}}\right)$ спрямо $O''x''y''z''$ преобразува уравнението (20) в

$$s_1 x'''^2 + 2a'_{24}y''' + 2a'_{34}z''' = 0. \tag{23}$$

Извършваме ротация на координатната система $O'''x'''y'''z'''$ около оста $O'''x'''$ до системата $O'''XYZ$, определена с формулите

$$\begin{aligned} x''' &= X, \\ y''' &= Y\cos\varphi - Z\sin\varphi, \\ z''' &= Y\sin\varphi + Z\cos\varphi. \end{aligned} \tag{24}$$

Като заместим x''', y''', z''' от (24) в (23), получаваме

$$s_1X^2 + 2a'_{24}(Y\cos\varphi - Z\sin\varphi) + 2a'_{34}(Y\sin\varphi + Z\cos\varphi) = 0. \tag{25}$$

Величината φ определяме от условието

$$a'_{24}\cos\varphi + a'_{34}\sin\varphi = 0,$$

т. е.

$$\operatorname{tg}\varphi = -\frac{a'_{24}}{a'_{34}}.$$

Понеже

$$\sin\varphi = -\varepsilon\frac{a'_{24}}{\sqrt{a'^2_{24} + a'^2_{34}}} \qquad \cos\varphi = \varepsilon\frac{a'_{34}}{\sqrt{a'^2_{24} + a'^2_{34}}} \qquad (\varepsilon = \operatorname{sgn} a'_{34}),$$

уравнението (25) се преобразува в уравнението

$$s_1X^2 + 2\varepsilon\sqrt{a'^2_{24} + a'^2_{34}}\,Z = 0. \tag{26}$$

Като резюмираме резултатите, получаваме следната (означенията са променени)

Теорема 1. *С подходяща ортогонална трансформация и транслация на ортонормираната координатна система уравнението на всяка повърхнина от втора степен може да се приведе в един от следните пет вида:*

I.	$s_1X^2 + s_2Y^2 + s_3Z^2 + a_{44} = 0$	$(s_1 \neq 0,\ s_2 \neq 0,\ s_3 \neq 0)$;
II.	$s_1X^2 + s_2Y^2 + 2a_{34}Z = 0$	$(s_1 \neq 0,\ s_2 \neq 0,\ a_{34} \neq 0)$;
III.	$s_1X^2 + s_2Y^2 + a_{44} = 0$	$(s_1 \neq 0,\ s_2 \neq 0)$;
IV.	$s_1X^2 + 2a_{34}Z = 0$	$(s_1 \neq 0,\ a_{34} \neq 0)$;
V.	$s_1X^2 + a_{44} = 0$	$(s_1 \neq 0)$.

По-нататъшното изследване на тези пет типа уравнения ни води до следната

Теорема 2. *Всяко уравнение на повърхнина от втора степен, зададена спрямо ортонормирана координатна система, с помощта на подходяща ортогонална трансформация и транслация на координатната система може да се приведе в един от следните 17 вида:*

1. $\dfrac{X^2}{a^2} + \dfrac{Y^2}{b^2} + \dfrac{Z^2}{c^2} = 1$ (*елипсоид*);
2. $\dfrac{X^2}{a^2} + \dfrac{Y^2}{b^2} + \dfrac{Z^2}{c^2} = -1$ (*имагинерен елипсоид*);
3. $\dfrac{X^2}{a^2} + \dfrac{Y^2}{b^2} - \dfrac{Z^2}{c^2} = 1$ (*прост хиперболоид*);
4. $\dfrac{X^2}{a^2} - \dfrac{Y^2}{b^2} - \dfrac{Z^2}{c^2} = 1$ (*двоен хиперболоид*);
5. $\dfrac{X^2}{a^2} + \dfrac{Y^2}{b^2} - \dfrac{Z^2}{c^2} = 0$ (*конус*);
6. $\dfrac{X^2}{a^2} + \dfrac{Y^2}{b^2} + \dfrac{Z^2}{c^2} = 0$ (*имагинерен конус*);
7. $\dfrac{X^2}{a^2} + \dfrac{Y^2}{b^2} = 2Z$ (*елиптичен параболоид*);
8. $\dfrac{X^2}{a^2} - \dfrac{Y^2}{b^2} = 2Z$ (*хиперболичен параболоид*);

9.	$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = 1$	(*елиптичен цилиндър*);
10.	$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = -1$	(*имагинерен елиптичен цилиндър*);
11.	$\frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} = 1$	(*хиперболичен цилиндър*);
12.	$\frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} = 0$	(*две реални пресекателни равнини*);
13.	$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = 0$	(*две комплексно спрегнати пресекателни равнини*);
14.	$X^2 = 2pZ \quad (p \neq 0)$	(*параболичен цилиндър*);
15.	$X^2 = a^2 \quad (a \neq 0)$	(*две реални успоредни равнини*);
16.	$X^2 = -a^2 \quad (a \neq 0)$	(*две комплексно спрегнати успоредни равнини*);
17.	$X^2 = 0$	(*двойна равнина*).

Д о к а з а т е л с т в о. Спираме вниманието си на уравнението I в теорема 1. Ако $a_{44} \neq 0$, то уравнението е еквивалентно на

$$\frac{X^2}{-\frac{a_{44}}{s_1}} + \frac{Y^2}{-\frac{a_{44}}{s_2}} + \frac{Z^2}{-\frac{a_{44}}{s_3}} = 1.$$

В зависимост от знаците на числата $-\frac{a_{44}}{s_1}$, $-\frac{a_{44}}{s_2}$, $-\frac{a_{44}}{s_3}$ имаме случаите 1, 2, 3 или 4. Ако $a_{44} = 0$, в зависимост от знаците на s_1, s_2, s_3 получаваме случаите 5 или 6.

В уравнението II на предишната теорема прехвърляме в дясната страна члена $2a_{34}Z$. Поради $a_{34} \neq 0$ получаваме уравнението

$$\frac{X^2}{-\frac{a_{34}}{s_1}} + \frac{Y^2}{-\frac{a_{34}}{s_2}} = 2Z.$$

В зависимост от знаците на числата $-\frac{a_{34}}{s_1}$, $-\frac{a_{34}}{s_2}$ получаваме случаите 7 или 8.

Уравнението III при $a_{44} \neq 0$ преобразуваме така:

$$\frac{X^2}{-\frac{a_{44}}{s_1}} + \frac{Y^2}{-\frac{a_{44}}{s_2}} = 1.$$

В зависимост от знаците на числата $-\frac{a_{44}}{s_1}$, $-\frac{a_{44}}{s_2}$ имаме случаите 9, 10, 11. Ако $a_{44} = 0$, в зависимост от знаците на s_1, s_2 имаме случаите 12 и 13.

Уравнението IV поради $a_{34} \neq 0$ е еквивалентно на уравнението в т. 14.

Най-после от уравнението V получаваме случаите 15, 16 и 17.

Уравненията 1 — 17 в последната теорема се наричат *метрични канонични уравнения на повърхнините от втора степен*. Наименованието им се оправдава с това, че смените на координатните системи, чрез които се достига до тях, могат да се тълкуват като метрични преобразувания (еднаквости) в пространството.

Задача 1. Повърхнина от втора степен има спрямо ортонормирана координатна система $Oxyz$ уравнение

$$4x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 4xz - 4yz + 6x + 4y + 8z + 2 = 0.$$

Да се намерят метричното канонично уравнение на повърхнината и последователните координатни трансформации, чрез които се стига до него.

Р е ш е н и е. Характеристичното уравнение на повърхнината

$$\begin{vmatrix} 4-s & 0 & 2 \\ 0 & 2-s & -2 \\ 2 & -2 & 3-s \end{vmatrix} = -s^3 + 9s^2 - 18s = 0$$

има корени $s_1 = 0$, $s_2 = 3$, $s_3 = 6$. Координатите на собствения (единичен) вектор $\overrightarrow{e_1'}$, съответствуващ на корена $s_1 = 0$, се определят от системата

$$2\lambda + \nu = 0,$$
$$\mu - \nu = 0,$$
$$\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 = 1.$$

Намираме $\overrightarrow{e_1'}\left(\frac{1}{2}, -\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right)$. Координатите на собствения вектор $\overrightarrow{e_2'}$, съответствуващ на корена $s_2 = 3$, се определят от системата

$$\lambda + 2\nu = 0,$$
$$\mu + 2\nu = 0,$$
$$\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 = 1.$$

Оттук намираме $\overrightarrow{e_2'}\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right)$. Третият собствен вектор $\overrightarrow{e_3'}$ е векторно произведение на първите два вектора. Намираме

Полагаме

$$x' = x'' + \alpha, \quad y' = y'', \quad z' = z''.$$

В полученото уравнение

$$9(x''^2 + 2\alpha x'' + \alpha^2) - 4(x'' + \alpha) - 6\sqrt{2}y'' - 10\sqrt{2}z'' + 6 = 0$$

анулираме коефициента на x''. Това е възможно, ако изберем $\alpha = \frac{2}{3}$. Следователно чрез транслация на системата $Ox'y'z'$ до $O''x''y''z''$, като O'' има координати $\left(\frac{2}{3}, 0, 0\right)$ спрямо $Ox'y'z'$, уравнението на повърхнината приема вида

$$9x''^2 - 6\sqrt{2}\,y'' - 10\sqrt{2}\,z'' + \frac{22}{3} = 0.$$

Транслацията

$$x'' = x''', \quad y'' = y''', \quad z'' = z''' + \frac{11\sqrt{2}}{30}$$

на координатната система $O''x''y''z''$ до $O'''x'''y'''z'''$, като O''' има координати $\left(0, 0, \frac{11\sqrt{2}}{30}\right)$ спрямо $O''x''y''z''$, привежда уравнението на повърхнината във вида

$$9x'''^2 - 6\sqrt{2}\,y''' - 10\sqrt{2}\,z''' = 0.$$

Полагаме

$$x''' = X,$$
$$y''' = Y\cos\varphi - Z\sin\varphi,$$
$$z''' = Y\sin\varphi + Z\cos\varphi.$$

Последното уравнение на повърхнината става

$$9X^2 - 6\sqrt{2}(Y\cos\varphi - Z\sin\varphi) - 10\sqrt{2}(Y\sin\varphi + Z\cos\varphi) = 0.$$

Ако завъртим координатната система $O'''x'''y'''z'''$ около оста $O'''x'''$ на ъгъл $\varphi = \operatorname{arc\,tg}\frac{5}{3}$, получаваме координатната система $O'''XYZ$, спрямо която уравнението на повърхнината е

$$9X^2 = 4\sqrt{17}\,Y.$$

§ 50. ЗАБЕЛЕЖИТЕЛНИ ПОВЪРХНИНИ ОТ ВТОРА СТЕПЕН

1. Елипсоид. Метричното канонично уравнение на елипсоида е

(1) $$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

За произволна точка $M(x, y, z)$ от елипсоида имаме $|x| \leqq a$, $|y| \leqq b$, $|z| \leqq c$. Очевидно елипсоидът е симетрично разположен спрямо началото на координатната система, която се явява единственият му център (черт. 65). Равнината $z = z_0$ при $|z_0| < c$ пресича елипсоида по елипсата

(2) $$k: \frac{x^2}{a'^2} + \frac{y^2}{b'^2} = 1, \quad z = z_0,$$

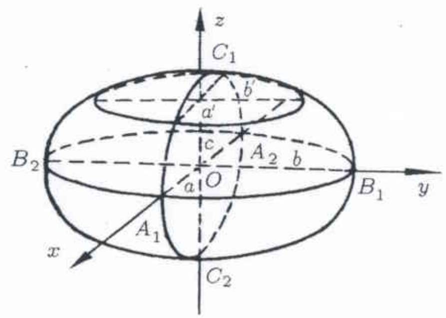
като

$$a' = a\sqrt{1 - \frac{z_0^2}{c^2}}, \quad b' = b\sqrt{1 - \frac{z_0^2}{c^2}}.$$

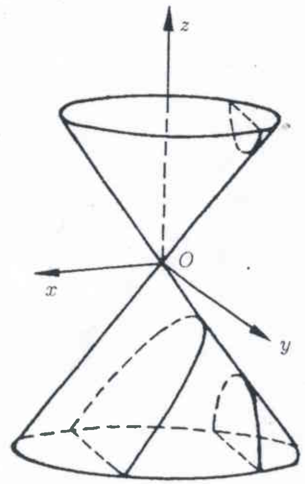
Координатните оси пресичат елипсоида в точките $A_1(a, 0, 0)$, $A_2(-a, 0, 0)$, $B_1(0, b, 0)$, $B_2(0, -b, 0)$, $C_1(0, 0, c)$, $C_2(0, 0, -c)$, които се наричат *върхове* на елипсоида. Координатните оси се наричат *оси* на елипсоида.

При $a > b > c$ елипсоидът се нарича *триосен*, като a е голяма полуос, b — средна, c — малка полуос на елипсоида.

Ако $a = b$, елипсоидът е *ротационен* (§ 27).



Черт. 65



Черт. 66

2. Конус. Каноничното уравнение на тази повърхнина е

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0. \tag{3}$$

Началото на координатната система се явява единственият (краен) център на конуса. Това е и негова особена точка. Нарича се *връх* на конуса. Оста Oz е негова *ос* (черт. 66). Всяка права през началото и точка от елипсата

$$k:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, \quad z=z_0\neq 0$$

лежи върху конуса (значи е образуваща).

Равнината $z=z_0$ пресича конуса по елипса; равнината $x=x_0$ (или $y=y_0$) го пресича по хипербола. Може да се докаже, че равнините, успоредни на образуващите на конуса, пресичат последния по параболи. Значи елипсата, хиперболата и параболата могат да се получат като сечения на конуса с равнини. Оттук и наименованието им конусни сечения (§ 24).

3. Прост хиперболоид. Каноничното уравнение на тази повърхнина е

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1. \tag{4}$$

Повърхнината е симетрично разположена спрямо началото, което е единственият (краен) център на повърхнината (черт. 67).

Равнината $z=z_0$ пресича простия хиперболоид по елипса, която при $z=0$ има уравнения

$$k:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, \quad z=0.$$

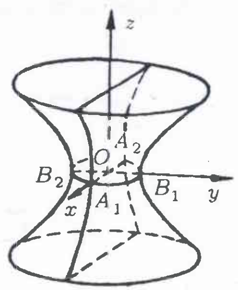
Нарича се *гърлова елипса* на хиперболоида.

Равнините $x=x_0$ или $y=y_0$ пресичат елипсоида по хиперболи.

За простия хиперболоид важи лемата от § 41. Значи тази повърхнина съдържа две системи образуващи (черт. 68).

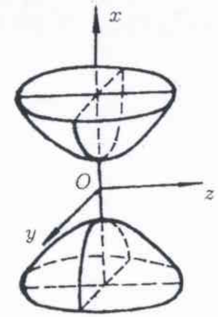
Лесно се проверява, че асимптотичният конус (2), § 46, на простия хиперболоид е тъкмо конусът с уравнение (3).

Точките $A_1(a,\,0,\,0)$, $A_2(-a,\,0,\,0)$, $B_1(0,\,b,\,0)$, $B_2(0,\,-b,\,0)$, се наричат *върхове* на простия хиперболоид. Очевидно те са върхове и на гърловата елипса. Осите Ox, Oy се наричат оси на простия хиперболоид.



Черт. 67

Черт. 68



Черт. 69

При $a=b$ се получава *ротационен прост хиперболоид* (§ 27).

4. Двоен хиперболоид. Каноничното уравнение на тази повърхнина е

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1. \tag{5}$$

Тя има единствен център — началото на координатната система. Равнината $y=y_0$ (или $z=z_0$) пресича хиперболоида по хипербола (черт. 69). Равнината $x=x_0$ при $|x|>a$ го пресича по елипса. Точките $A_1(a,\,0,\,0)$, $A_2(-a,\,0,\,0)$ се наричат *върхове* на двойния хиперболоид. Оста Ox се нарича *ос* на двойния хиперболоид.

Асимптотичният конус на тази повърхнина е

$$\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-\frac{x^2}{a^2}=0.$$

При $b=c$ се получава *ротационен двоен хиперболоид* (§ 27).

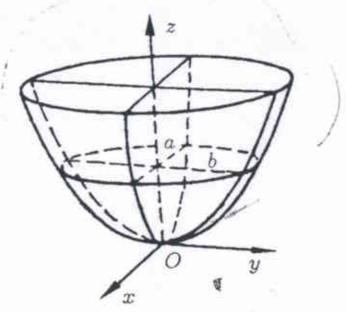
5. Елиптичен параболоид. Каноничното уравнение на тази повърхнина е

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=2z. \tag{6}$$

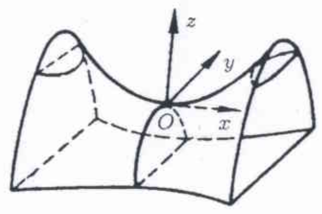
Равнината $z=z_0>0$ пресича елиптичния параболоид по елипса, а равнината $x=x_0$ (или $y=y_0$) — по парабола (черт. 70). Началото на координатната система се нарича *връх* на елиптичния параболоид (6). Оста Oz се нарича негова *ос*.

6. Хиперболичен параболоид (седло). Каноничното уравнение на тази повърхнина е

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=2z. \tag{7}$$



Черт. 70



Черт. 71

Равнината $z = z_0$ я пресича по хипербола. Равнината $y = y_0$ (или $x = x_0$) — по парабола (черт. 71). Тази повърхнина също съдържа прави линии. По-точно за нея важи лемата от § 41. Двете системи са

$$\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 2zs, \quad \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = \frac{1}{s};$$
$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 2tz, \quad \frac{x}{a} - \frac{y}{b} = \frac{1}{t}.$$

Началото O на координатната система се нарича *връх* или *седловидна точка* на хиперболичния параболоид.

§ 51. АФИННИ КАНОНИЧНИ УРАВНЕНИЯ НА ФИГУРИТЕ ОТ ВТОРА СТЕПЕН

Като се вземе предвид, че всяко метрично преобразувание е и афинно, и се използват метричните канонични уравнения на фигурите от втора степен, може да се направи пълна афинна класификация на фигурите от втора степен и да се изведат съответните афинни канонични уравнения.

Теорема 1. *Нека спрямо афинна координатна система в равнината е дадена кривата от втора степен с уравнение*

(1) $$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0.$$

С подходяща смяна на афинната координатна система уравнението на кривата може да се приведе към един от следните девет афинно нееквивалентни типа криви от втора степен:

1. $x^2 + y^2 = 1$ (*елипса*);
2. $x^2 + y^2 = -1$ (*имагинерна елипса*);
3. $x^2 - y^2 = 1$ (*хипербола*);

4. $x^2 - y^2 = 0$ (*две реални пресекателни прави*);
5. $x^2 + y^2 = 0$ (*две комплексно спрегнати пресекателни прави*);
6. $y^2 = x$ (*парабола*);
7. $y^2 = 1$ (*две реални успоредни прави*);
8. $y^2 = -1$ (*две комплексно спрегнати успоредни прави*);
9. $y^2 = 0$ (*двойна права*).

Доказателство. Нека спрямо афинна координатна система е дадена кривата с уравнение (1). С помощта на подходяща ортогонална трансформация и транслация на координатната система, които са афинни смени (и могат да се разглеждат като афинни преобразувания), уравнението на кривата приема един от видовете, посочени в теорема 2 на § 48. Да приемем, че е получена кривата с уравнение

$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = 1.$$

Ако положим

$$X = ax, \quad Y = by,$$

уравнението на кривата приема вида

$$x^2 + y^2 = 1.$$

Формулите (2) могат да се разглеждат като формули за смяна на афинната координатна система, а следователно и като формули на афинно преобразувания в равнината. Аналогично се разглеждат и другите случаи.

Уравненията в теорема 1 се наричат *афинни канонични уравнения на кривите от втора степен*. Като едно следствие от тези уравнения ще посочим всички центрове на кривите от различните типове.

Крива от тип 1, 2 или 3 има за център точно една крайна точка; крива от тип 4 или 5 има за център една крайна точка, която е пресечната точка на двете прави; крива от тип 6 има за център една безкрайна точка; крива от тип 7 или 8 има за центрове всички точки върху една права, а именно правата, която е успоредна на двете прави и отстои от тях на равни разстояния; крива от тип 9 има за център всяка своя точка.

Теорема 2. *Нека спрямо афинна координатна система в пространството е дадена повърхнината от втора степен с уравнение*

(3) $$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^3 + 2(a_{12}xy + a_{13}xz + a_{23}yz) + + 2(a_{14}x + a_{24}y + a_{34}z) + a_{44} = 0.$$