Аналитична геометрия, 31.01.2015г., устен изпит
спец. Приложна математика, Статистика
доц. Богдан Александров
Конспектът на изпита е по-надолу.

Изпит → I част 30 точки
II част 30 точки
III част 30 точки
IV част 30 точки
макс. 120 точки
за тройка 48 точки
за шестица 108 точки

I част → 2 доказателства, всяко по 15 точки
II част → 6 бр. x 5 точки → 4 дефиниции и 2 твърдения
III част → 10 бр. x 3 точки → 10 кратки задачи
Условия: верен отговор → 3 точки
непосочен, грешен или непълен отговор → 0 точки

IV част → 15 въпроса тест с единствен верен отговор.
Условия: верен отговор → +2 точки
непосочен отговор → 0 точки
грешен отговор → −2 точки
Максимум 30 точки, минимум 0 точки.

На всеки въпрос са дадени между 2 и 4 отговора.

ДСД → да се докаже
НДУ → необходими и достатъчни условия
ЛЗ → линейно зависими
ЛНЗ → линейно независими
АКС – афинна координатна система
ОКС – ортонормирана координатна система
rk – ранг на матрица

I част

1зад. Спрямо ОКС в равнината → точката $P_0(x_0, y_0)$, права l с нормално уравнение $\alpha x + \beta y + \gamma = 0$
ДСД, че разстоянието от P_0 до l е $(\alpha x_0 + \beta y_0 + \gamma)$.

2зад. Дадена е АКС $K = Oxyz$ в пространството.
ДСД, че равнина $\pi: Ax + By + Cz + D = 0$ и вектор $v(a, b, c)$ са колинеарни $\Leftrightarrow$ $Aa + Bb + Cc = 0$

II част.

Дефиниции за:
1. свободен вектор
2. АКС в пространството
3. общо уравнение на равнина
4. метрична еквивалентност на криви от II степен

Формулирайте твърдения за:
1. геометричната интерпретация на $<a, b, c>$ с обема V
2. образа на равнина при афинна трансформация в пространството

III част

① Дадено е т. $P_1(x_1, y_1, z_1)$ и т. $P_2(x_2, y_2, z_2)$.
Търси се $\overrightarrow{P_1P_2} = ?$

② формула за смяна на координатите на точка при смяна на КС с обяснение на всички елементи, участващи във формулата

③ Дадено е, че $\vec{u}$ и $\vec{v}$ са неколинеарни. Да се напише дефиниционна формула за дължината на векторното произведени

④ Дадени са АКС $K = Oxyz$, $P_0(x_0, y_0, z_0)$ и $P_1(x_1, y_1, z_1)$
Напишете параметрични уравнения спрямо K на затворената отсечка P_0P_1.

⑤ Дадени са АКС $K = Oxy$ и права $l: Ax + By + C = 0$
Напишете координатите на ненулев вектор колинеарен с l.

⑥ Дадени са АКС $K = Oxy$ и права $l: Ax + By + C = 0$
Напишете всички общи уравнения на l.

⑦ Дадени са АКС $K = Oxyz$ $l: \begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$
Напишете общи уравнения на всички равнини, които съдържат правата l.

⑧ Дадени са ОКС $K = Oxyz$ и равнина $\pi: Ax + By + Cz + D = 0$
Напишете всички нормални уравнения на π спрямо K.

⑨ Да се напише канонично метрично уравнение на хипербола.

⑩ Изображение L на пространството в себе си се задава спрямо дадена АКС с уравнение $y = s + T.x$. Какви са НДУ върху вектора $s \in \mathbb{R}^3$ и квадратна матрица T за това L да бъде афинна трансформация?

$\underline{\text{IV}}$ част ① Съществуват ли точки A и B такива, че $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BA}$ са представители на един и същи свободен вектор?
а) да б) не

(2) Ако $\overrightarrow{OA} = u$, $\overrightarrow{OB} = v$, $\lambda \in \mathbb{R}$ и $v = \lambda . u$, то е вярно, че:

а) $|OB| = \lambda |OA|$ б) $|OB| = |\lambda| . |OA|$

(3) ? ? ? ??

(4) Два вектора в пространството са колинеарни $\Leftrightarrow$ са:

а) ЛЗ б) ЛНЗ

(5) Ако $u \neq 0$, $v \neq 0$ и $u \perp v \Leftrightarrow$ а) $\langle u, v \rangle = 0$

б) $u \times v = 0$

(6) Кое е вярно за смесеното произведение?

а) $\langle u, v, w \rangle = \langle w, v, u \rangle$

б) $\langle u, v, w \rangle = - \langle w, v, u \rangle$

(7) Всяка права в равнината спрямо АКС $K = Oxy$ има уравнение $Ax + By + C = 0$, където:

а) A, B, C – произволни

б) $(A, B) \neq 0$

в) $(A, B, C) \neq 0$

(8) Дадена е АКС $K = Oxy$ и две прави

$\ell_1 : A_1 x + B_1 y + C_1 = 0$

$\ell_2 : A_2 x + B_2 y + C_2 = 0$

Тогава $\ell_1 \cap \ell_2$, когато а) $rk \begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{pmatrix} = 2$

б) $rk \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{pmatrix} = 2$

(9) Дадена е АКС $K = Oxy$. Нека $N(A, B)$ е нормален вектор за правата l. Кога $N'(-A, -B)$ също е нормален за l?

а) в ОКС б) произволна КС

(10) Дадена е АКС $K = Oxyz$. Точките $P_0(x_0, y_0, z_0)$, $P_1(x_1, y_1, z_1)$ и $P_2(x_2, y_2, z_2)$ са неколинеарни. Коя от двете тройки параметрични уравнения задава равнина през точките P_0, P_1, P_2?

$$\mathrm{I}\ \left|\begin{array}{l} x = x_1 + \lambda(x_1 - x_0) + \mu(x_2 - x_0) \\ y = y_1 + \lambda(y_1 - y_0) + \mu(y_2 - y_0) \\ z = z_1 + \lambda(z_1 - z_0) + \mu(z_2 - z_0) \end{array}\right.$$

$$\mathrm{II}\ \left|\begin{array}{l} x = x_2 + \lambda(x_1 - x_0) + \mu(x_2 - x_0) \\ y = y_2 + \lambda(y_1 - y_0) + \mu(y_2 - y_0) \\ z = z_2 + \lambda(z_1 - z_0) + \mu(z_2 - z_0) \end{array}\right.$$

а) само I
б) само II
в) и двете
г) нито едната

(11) Дадена е АКС $K = Oxyz$. Точките $P_0(x_0, y_0, z_0)$, $P_1(x_1, y_1, z_1)$ и $P_2(x_2, y_2, z_2)$ са неколинеарни. Кое е общото уравнение на равнината през трите точки?

$$\mathrm{I}\ \begin{vmatrix} x & x_0 & x_1 & x_2 \\ y & y_0 & y_1 & y_2 \\ z & z_0 & z_1 & z_2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \qquad \mathrm{II}\ \begin{vmatrix} x - x_0 & x_1 - x_0 & x_2 - x_0 \\ y - y_0 & y_1 - y_0 & y_2 - y_0 \\ z - z_0 & z_1 - z_0 & z_2 - z_0 \end{vmatrix} = 0$$

а) само I
б) само II
в) и двете
г) нито едното

(12) Дадена е АКС $K = Oxyz$, π има уравнение на $L(x,y,z) = 0$ и $L(x,y,z) = Ax + By + Cz + D$.
Нека $\{P(x,y,z) : L(x,y,z) = 0\}$ и $\{P(x,y,z) : L(x,y,z) \leq 0\}$.
Кое е затворено полупространство относно π?

а) само I
б) само II
в) и двете
г) нито едното

(13) Дадена е $K = Oxyz$ и две равнини.

$\pi : 236x + 678y - 21 = 0$

$\rho : 310x + 542y - 86 = 0$

Кое е вярно?

а) съвпадат
б) успоредни са
в) пресичат се

(14) Конично сечение с ексцентрицитет $= 0$ е:

а) окръжност
б) елипса
в) хипербола
г) парабола

(15) Права и равнина в проективното пространство винаги имат обща точка. Вярно ли е това?

а) да
б) не

Конспект по аналитична геометрия

Приложна математика, 2014-2015

1. Вектори.
2. Линейни операции с вектори.
3. Условия за колинеарност и за компланарност на вектори.
4. Координатни системи.
5. Аналитично изразяване на линейните операции с вектори.
6. Смяна на координатната система.
7. Скаларно произведение.
8. Векторно произведение.
9. Смесено произведение.
10. Параметрични уравнения на права, лъч и отсечка.
11. Общо уравнение на права в равнината. Отрезово и декартово уравнение на права в равнината.
12. Взаимно положение на две прави в равнината.
13. Полуравнини.
14. Нормално уравнение на права в равнината. Разстояние от точка до права.
15. Параметрични уравнения на равнина.
16. Общо уравнение на равнина. Отрезово и декартово уравнение на равнина.
17. Взаимно положение на две равнини.
18. Полупространства.
19. Задаване на права в пространството чрез двойка уравнения.
20. Нормално уравнение на равнина. Разстояние от точка до равнина.
21. Окръжност, сфера, елипса, хипербола, парабола.
22. Афинни трансформации и метрични трансформации.
23. Фигури от втора степен. Афинна класификация и метрична класификация на фигурите от втора степен.
24. Реално проективно пространство и реална проективна равнина.
25. Хомогенни координати.
26. Фигури от втора степен в проективното пространство и проективната равнина. Проективна класификация на фигурите от втора степен.