ЧАСТ I

Докажете следното твърдение:

1. **(16 точки)** Нека $K = Oxy$ е афинна координатна система в равнината и спрямо нея правите l_1 и l_2 имат общи уравнения $l_i : A_i x + B_i y + C_i = 0$, $i = 1, 2$. Означаваме $A = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{pmatrix}$, $\widetilde{A} = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{pmatrix}$. Тогава:

   $l_1 \parallel l_2$ и $l_1 \neq l_2 \Leftrightarrow r(A) = 1,\ r(\widetilde{A}) = 2 \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}$: $A_2 = \lambda A_1,\ B_2 = \lambda B_1$, но $C_2 \neq \lambda C_1$.

ЧАСТ II

1. Дайте дефиницията на следните понятия:

   (а) **(5 точки)** Свободен вектор.

   (б) **(5 точки)** Общо уравнение на права в равнината.

2. (а) **(5 точки)** Формулирайте твърдението за общото уравнение на равнина, зададена с точка и два вектора.

ЧАСТ III

За правилен отговор на всеки от следващите 10 въпроса получавате **3** точки, а за всеки непълен, грешен или липсващ отговор — **0** точки.

1. Нека a и b са два базиса на линейното пространство V_3 на векторите в пространството. Напишете дефиниционното условие за това a и b да са еднакво ориентирани.

2. Нека u и v са ненулеви вектори в пространството. Напишете дефиниционната формула за скаларното им произведение.

3. Спрямо афинна координатна система $K = Oxyz$ в пространството двете различни точки P_0 и P_1 имат координати $P_0(x_0, y_0, z_0)$, $P_1(x_1, y_1, z_1)$. Напишете параметрични уравнения спрямо K на затворената отсечка P_0P_1.

4. Спрямо афинна координатна система в равнината правата l има общо уравнение $l : Ax + By + C = 0$, а точките P_1 и P_2 имат координати $P_1(x_1, y_1)$ и $P_2(x_2, y_2)$. Напишете необходимо и достатъчно условие чрез координатите на P_1 и P_2 за това P_1 и P_2 да са от една и съща отворена полуравнина относно l.

5. Спрямо ортонормирана координатна система $K = Oxy$ в равнината правата l има уравнение $Ax + By + C = 0$. Напишете всички нормални уравнения на l спрямо K.

ЧАСТ IV

Всеки от следващите 15 въпроса има точно един правилен отговор. Отбележете отговора, който считате за правилен. За всеки верен отговор получавате **2** точки, за всеки грешен — $\mathbf{-2}$, а ако оставите въпроса без отговор — **0** точки. Ако на някой въпрос отбележите повече от един отговор, то се счита, че отговорът е грешен. Ако сумата на събраните от тази част точки е отрицателна, цялата част се оценява с **0** точки.

1. Всеки четири вектора в пространството са

   (а) линейно зависими.

   (б) линейно независими.

☐ а ☐ б

2. Нека спрямо афинна координатна система K в равнината векторите $u_1, \dots, u_k$ и v имат координати $u_i(x_i, y_i)$, $i = 1, \dots, k$, $v(x, y)$, а $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$. Кое от следните две твърдения е вярно?

   Ако $v = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i u_i$, то $x = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i$, $y = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i y_i$.

   Ако $x = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i$, $y = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i y_i$, то $v = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i u_i$.

   (а) Само първото.

   (б) Само второто.

   (в) И двете.

   (г) Нито едно от двете.

☐ а ☐ б ☐ в ☐ г

3. Спрямо положително ориентирана ортонормирана координатна система K в пространството векторите u и v имат координати $u(x_1, x_2, x_3)$ и $v(y_1, y_2, y_3)$. Тогава втората координата на $u \times v$ спрямо K е

   (а) $x_1 y_3 - x_3 y_1$.

   (б) $x_3 y_1 - x_1 y_3$.

☐ а ☐ б

4. За смесеното произведение на векторите u, v, w е в сила

   (а) $\langle u, v, w\rangle = \langle w, v, u\rangle$.

   (б) $\langle u, v, w\rangle = -\langle w, v, u\rangle$.

☐ а ☐ б

5. Нека спрямо афинна координатна система $K = Oxyz$ в пространството трите неколинеарни точки P_0, P_1 и P_2 имат координати $P_i(x_i, y_i, z_i)$, $i = 0, 1, 2$. Коя от двете тройки параметрични уравнения

$$\begin{cases} x = x_1 + \lambda(x_1 - x_0) + \mu(x_2 - x_0) \\ y = y_1 + \lambda(y_1 - y_0) + \mu(y_2 - y_0) \\ z = z_1 + \lambda(z_1 - z_0) + \mu(z_2 - z_0) \end{cases}, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R} \qquad \text{и}$$

$$\begin{cases} x = x_2 + \lambda(x_1 - x_0) + \mu(x_2 - x_0) \\ y = y_2 + \lambda(y_1 - y_0) + \mu(y_2 - y_0) \\ z = z_2 + \lambda(z_1 - z_0) + \mu(z_2 - z_0) \end{cases}, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

   задава равнината, определена от P_0, P_1 и P_2?

   (а) Само първата.

   (б) Само втората.

   (в) И двете.

   (г) Нито една от двете.

☐ а ☐ б ☐ в ☐ г

6. Равнините π и ρ, които спрямо афинна координатна система $K = Oxyz$ в пространството имат уравнения $\pi : 236x + 678y - 21 = 0$ и $\rho : 310x + 542y - 86 = 0$,

   (а) съвпадат.

   (б) са успоредни.

   (в) се пресичат.

☐ а ☐ б ☐ в

7. По колко начина може да се зададе права в пространството чрез двойка уравнения спрямо дадена афинна координатна система?

   (а) Един.

   (б) Два.

   (в) Безбройно много.

☐ а ☐ б ☐ в