

ЗАДАЧИ ПО АНАЛИТИЧНА ГЕОМЕТРИЯ

IV ЧАСТ: Уравнения на права в равнината.

Всички задачи от тази част са зададени спрямо ОКС $K = Oxy$ в равнината.

1 зад. Дадени са точките : $A(5, 1)$, $B(3, 3)$ и $C(-1, 5)$. Да се намерят:

- Уравнения на симетралите на страните AB и AC на триъгълник ABC ;
- Координатите на центъра на описаната около триъгълник ABC окръжност (пресечната точка на симетралите);
- Дължината на радиуса на описаната около триъгълник ABC окръжност (разстоянието от центъра до произволен връх на триъгълника).

2 зад. Дадени са правите: $a: 3x - 2y + 1 = 0$, $b: x - y + 1 = 0$ и $m_B: 2x - y - 1 = 0$. Нека правите a и b съдържат съответно страните BC и AC на триъгълник ABC , а правата m_B съдържа медианата му през върха B . Да се намерят координатите на върховете и лицето на триъгълник ABC .

3 зад. Дадени са точките : $A(1, 2)$, $B(-2, 1)$ и $C(-1, -2)$. Да се намерят:

- Уравнения на правите, които съдържат средните отсечки на триъгълник ABC ;
- Уравнения на височините на триъгълник ABC ;
- Дължината на медианата AA_1 на триъгълник ABC .

4 зад. Дадени са правите: $g: 2x - 3y + 1 = 0$, $a: x + 5y + 7 = 0$ и точката $P(2, 6)$. Светлинен лъч l минава през точката P , отразява се от правата g и отразеният лъч l' става успореден на правата a . Да се намерят уравнения на правите, съдържащи лъчите l и l' .

5 зад. Дадени са правите: $b_A: 4x - 3y + 2 = 0$, $h_A: x + 3y + 8 = 0$ и точката $B(-3, 5)$. Да се намерят координатите на върховете A и C на триъгълник ABC , ако правите b_A и h_A съдържат съответно вътрешната ъглополовяща и височината през върха A на триъгълника.

6 зад. Дадени са правите: $g: 2x - y - 5 = 0$ и $b: 3x - y - 1 = 0$. Да се намери уравнение на правата b' , ортогонално симетрична на правата b относно правата g .

V ЧАСТ: Уравнения на права и равнина в пространството

Всички задачи от тази част са зададени спрямо ОКС $K = Oxyz$ в тримерно пространство.

1 зад. Да се намери общо уравнение на равнина, която минава през точките M, N и P , ако:

$$M(-1, 0, 1), N(0, -1, 1), P(2, 3, 3).$$

2 зад. Да се намери общо уравнение на равнина, която минава през точката P и правата g , ако:

$$P(-2, -1, 2), \quad g \begin{cases} x = 4 + s \\ y = 3 + s, s \in \mathbb{R}. \\ z = 2 + s \end{cases}$$

3 зад. Да се намери общо уравнение на равнина, която минава през пресичащите се прави a и b ,

$$\text{ако: } a \begin{cases} x = -2 + s \\ y = 2 + s, s \in \mathbb{R}, \\ z = 1 - s \end{cases}, \quad b \begin{cases} x = 0 + 2p \\ y = 4 + 2p, p \in \mathbb{R}. \\ z = 4 + 3p \end{cases}$$

4 зад. Да се намери общо уравнение на равнина, която минава правата a и е успоредна на

$$\text{правата } b, \text{ ако: } a \begin{cases} x = 1 - s \\ y = 2 - s, s \in \mathbb{R}, \\ z = 1 + s \end{cases}, \quad b \begin{cases} x = 5 + 2p \\ y = 4 + 3p, p \in \mathbb{R}. \\ z = 3 - 3p \end{cases}$$

5 зад. Да се намери общо уравнение на равнина, която минава през правата g и е перпендикулярна на равнината β , ако:

$$g \begin{cases} x = 4 + s \\ y = 3 + s, s \in \mathbb{R}, \\ z = 2 + s \end{cases}, \quad \beta: x + y - 2z + 2 = 0.$$

6 зад. Да се намерят координатни параметрични уравнения на правата g , която е зададена като

$$\text{пресечница на две равнини: } g \begin{cases} 2x + y + z - 7 = 0 \\ x - y + 2z - 5 = 0 \end{cases}$$

7 зад. Дадени са точката $M(-1, 1, 2)$ и правата $a \begin{cases} x - y + 1 = 0 \\ x - z - 2 = 0 \end{cases}$.

- Да се намерят координатни параметрични уравнения на правата g , която е успоредна на правата a и минава през точката M ;
- Да се намери разстоянието от точката M до правата a ;
- Да се намерят координатите на точката M' , ортогонално симетрична на точката M относно правата a .

8 зад. Дадени са точките $A(3, 4, 0)$ и $B(3, 3, -2)$, и равнината $\beta: x + 2y - z + 1 = 0$. Светлинен лъч минава през точката A , отразява се от равнината β и отразеният лъч минава през точката B . Да се намерят уравнения на правите, съдържащи падащия и отразения лъчи.

9 зад. Дадени са равнината $\alpha: x - 2y + 5z - 2 = 0$ и правата $b \begin{cases} x = 2 - 3s \\ y = 0 + 1s, s \in \mathbb{R} \\ z = 6 - 5s \end{cases}$. Да се намерят уравнения на правата b' , ортогонално симетрична на b относно равнината α .

10 зад. Дадени са правите: $a \begin{cases} x = 2 + 0s \\ y = -3 - 1s, s \in \mathbb{R} \\ z = 1 + 1s \end{cases}$, $b \begin{cases} x = -2 + 2p \\ y = 1 - 1p, p \in \mathbb{R} \\ z = -5 - 1p \end{cases}$.

- Да се докаже, че правите a и b са кръстосани;
- Да се намерят уравнения на оста на кръстосаните прави a и b ;
- Ако точките A и B са краищата на оста-отсечка на кръстосаните прави a и b , а т. $O(0, 0, 0)$ е началото на координатната система, да се намери лицето на триъгълник OAB .

11 зад. Дадени са кръстосаните прави: $a \begin{cases} x = 1 + 1s \\ y = 0 + 1s, s \in \mathbb{R} \\ z = 0 \end{cases}$, $b \begin{cases} x = 0 - 1p \\ y = 1 - 1p, p \in \mathbb{R} \\ z = 2 + 2p \end{cases}$ и равнината

$\beta: x + y - 1 = 0$. Нека точките $A \in a$ и $B \in b$ са краищата на оста-отсечка на правите a и b , а точките C и D са прободните точки съответно на правите a и b с равнината β . Да се намери обемът на тетраедъра $ABCD$.

12 зад. Дадени са точките $A(0, 0, -1)$ и $B(-2, -8, -3)$, равнината $\beta: 3x + 4y - z + 1 = 0$ и

правата $b \begin{cases} x = 3 + 3s \\ y = -8 + 1s, s \in \mathbb{R} \\ z = 1 - 1s \end{cases}$. Да се намерят:

- Уравнение на равнината γ , която минава през точките A и B , и е перпендикулярна на равнината β ;
- Координатни параметрични уравнения на пресечницата g на равнините β и γ ;
- Разстоянието от точката B до правата g .

V ЧАСТ: Криви от втора степен

1 зад. Спрямо ОКС $K = Oxy$ в равнината са дадени следните криви от II степен с техни метрични канонични уравнения:

$$\varepsilon_1: \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1, \quad \varepsilon_2: \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1, \quad \chi_1: \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1, \quad \chi_2: \frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{16} = 1,$$

$$\pi_1: y^2 = 8x, \quad \pi_2: x^2 = 12y.$$

- Да се намерят координатите на върховете и уравненията на върховете допирателни на всяка от кривите;
- Да се намерят координатите на фокусите и уравненията на директрисите на всяка от кривите.

2 зад. Спрямо ОКС $K = Oxy$ в равнината да се намери:

- a) Уравнение на допирателната t_0 към кривата $\varepsilon: \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{4} = 1$ в нейната точка $M_0(1, \sqrt{2})$;
b) Уравнение на допирателната t_0 към кривата $\chi: \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{3} = 1$ в нейната точка $M_0(2\sqrt{3}, 1)$;
c) Уравнение на допирателната t_0 към кривата $\pi_1: y^2 = 8x$ в нейната точка $M_0(2, 4)$.

ВСИЧКИ ЗАДАЧИ ДО 10-та СА В РАЗШИРЕНА ЕВКЛИДОВА РАВНИНА,

В ХОМОГЕННИ КООРДИНАТИ.

3 зад. Дадени са точките $A(1, 2, 1)$ и $B(2, -1, 2)$. Да се намери уравнение на правата AB . Да се намерят координатите на безкрайната точка на правата AB .

4 зад. Да се определи типът на кривите от втора степен според броя на особените и безкрайните им точки:

- a) $x^2 - 2xy + 2y^2 - 4xt - 6yt + 3t^2 = 0$;
b) $x^2 - 2xy - 2y^2 - 4xt - 6yt + 3t^2 = 0$;
c) $x^2 - 2xy + y^2 - 4xt - 6yt + 3t^2 = 0$.

5 зад. При кои стойности на параметъра λ кривата $k: x^2 + 2\lambda xy - y^2 + 5xt - 9t^2 = 0$ минава през безкрайната точка на правата $a: 2x - y + 7t = 0$.

6 зад. Дадени са кривата от втора степен $k: 4x^2 - 2xy - 3y^2 - 12xt + 10yt + 8t^2 = 0$ и правата $a: 2x - y - 2t = 0$. Да се намерят уравнения на допирателните към кривата k в пресечните и точки с дадената права.

7 зад. Дадени са кривата от втора степен $k: 4x^2 - 2xy - 3y^2 - 12xt + 10yt + 8t^2 = 0$ и точката $M(5, 2, 1)$ – външна за кривата. Да се намерят уравнения на двете допирателни към кривата, които минават през дадената точка M .

8 зад. Да се намерят координатите на центровете на следните криви от втора степен:

- a) $2x^2 - 4xy - 3y^2 + 2xt + 6yt - 5t^2 = 0$;
b) $x^2 - 2xy + y^2 - 2xt + 4yt + 7t^2 = 0$.

9 зад. Да се намерят уравнения на асимптотите на кривата

$$k: 10x^2 + 21xy + 9y^2 - 41xt - 39yt + 4t^2 = 0.$$

10 зад. Спрямо ОКС $K = Oxy$ в равнината са дадени кривите от втора степен с уравнения:

- a) $6xy + 8y^2 - 12x - 26y + 11 = 0$;
b) $9x^2 + 18xy + 9y^2 - 42x - 30y + 9 = 0$.

Да се намери метрично канонично уравнение на всяка от кривите, както и последователните координатни трансформации, водещи до него.