Системи линейни уравнения с *Mathematica*

Вградената функция *Solve* намира решението на уравнение или система от уравнения.

Solve[{списък с уравненията в системата, разделени със запетая},{списък с неизвестните}]

Съвместими определени системи

Решете системата линейни уравнения

$$\left|\begin{array}{l} x + 2z = 2 \\ 5x + 2y + 2z = 2 \\ 3x - y + 4z = 1 \end{array}\right. \tag{1}$$

```
In[14]:= Solve[{x + 2 z == 2, 5 x + 2 y + 2 z == 2, 3 x - y + 4 z == 1}, {x, y, z}]
```

$$\text{Out[14]=}\ \left\{\left\{x \to -1,\ y \to 2,\ z \to \frac{3}{2}\right\}\right\}$$

Системата има единствено решение $(x = -1, y = 2, z = \frac{3}{2})$.

Същата система може да се реши като матрично уравнение от вида $AX = B$, където A е основната матрица на системата, B е стълбът със свободните членове, а X е стълбът с неизвестните. За тази цел може да се използва вградената функция *LinearSolve*.

LinearSolve[A,B]

```
In[23]:= A = {{1, 0, 2}, {5, 2, 2}, {3, -1, 4}}
         B = {{2}, {2}, {1}}
         A // MatrixForm
         B // MatrixForm

Out[23]= {{1, 0, 2}, {5, 2, 2}, {3, -1, 4}}

Out[24]= {{2}, {2}, {1}}
```

Out[25]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 5 & 2 & 2 \\ 3 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

Out[26]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

```
In[27]:= LinearSolve[A, B] // MatrixForm
```

Out[27]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

Съвместими неопределени системи

Решете системата линейни уравнения

$$\left| \begin{array}{l} x - y + 2z + t = 7 \\ 2x + y + z - t = 1 \\ x - y - z + t = 0. \end{array} \right. \tag{2}$$

```
In[1]:= Solve[{x - y + 2 z + t == 7, 2 x + y + z - t == 1, x - y - z + t == 0}, {x, y, z, t}]

        Solve::svars : Equations may not give solutions for all "solve" variables. >>

Out[1]= {{x → 1/3, y → -2 + t, z → 7/3}}
```

Системата е съвместима и неопределена, в което се убеждаваме, сравнявайки ранговете на основната матрица a и разширената матрица b.

```
In[2]:= a = {{1, -1, 2, 1}, {2, 1, 1, -1}, {1, -1, -1, 1}}
        a // MatrixForm

Out[2]= {{1, -1, 2, 1}, {2, 1, 1, -1}, {1, -1, -1, 1}}

Out[3]//MatrixForm=
```

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

```
In[4]:= b = {{1, -1, 2, 1, 7}, {2, 1, 1, -1, 1}, {1, -1, -1, 1, 0}}

In[5]:= b // MatrixForm

Out[5]//MatrixForm=
```

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & 7 \\ 2 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

```
In[12]:= MatrixRank[a]

Out[12]= 3

In[13]:= MatrixRank[a] == MatrixRank[b]

Out[13]= True
```

Следователно системата има безброй много решения от вида $(x = \frac{1}{3}, y = -2 + t, z = \frac{7}{3}, t)$, зависещи от един реален параметър t.

Несъвместими системи

Решете системата линейни уравнения

$$\left| \begin{array}{l} x + y = 0 \\ x - y = 0 \\ x + y = 1. \end{array} \right. \tag{3}$$

```
In[28]:= Solve[{x + y == 0, x - y == 0, x + y == 1}, {x, y}]

Out[28]= {}
```

Празните скоби $\{\}$ показват, че множеството от решения на системата е празно, т.е. тя е несъвместима.

Системи хомогенни линейни уравнения

Решете системата хомогенни линейни уравнения и посочете една нейна фундаментална система решения

$$\left| \begin{aligned} & x + y + z = 0 \\ & x + 2y - z = 0. \end{aligned} \right. \tag{4}$$

```
In[29]:= Solve[{x + y + z == 0, x + 2 y - z == 0}, {x, y, z}]

         Solve::svars : Equations may not give solutions for all "solve" variables. >>

Out[29]= {{x → -3 z, y → 2 z}}
```

Системата е неопределена и решенията ѝ зависят от един параметър $(x = -3z, y = 2z, z)$, $z \in \mathbb{R}$.

За намирането на една фундаментална система решения използваме вградената функция *NullSpace*[M], където M е основната матрица на системата.

```
In[30]:= M = {{1, 1, 1}, {1, 2, -1}}
         M // MatrixForm
         NullSpace[M]

Out[30]= {{1, 1, 1}, {1, 2, -1}}

Out[31]//MatrixForm=
         ( 1  1   1 )
         ( 1  2  -1 )

Out[32]= {{-3, 2, 1}}
```

Следователно една фундаментална система решения се състои от вектора $(-3, 2, 1)$, получен от общото решение чрез заместване на параметъра z със стойност 1.