Линейна алгебра и аналитична геометрия със система *Mathematica*

Координатни системи

Пример

Дадени са точките $A(2,1,1)$, $B(4,-2,1)$, $M(0,1,0)$, $P(2,2,0)$, $Q(1,0,1)$. Докажете, че правата AB пресича равнината MPQ и намерете координатите на пресечната им точка H.

Въвеждаме координатите на 5-те точки и пресмятаме координатите на насочените отсечки $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{MP}$ и $\overrightarrow{MQ}$.

Пример

```
In[1]:= A = {2, 1, 1}
        B = {4, -2, 1}
        M = {0, 1, 0}
        P = {2, 2, 0}
        Q = {1, 0, 1}

Out[1]= {2, 1, 1}

Out[2]= {4, -2, 1}

Out[3]= {0, 1, 0}

Out[4]= {2, 2, 0}

Out[5]= {1, 0, 1}

In[6]:= AB = B - A
        MP = P - M
        MQ = Q - M

Out[6]= {2, -3, 0}

Out[7]= {2, 1, 0}

Out[8]= {1, -1, 1}
```

Пример

Правата AB пресича равнината MPQ, точно когато тя е линейно независима (некомпланарна) с нея, т.е. точно когато насочените отсечки $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{MP}$ и $\overrightarrow{MQ}$ са линейно независими. Разполагайки с техните координати, проверяваме за линейна независимост по познатия от предходната тема начин.

```
In[9]:= Solve[x*AB + y*MP + z*MQ == {0, 0, 0}, {x, y, z}]

Out[9]= {{x → 0, y → 0, z → 0}}
```

Тъй като само нулевата линейна комбинация на тези три насочени отсечки е равна на нулевия вектор, то те са линейно независими и следователно AB пресича равнината MPQ.

Пример

За намирането на координатите на пресечната точка H ще сравним два израза за координатите на насочената отсечка $\overrightarrow{AH}$. От една страна $\overrightarrow{AH} = x\overrightarrow{AB}$, тъй като насочените отсечки $\overrightarrow{AH}$ и $\overrightarrow{AB}$ са колинеарни. А от друга, $\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MH}$ съгласно правилото на триъгълника за събиране на насочени отсечки. Като отчетем, че $\overrightarrow{MH}$ е компланарна с равнината MPQ и следователно е линейна комбинация на $\overrightarrow{MP}$ и $\overrightarrow{MQ}$ (една база на тази равнина), получаваме второ представяне за $\overrightarrow{AH}$, а именно $\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{AM} + y\overrightarrow{MP} + z\overrightarrow{MQ}$. С помощта на *Mathematica* намираме тройката стойности за коефициентите x, y, z, за които двете представяния на $\overrightarrow{AH}$ са равни. Това е показано на първите два реда на следващия слайд (редовете след In[10]), а полученият резултат е $x = \frac{1}{8}$, $y = \frac{5}{8}$, $z = 1$ (Out[11]).

Пример

```
In[10]:= AM = M - A
         s = Solve[x * AB == AM + y * MP + z * MQ, {x, y, z}]
         x = First[x /. s]
         AH = x * AB
         H = A + AH
```

Out[10]= $\{-2, 0, -1\}$

Out[11]= $\left\{\left\{x \to \frac{1}{8}, y \to \frac{5}{8}, z \to 1\right\}\right\}$

Out[12]= $\frac{1}{8}$

Out[13]= $\left\{\frac{1}{4}, -\frac{3}{8}, 0\right\}$

Out[14]= $\left\{\frac{9}{4}, \frac{5}{8}, 1\right\}$

Пример

За да използваме резултата, който ни връща вградената функция Solve, правим следното. Означаваме резултата от Solve, т.е. наредената тройка стойности за неизвестните x, y, z, с нова величина s. За да намерим координатите на точката H, трябва да извлечем стойността за x от s и да я заместим в $\overrightarrow{AH} = x\overrightarrow{AB}$ (или стойностите за y и z и да ги заместим в $\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{AM} + y\overrightarrow{MP} + z\overrightarrow{MQ}$).

В третия ред на предходния слайд чрез командата `x=First[x/.s]` (или еквивалентно `x=x/.s[[1]]`) правим именно това – извличаме от s първата (и в случая единствената) получена стойност за неизвестното x. Out[12] ни показва, че $x = \frac{1}{8}$.

След това намираме координатите на $\overrightarrow{AH}$. А в последния въведен ред, чрез правилото на триъгълника пресмятаме координатите на точка H (т.е. на нейния радиус-вектор).

Окончателно $H(\frac{9}{4}, \frac{5}{8}, 1)$.

Литература

1. М. Маринов, *Матрично смятане с Mathematica*, Издателство на Нов български университет, 2008.

2. Д. Мекеров, М. Манев, *Учебно помагало по дисциплината ЛААГ*, Макрос, 2009.

3. C. Knoll, C. Martinez-Garza, *Mathematica Technology Resource Manual*, Wiley, 2003.

4. `http://www.wolfram.com/mathematica/`