Примерни задачи по Линейна алгебра за спец. Математика, Приложна математика, Статистика, I курс, 2014-2015 уч.г.

1 Метод на Гаус-Жордан. Матрици. Детерминанти.

Задача 1 *Да се извършат означените действия:*

$$\text{(i)}\quad (2+i)^2+(2-i)^2;\quad \text{(ii)}\quad (1+2i)^3-(1-2i)^3;\quad \text{(iii)}\quad \frac{1+i\tan(\alpha)}{1-i\tan(\alpha)};$$

$$\text{(iv)}\quad \frac{(1+2i)^2-(2-i)^3}{(1-i)^3+(2+i)^2};\quad \text{(v)}\quad \left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{3k+2}, k\in\mathbb{Z};$$

$$\text{(vi)}\quad \left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{6k}, k\in\mathbb{Z};\quad \text{(vii)}\quad \sqrt{2i};\quad \text{(viii)}\quad \sqrt{3-4i};$$

$$\text{(ix)}\quad \sqrt[3]{-27};\quad \text{(x)}\quad \sqrt[4]{16}.$$

Отговори: (i) 6; (ii) $-4i$; (iii) $\cos(2\alpha)+i\sin(2\alpha)$; (iv) $5+5i$; (v) $-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$; (vi) 1; (vii) $\pm(1+i)$; (viii) $\pm(2-i)$; (ix) $\frac{3}{2}\pm i\frac{3\sqrt{3}}{2}$, -3; (x) ± 2, $\pm 2i$.

Задача 2 *Нека n, m са естествени числа, n не дели m, а $\omega_k=\cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right)+i\sin\left(\frac{2k\pi}{n}\right)$ за $0\le k\le n-1$ са n-тите корени на единицата. Да се докаже, че*

$$\omega_0^m+\omega_1^m+\ldots+\omega_{n-1}^m=0.$$

Задача 3 *За $x\notin 2\pi\mathbb{Z}$ да се докаже, че:*

$$\cos x+\cos(2x)+\ldots\cos(nx)=\frac{\sin\left(\frac{nx}{2}\right)\cos\left(\frac{(n+1)x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}\quad и$$

$$\sin x+\sin(2x)+\ldots\sin(nx)=\frac{\sin\left(\frac{nx}{2}\right)\sin\left(\frac{(n+1)x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}.$$

Задача 4 *Да се решат системите линейни уравнения:*

$$
\text{(i)} \quad \left| \begin{array}{llll} x_1 & +x_2 & +2x_3 & = 8 \\ -x_1 & -2x_2 & +3x_3 & = 1 \\ 3x_1 & -7x_2 & +4x_3 & = 10 \end{array} \right. \qquad \text{(ii)} \quad \left| \begin{array}{lllll} x_1- & x_2 & +2x_3 & -x_4 & = -1 \\ 2x_1 & +x_2 & -2x_3 & -2x_4 & = -2 \\ -x_1 & +2x_2 & -4x_3 & +x_4 & = 1 \\ 3x_1 & & & -3x_4 & = -3 \end{array} \right. ;
$$

$$
\text{(iii)} \quad \left| \begin{array}{llll} & -2x_2 & +3x_3 & = 1 \\ 3x_1 & +6x_2 & -3x_3 & = -2 \\ 6x_1 & +6x_2 & +3x_3 & = 5 \end{array} \right. .
$$

Отговори: (i) $(3, 1, 2)$; (ii) $(x_4 - 1, 2x_3, x_3, x_4)$ за произволни x_3, x_4; (iii) системата няма решение.

Задача 5 *Да се решат системите линейни уравнения в зависимост от стойностите на участващите параметри* $a, b_1, b_2, b_3 \in \mathbb{C}$*:*

$$
\text{(i)} \quad \left| \begin{array}{llll} (1-3a)x_1 & +3x_2 & +x_3 & = 0 \\ 2x_1 & +5x_2 & -x_3 & = 8a \\ 3x_1 & 7x_2 & -7x_3 & = 6a \end{array} \right. ; \qquad \text{(ii)} \quad \left| \begin{array}{lllll} & & x_3 & +x_4 & = b_1 \\ & x_2 & & +x_4 & = b_2 \\ x_1 & & & x_4 & = b_3 \\ ax_1 & +ax_2 & +ax_3 & -x_4 & = 0 \end{array} \right. .
$$

Отговори: (i) Ако $a = 0$, то системата е несъвместима. За $a \neq 0$ системата има единствено решение

$$
\left(\frac{4}{3a} - 26a, \quad 12a - \frac{11}{21a}, \frac{1}{21a} \right).
$$

(ii) Ако $a = -\frac{1}{3}$ и $b_1 + b_2 + b_3 \neq 0$, то системата е несъвместима. Ако $a = -\frac{1}{3}$ и $b_1 + b_2 + b_3 = 0$, то системата има решения $(b_3 - x_4, \ \ b_2 - x_4, \ \ b_1 - x_4, \ \ x_4)$ за произволни x_4. За $a \neq -\frac{1}{3}$ системата има единствено решение

$$
\left(\frac{b_3 + a(-b_1 - b_2 + 2b_3)}{3a+1}, \quad \frac{b_2 + a(-b_1 + 2b_2 - b_3)}{3a+1}, \quad \frac{b_1 + a(2b_1 - b_2 - b_3)}{3a+1} \right).
$$

Задача 6 *Да се пресметнат детерминантите*

$$
(i) \quad \begin{vmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha \\ \sin\beta & \cos\beta \end{vmatrix}; \quad (ii) \quad \begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}; \quad (iii) \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 0 & 0 \\ 11 & 12 & 0 & 0 \end{vmatrix}.
$$

Задача 7 *Да се пресметнат детерминантите:*

$$(i)\ \begin{vmatrix} x & y & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & x & y & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x & y \\ y & 0 & 0 & \dots & 0 & x \end{vmatrix}; \quad (ii)\ \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & x_1 & 1 \\ 1 & 1 & \dots & x_2 & 1 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_n & 1 \dots & 1 & 1 & 1 & \end{vmatrix};$$

$$(iii)\ \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & n \\ 1 & 3 & 3 & 4 & \dots & n \\ 1 & 2 & 5 & 4 & \dots & n \\ 1 & 2 & 3 & 7 & \dots & n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & 2n-1 \end{vmatrix}; \quad (iv)\ \begin{vmatrix} x_1 & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ x_1 & x_2 & a_{23} & \dots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ x_1 & x_2 & x_3 & \dots & a_{3,n-1} & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_1 & x_2 & x_3 & \dots & x_{n-1} & a_{n-1,n} \\ x_1 & x_2 & x_3 & \dots & x_{n-1} & x_n \end{vmatrix};$$

$$(v)\ \textit{(Пачи крак)} \begin{vmatrix} a_0 & b_1 & b_2 & \dots & b_{n-1} & b_n \\ c_1 & a_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ c_2 & 0 & a_2 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n-1} & 0 & 0 & \dots & a_{n-1} & 0 \\ c_n & 0 & 0 & \dots & 0 & a_n \end{vmatrix}; \quad (vi)\ \begin{vmatrix} a_1 & x & x & \dots & x & x \\ x & a_2 & x & \dots & x & x \\ x & x & a_3 & \dots & x & x \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x & x & x & \dots & a_{n-1} & x \\ x & x & x & \dots & x & a_n \end{vmatrix};$$

$$(vii)\ \begin{vmatrix} a_1+b_1 & a_1+b_2 & \dots & a_1+b_n \\ a_2+b_1 & a_2+b_2 & \dots & a_2+b_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_n+b_1 & a_n+b_2 & \dots & a_n+b_n \end{vmatrix}; \quad (viii)\ \begin{vmatrix} 1+x_1y_1 & 1+x_1y_2 & \dots & 1+x_1y_n \\ 1+x_2y_1 & 1+x_2y_2 & \dots & 1+x_2y_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1+x_ny_1 & 1+x_ny_2 & \dots & 1+x_ny_n \end{vmatrix}.$$

Задача 8 *Да се пресметнат детерминнатите Δ_n от n-ти ред чрез извеждане на рекурентни зависимости от втора степен:*

$$(i)\quad \Delta_n = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 2 \end{vmatrix}; \quad (ii)\quad \Delta_n = \begin{vmatrix} 7 & 5 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 2 & 7 & 5 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 7 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 7 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2 & 7 \end{vmatrix};$$

$$(iii)\Delta_n = \begin{vmatrix} x+y & x & 0 & \dots & 0 & 0 \\ y & x+y & x & \dots & 0 & 0 \\ 0 & y & x+y & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x+y & x \\ 0 & 0 & 0 & \dots & y & x+y \end{vmatrix};$$

$$(iv)\Delta_n = \begin{vmatrix} x+y & 2x & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \frac{y}{2} & x+y & 2x & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \frac{y}{2} & x+y & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x+y & 2x \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{y}{2} & x+y \end{vmatrix}.$$

Задача 9 *Да се пресметнат детерминантите Δ_n чрез преставяне като произведение на две други подходящи детерминанти, ако*

$$(i) \quad \Delta_n = \det(\sin(\alpha_i + \beta_j))_{i,j=1}^n; \quad (ii) \quad \Delta_n = \det\left(\frac{1 - a_i^n b_j^n}{1 - a_i b_j}\right)_{i,j=1}^n;$$

$$(iii) \quad \Delta_{n+1} = \det((a_i + b_j)^n)_{i,j=0}^n.$$

Задача 10 *Да се решат матричните уравнения:*

$$(а) \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix};$$

$$(б) \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -5 \end{pmatrix} Y = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix};$$

$$(в) \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -5 \end{pmatrix} Z = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix};$$

Упътване: Когато матричният коефициент е необратим, разпишете матричното уравнение като система линейни уравнения за елементите на неизвестната матрица.

Отговори:

$$\text{(а) } X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -6 \\ 1 & -4 \end{pmatrix};$$

(б) Матричното уравнение е еквивалентно на

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & -7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \\ y_{31} & y_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$$

и има решение

$$Y = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4}y_{31} + \frac{3}{4} & -\frac{1}{4}y_{32} \\ \frac{7}{4}y_{31} - \frac{1}{4} & \frac{7}{4}y_{32} + 1 \\ y_{31} & y_{32} \end{pmatrix}$$

за произволни y_{31}, y_{32}.

(в) Матричното уравнение е еквивалентно на

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & -7 \\ 0 & 4 & -7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \\ y_{31} & y_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$$

и няма решение, защото вторият и третият ред на лявата страна съвпадат, докато вторият ред е различен от третия в дясната страна.

Задача 11 *Да се намери обратната A^{-1} на матрицата*

$$(i) \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \in M_{4\times 4}(\mathbb{Q}); \qquad (ii) \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \in M_{4\times 4}(\mathbb{Q});$$

$$(iii) \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 1 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix} \in M_{n\times n}(\mathbb{Q}).$$

Отговори:

$$(i) \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}; \quad (ii) \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 \\ 4 & -1 & -8 & 13 \\ 1 & 0 & -2 & 3 \\ -3 & 1 & 5 & -8 \end{pmatrix};$$

(iii) Ако редовете на A от втори до n-ти се заменят с разликите на първия ред с тези редове, а така модифицираните редове се извадят от първия, получаваме единичната матрица. Прилагането на същите елементарни преобразувания към единичната матрица дава

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 2-n & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 0 & 0 & \dots & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

2 Линейни пространства

Задача 12 *Кои от следните подмножества на $\mathbb{Q}^2$ са подпространства:*

$$M_1 = \{(x, y) \in \mathbb{Q}^2 \ \mid \ x = 2y\},$$

$$M_2 = \{(x, y) \in \mathbb{Q}^2 \ \mid \ x = 2y, \ \ 2x = y\},$$

$$M_3 = \{(x, y) \in \mathbb{Q}^2 \ \mid \ x = 2y + 1\},$$

$$M_4 = \{(x, y) \in \mathbb{Q}^2 \ \mid \ xy = 0\}.$$

Решение: Подмножеството M_1 е подпространство съгласно $(2y_1 + 2y_2, y_1 + y_2) \in M_1$ за произволни $(2y_1, y_1), (2y_2, y_2) \in M_1$ и $q(2y_1, y_1) = (2(qy_1), qy_1) \in M_1$ за $\forall q \in \mathbb{Q}$, $\forall (2y_1, y_1) \in M_1$.

Подмножеството $M_2 = \{(0, 0)\} \subset \mathbb{Q}^2$ е подпространство.

Множеството M_3 не е подпространство на $\mathbb{Q}^2$, защото сумата на $(2y_1 + 1, y_1) \in M_3$ и $(2y_2 + 1, y_2) \in M_3$ е $(2(y_1 + y_2) + 2, (y_1 + y_2)) \not\in M_3$ и $q(2y_1 + 1, y_1) = (2(qy_1) + q, qy_1) \not\in M_3$ за $q \in \mathbb{Q} \setminus \{1\}$.

За $\forall (x, y) \in M_4$ и $\forall q \in \mathbb{Q}$ е в сила $q(x, y) = (qx, qy) \in M_4$, защото $(qx)(qy) = q^2(xy) = 0$. Но M_4 не е подпространство на $\mathbb{Q}^2$, защото $(1, 0), (0, 1) \in M_4$ и $(1, 0) + (0, 1) = (1, 1) \not\in M_4$. $\square$

Задача 13 *Подмножеството E на поле F е подполе, ако E съдържа поне два елемента и E е затворено относно събиране, изваждане, умножение и деление с ненулев елемент. Да се докаже, че:*

(i) ако E е подполе на поле F, то F е линейно пространство над E;

(ii) множеството $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) = \{a + b\sqrt{2} \,|\, a, b \in \mathbb{Q}$ е числово поле;

(iii) $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ е линейно пространство над $\mathbb{Q}$.

Задача 14 *Нека F е поле, а $F[x]$ е множеството на полиномите на x с коефициенти от F. Да се докаже, че:*

(i) $F[x]$ е линейно пространство над F относно обичайните операции събиране на полиноми и умножение на полином с число;

(ii) множеството $F^{(n+1)}[x] = \{f(x) \in F[x] \,|\, \deg(f) \leq n\}$ на полиномите от степен не по-голяма от n е подпространство на $F[x]$;

(iii) множеството $U = \{f(x) \in F[x] \,|\, f(1) = 0\}$ на полиномите, анулиращи се в $1 \in F$ е подпространство на $F[x]$;

(iv) за числово поле F, множеството $V = \{f(x) \in F[x] \,|\, f(0) = 1\}$ на полиномите, приемащи стойност 1 в $0 \in F$ не е подпространство на $F[x]$;

(v) за произволни константи $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in F$ множеството

$$W = \{f(x) \in F[x] \,|\, f(\lambda_1) + f(\lambda_2) + \ldots + f(\lambda_k) = 0\}$$

е подпространство на $F[x]$;

(vi) за произволни константи $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in F$ *множеството*

$$T = \{f(x) \in F[x] \,|\, f(\lambda_1) = f(\lambda_2) = \ldots = f(\lambda_k) = 0\}$$

е подпространство на $F[x]$.

Задача 15 *Нека* V *е множеството на всички безкрайни редици с елементи от поле* F. *Да се докаже, че:*

(i) V *е линейно пространство над* F *относно покомпонентно определените събиране на редици и умножение на редица с* $\lambda \in F$;

(ii) подмножеството $V_o \subset V$ *на финитните редици (т.е. на редиците с най-много краен брой ненулеви членове) е подпространство на* V;

(iii) подмножеството $A \subset V$ *на аритметичните прогресии е подпространство на* V;

(iv) подмножеството $G \subset V$ *на геометричните прогресии не е подпространство на* V;

(v) подмножеството $W_{\lambda,\mu} = \{\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \,|\, a_{n+1} = \lambda a_n + \mu a_{n-1}$ *за* $\forall n \geq 2\} \subset V$ *за произволни фиксирани* $\lambda, \mu \in F$ *е линейно подпространство на* V.

Задача 16 *Да се определи кои от следните вектори са линейно независими и кои са линейно зависими:*

(i) $(4, -1, 2)$, $(-4, 10, 2) \in \mathbb{R}^3$; *(ii)* $(-1, 2, 4)$, $(5, -10, -20) \in \mathbb{R}^3$;

(iii) $(3, -1)$, $(4, 5)$, $(-4, 7) \in \mathbb{R}^2$; *(iv)* $(-3, 0, 4)$, $(5, -1, 2)$, $(1, 1, 3) \in \mathbb{R}^3$;

(v) $(3, 8, 7, -3)$, $(1, 5, 3, -1)$, $(2, -1, 2, 6)$, $(1, 4, 0, 3) \in \mathbb{R}^4$;

(vi) $(0, 3, 1, -1)$, $(6, 0, 5, 1)$, $(4, -7, 1, 3) \in \mathbb{R}^4$;

(vii) $x^2 + x + 3$, $5x^2 - x + 2$, $-3x^2 + 4 \in \mathbb{R}[x]$.

Задача 17 *За кои стойности на реалния параметър* λ *векторите*

$$a_1 = (\lambda, -1, -1), \quad a_2 = (-1, \lambda, -1), \quad a_3 = (-1, -1, \lambda) \in \mathbb{R}^3$$

са линейно независими?

Решение: Нека $\mu_1 a_1 + \mu_2 a_2 + \mu_3 a_3 = (0, 0, 0)$. Тогава

$$\left| \begin{array}{llll} \mu_1\lambda & -\mu_2 & -\mu_3 & = 0 \\ -\mu_1 & +\lambda\mu_2 & -\mu_3 & = 0 \\ -\mu_1 & -\mu_2 & +\lambda\mu_3 & = 0 \end{array} \right. .$$

Решаваме като система линейни уравнения с неизвестни μ_1, μ_2, μ_3 и параметър λ. Ако $\lambda \neq -1, 2$, то системата има единствено решение $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = 0$ и векторите a_1, a_2, a_3 са линейно независими. За $\lambda = 2$ имаме $a_1 + a_2 + a_3 = (0, 0, 0)$ и векторите a_1, a_2, a_3 са линейно зависими. При $\lambda = -1$ имаме $a_2 - a_1 = a_3 - a_1 = (0, 0, 0)$, така че a_1, a_2, a_3 са линейно зависими. $\square$

Задача 18 *(а) За кои стойности на параметъра p векторът $b = (1, -1, p, 2p)$ принадлежи на линейната обвивка на векторите*

$$a_1 = (1, -1, 2, 1), \quad a_2 = (3, 1, 2, -1), \quad a_3 = (1, -1, -1, 2).$$

(б) За кои стойности на параметъра p векторът $b = (1, 1, p, 1 - p)$ не принадлежи на линейната обвивка на векторите

$$a_1 = (1, 2, -2, 1), \quad a_2 = (1, -3, 1, -1), \quad a_3 = (1, 1, -1, -2).$$

Отговори: (а) $p = \frac{5}{7}$; (б) $p \neq -\frac{19}{11}$.

Задача 19 *(i) Да се определи кои от следните множества от вектори образуват базис на линейното пространство $\mathbb{Q}^2$:*

(а) $(4, 1)$, $(-7, -8)$*;* *(б)* $(0, 0)$, $(1, 3)$*;* *(в)* $(1, 2)$, $(0, 3)$, $(2, 7)$.

(ii) Да се определи кои от следните множества от вектори образуват базис на линейното пространство $\mathbb{Q}^3$:

(а) $(3, 1, -4)$, $(2, 5, 6)$, $(1, 4, , 8)$*;* *(б)* $(2, -3, 1))$, $(4, 1, 1)$, $(0, -7, 1)$*;* *(в)* $(-1, 3, 2))$, $(6, 1, 1)$.

(i) Да се определи кои от следните множества от вектори образуват базис на линейното пространство $\mathbb{Q}^{(3)}[x]$ на полиномите на x с рационални коефициенти от степен не по-голяма от 2 :

(а) $1 - 3x + 2x^2\, 1 + x + 4x^2$, $1 - 7x$*;* *(б)* $-4 + x + 3x^2$, $6 + 5x + 2x^2$, $8 + 4x + x^2$*;* *(в)* $1 + x + x^2$, $x - 1$.

Задача 20 *Нека*

$$V = \{(a + \sqrt{3}b,\ c + \sqrt{3}d,\ 2a - 2\sqrt{3}b,\ -c + \sqrt{3}d) \in \mathbb{R}^4 \mid a, b, c, d \in \mathbb{Q}\}.$$

(i) Да се докаже, че V е линейно пространство над полето $\mathbb{Q}$ на рационалните числа и да се намери размерността $\dim_{\mathbb{Q}} V$.

(ii) Да се провери, че

$$W = \{(a + \sqrt{3}b,\ c + \sqrt{3}d,\ 2a - 2\sqrt{3}b,\ -c + \sqrt{3}d) \in V \mid a + \sqrt{3}b = 2(c + \sqrt{3}d) - (c - \sqrt{3}d)\}$$

е подпространство на V и да се намери базис на W.

Задача 21 *Да се намерят координатите на вектора $v = (2, -1, 3) \in \mathbb{R}^3$ спрямо базиса $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (2, 2, 0)$, $e_3 = (3, 3, 3)$ на $\mathbb{R}^3$.*

Задача 22 *Да се намерят координатите на полинома $p(x) = 2 - x + x^2 \in \mathbb{R}^{(3)}[x]$ спрямо базиса $f_1(x) = 1 + x$, $f_2(x) = 1 + x^2$, $f_3(x) = x + x^2$ на пространството $\mathbb{R}^{(3)}[x]$ на полиномите на x с реални коефициенти от степен най-много 2.*

Задача 23 *Нека A е линейното пространство на аритметичните прогресии с рационални елементи. Да се докаже, че A е 2-мерно линейно пространство над $\mathbb{Q}$ и да се намери базис на A над $\mathbb{Q}$.*

Задача 24 *(i) Да се докаже, че множеството V на функциите $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ е линейно пространство над $\mathbb{R}$ относно поточково определените събиране*

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) \quad \text{\textit{за}} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

и умножение

$$(rf)(x) = rf(x) \quad \text{\textit{за}} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

с реално число $r \in \mathbb{R}$.

(ii) Да се докаже, че функциите $\cos^2(x)$, $\sin^2(x)$, $\cos(2x) \in V$ са линейно зависими над $\mathbb{R}$ и да се намери базис на линейната им обвивка $l_{\mathbb{R}}(\cos^2(x), \sin^2(x), \cos(2x))$.

Задача 25 *Да се определи размерността на следните подпространства на $\mathbb{R}^4$:*

(i) $U_1 = \{(a,b,c,0) \ \mid \ a,b,c \in \mathbb{R}\}$;

(ii) $U_2 = \{(a,b,c,d) \ \mid \ a,b,c,d \in \mathbb{R}, \quad d = a+b, \quad c = a-b\}$;

(iii) $U_3 = \{(a,b,c,d) \ \mid \ a,b,c,d \in \mathbb{R}, \quad a=b=c=d\}$.

Задача 26 *Дадена е матрицата*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 5 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 8 & 11 & 19 & 0 & 11 \end{pmatrix} \in M_{4\times 5}(\mathbb{Q}).$$

Намерете базис на пространството на вектор-редовете на A и базис на пространството на вектор-стълбовете на A. Определете ранга на A.

Решение: С елементарни преобразувания по редове свеждаме A към

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 3 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

и определяме, че $\mathrm{rk}(A) = 4$. Четирите реда на A образуват базис на вектор-редовете.

За стълбовете $c_1, \ldots, c_5$ на A пресмятаме, че $c_1 - c_3 - 3c_4 + c_5 = \mathcal{O}$. Следователно кои и да са четири стълба на A, включващи c_2, образуват базис на пространството на вектор-стълбовете. □

Задача 27 *Да се намери базис на пространството от решения на хомогенната линейна система*

$$\left| \begin{array}{lllll} x_1 & -x_2 & +x_3 & -x_4 & = 0 \\ x_1 & +x_2 & +2x_3 & +3x_4 & = 0 \end{array} \right. .$$

Да се определи за кои стойности на параметрите p и q векторът $(1, 2, p, q)$ принадлежи на пространството от решения на тази хомогенна линейна система.

Отговор: $p = 0$, $q = -1$.

Задача 28 *В линейното пространство $\mathbb{Q}^4$ са дадени пространството от решения U на хомогенната линейна система*

$$\left| \begin{array}{rrrrl} x_1 & +2x_2 & -6x_3 & +3x_4 & = 0 \\ x_1 & -2x_2 & +4x_3 & -3x_4 & = 0 \end{array} \right. \tag{1}$$

и пространството от решения W на хомогенната линейна система

$$\left| \begin{array}{rrrrl} x_1 & +x_2 & -2x_3 & & = 0 \\ 2x_1 & -x_2 & -2x_3 & +x_4 & = 0 \end{array} \right. . \tag{2}$$

Да се намерят базиси на сечението $U \cap W$ и сумата $U + W$.

Решение: Сечението $U \cap W$ е пространството от решения на хомогенната линейна система

$$\left| \begin{array}{rrrrl} x_1 & +2x_2 & -6x_3 & +3x_4 & = 0 \\ x_1 & -2x_2 & +4x_3 & -3x_4 & = 0 \\ x_1 & +x_2 & -2x_3 & & = 0 \\ 2x_1 & -x_2 & -2x_3 & +x_4 & = 0 \end{array} \right. , \tag{3}$$

получена чрез обединение на уравненията на системите (1) и (2). Пространството от решения на (3) е правата, породена от вектора $a_1 = (1, 1, 1, 1)$.

По Теоремата за размерност на сума и сечение,

$$\dim(U + W) = \dim(U) + \dim(W) - \dim(U \cap W) = 2 + 2 - 1 = 3,$$

защото хомогенните линейни системи (1) и (2) са на 4 променливи и имат ранг 2. За намиране на базис на $U + W$ ни трябват фундаментални системи решения на (1) и (2). Например, $b_1 = (2, 5, 2, 0)$, $b_2 = (0, -3, 0, 2)$ е базис на U, а $c_1 = (-1, 1, 0, 3)$, $c_2 = (2, 0, 1, -2)$ е базис на W. Чрез елементарни преобразувания към редовете на матрицата $\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$, анулиращи позиции под главния диагонал, намираме линейната зависимост

$$b_1 + b_2 - 2c_1 - 2c_2 = 0.$$

Всеки от векторите b_1, b_2, c_1, c_2 участва с ненулев коефициент в тази линейна зависимост и може да се изрази като линейна комбинация на останалите. Следователно кои и да са три вектора измежду b_1, b_2, c_1, c_2 образуват базис на $U + W$. $\square$

Задача 29 *В линейното пространство* $\mathbb{Q}^4$ *са дадени линейната обвивка* $U = l(a_1, a_2)$ *на векторите*

$$a_1 = (1, -1, 2, 3), \quad a_2 = (1, 1, 3, 2)$$

и линейната обвивка $W = l(b_1, b_2)$ *на векторите*

$$b_1 = (1, -2, 1, 1), \quad b_2 = (3, 1, 2, 4).$$

Да се намерят базиси на сечението $U \cap W$ *и сумата* $U + W$*.*

Отговор: За намиране на базис на $U \cap W$ представяме U и W като пространства от решения на хомогенни линейни системи. Разглеждаме хомогенната линейна система

$$\left| \begin{array}{lllll} x_1 & -x_2 & +2x_3 & +3x_4 & = 0 \\ x_1 & +x_2 & +3x_3 & +2x_4 & = 0 \end{array} \right. , \tag{4}$$

чиито уравнения имат за коефициенти координатите на a_1 и a_2. Един начин за представяне на общото решение на (4) е $x_1 = 5x_2 - 5x_4$, $x_3 = -2x_2 + x_4$. Векторите $c_1 = (5, 1, -2, 0)$ и $c_2 = (-5, 0, 1, 1)$ образуват фундаментална система решения на (4) и U е пространството от решения на

$$\left| \begin{array}{lllll} 5x_1 & +x_2 & -2x_3 & & = 0 \\ 5x_1 & & -x_3 & -x_4 & = 0 \end{array} \right. . \tag{5}$$

Аналогично, да разгледаме хомогенната система

$$\left| \begin{array}{lllll} x_1 & -2x_2 & +x_3 & +x_4 & = 0 \\ 3x_1 & +x_2 & +2x_3 & +4x_4 & = 0 \end{array} \right. , \tag{6}$$

чиито уравнения имат за коефициенти компонентите на b_1, b_2. Тя има фундаментална система решения $d_1 = (-5, 1, 7, 0)$, $d_2 = (-2, 0, 1, 1)$. Затова W е пространството от решения на

$$\left| \begin{array}{lllll} 5x_1 & -x_2 & -7x_3 & & = 0 \\ 2x_1 & & -x_3 & -x_4 & = 0 \end{array} \right. . \tag{7}$$

Сечението $U \cap W$ е пространството от решения на хомогенната линейна система

$$\left| \begin{array}{lllll} 5x_1 & +x_2 & -2x_3 & & = 0 \\ 5x_1 & & -x_3 & -x_4 & = 0 \\ 5x_1 & -x_2 & -7x_3 & & = 0 \\ 2x_1 & & -x_3 & -x_4 & = 0 \end{array} \right. , \tag{8}$$

получена чрез обединение на уравненията на (5) и (7). Системата (8) има нулево пространство от решения и $U \cap W = \{\mathcal{O}\}$ няма базис.

По Теоремата за размерност на сума и сечение,

$$\dim(U + W) = \dim(U) + \dim(W) - \dim(U \cap W) = 2 + 2 - 0 = 4,$$

така че $U + W = \mathbb{Q}^4$ и всеки базис на $\mathbb{Q}^4$ е базис на $U + W$.

Задача 30 *В линейното пространство* $\mathbb{Q}^4$ *са дадени пространството от решения* U *на хомогенната линейна система*

$$\left| \begin{array}{rrrrl} x_1 & +3x_2 & +4x_3 & -6x_4 & =0 \\ 2x_1 & -3x_2 & -4x_3 & +3x_4 & =0 \end{array} \right. \tag{9}$$

и линейната обвивка $W = l(a_1, a_2, a_3, a_4)$ *на векторите*

$$a_1 = (1, -1, 2, 1), \quad a_2 = (1, 3, -1, 1), \quad a_3 = (2, 3, 1, 1), \quad a_4 = (1, 2, -1, 2).$$

Да се намерят базиси на сечението $U \cap W$ *и сумата* $U + W$.

Решение: За да намерим базис на $U \cap W$, представяме W като пространство от решения на хомогенна линейна система. Ако

$$\left| \begin{array}{rrrrl} x_1 & -x_2 & +2x_3 & +x_4 & =0 \\ x_1 & +3x_2 & -x_3 & +x_4 & =0 \\ 2x_1 & +3x_2 & +x_3 & +x_4 & =0 \\ x_1 & +2x_2 & -x_3 & +2x_4 & =0 \end{array} \right. \tag{10}$$

е хомогенната линейна система с матрица от коефициенти $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix}$, а $(8, -3, -4, -3)$ е нейна фундаментална система решния, то W е пространството от решения на хомогенното линейно уравнение

$$8x_1 - 3x_2 - 4x_3 - 3x_4 = 0. \tag{11}$$

Сечението $U \cap W$ е пространството от решения на хомогенната линейна система

$$\left| \begin{array}{rrrrl} x_1 & +3x_2 & +4x_3 & -6x_4 & =0 \\ 2x_1 & -3x_2 & -4x_3 & +3x_4 & =0 \\ 8x_1 & -3x_2 & -4x_3 & -3x_4 & =0 \end{array} \right. , \tag{12}$$

получена чрез обединение на уравненията на (9) и (11). Системите (9) и (12) имат пространства от решения $U \supseteq U \cap W$ и един и същи ранг 2, така че $U = U \cap W$. Един базис на $U = U \cap W$ е $b_1 = (3, 5, 0, 3)$, $b_2 = (4, 0, 5, 4)$.

По Теоремата за размерност на сума и сечение,

$$\dim(U + W) = \dim(U) + \dim(W) - \dim(U \cap W) = \dim(W),$$

така че включването $W \subseteq U + W$ е съвпадение, $W = U + W$. Съгласно линейната зависимост $a_1 + 2a_2 - a_3 - a_4 = \mathcal{O}$, всяка тройка вектори измежду $a_1, \dots, a_4$ е базис на $W = U + W$. $\square$