Контролно упражнение 2

Първи курс,
специалност *Математика, Приложна Математика и Статистика*

17 януари 2015 г.

Вариант 4

6,25

А. Каспарян

Име: [redacted]	
Факултетен № [redacted]	Група: [redacted]

Задача 1. В линейното пространство V над $\mathbb{C}$ с базис $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ е даден линейният оператор φ с матрица

$$A = \begin{pmatrix} 20 & 21 & 84 \\ -6 & -7 & -24 \\ -3 & -3 & -13 \end{pmatrix}.$$

1,25

Да се намери базис на V, в който матрицата D на φ е диагонална, както и тази матрица D.

Задача 2. В линейното простриаство V с базис $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$, $\boldsymbol{e}_4$ е даден линейният оператор φ

1,25

$$\varphi(x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2 + x_3\boldsymbol{e}_3 + x_4\boldsymbol{e}_4) = (x_1 + 2x_2 + x_4)\boldsymbol{e}_1 + (-x_1 + x_2 + x_3 + x_4)\boldsymbol{e}_2$$
$$+(x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4)\boldsymbol{e}_3 + (4x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 4x_4)\boldsymbol{e}_4.$$

Да се пресметнат дефектът $d(\varphi)$ и рангът $rk(\varphi)$ на φ. Да се намерят базиси на образа $\mathrm{im}\varphi$ ина ядрото $\ker\varphi$ на φ.

Задача 3. Нека $V = \mathbb{Q}^4[x]$ е линейното пространство на полиномите с рационални коефициенти от степен ненадминаваща 3, а $\varphi : V \to V$ е изображението

1,25

$$\varphi(f(x)) = -f''(x) + f'(x) - f(x+1) \text{ за всеки полином } f \in V.$$

(а) Да се докаже, че φ е линеен оператор.

(б) Да се намери матрицата на оператора φ спрямо базиса 1, x, x^2, x^3.

(в) Да се намери матрицата на оператора φ спрямо базиса $x+3$, $x+2$, $(x+1)^2$, x^3+1, както и матрицата на прехода от базиса 1, x, x^2, x^3 към базиса $x+3$, $x+2$, $(x+1)^2$, x^3+1.

(г) Да се определи дали полиномът $f = x^2 + x + 1$ принадлежи на образа $\mathrm{im}\,\varphi$ на φ.

Задача 4. Линейното пространство $U = \ell(a_1, a_2, a_3)$ е линейната обвивка на векторите:

0,5

$$\boldsymbol{a}_1 = (3, 2, 1, -2),\ \boldsymbol{a}_2 = (1, 1, 2, -1), a_3 = (4, 3, 3, -3).$$

в $\mathbb{R}^4$.

(а) Да се конструира линеен оператор $\varphi \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^4)$ с образ $\mathrm{im}\,\varphi = U$;

(б) Да се конструира линеен оператор $\psi \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^4)$ с ядро $\ker\psi = U$;

(в) Да се пресметне произведението на оператори $\psi\varphi$

(г) Да се докаже, че $\psi\varphi = o$ тогава и само тогава, когато образът $\mathrm{im}\varphi$ на φ се съдържа в ядрото $\ker\psi$ на ψ.

Добър 4,50

А. Кспарян

Контролно упражнение 1

специалност *Математика и Приложна Математика*

12 декември 2014 г.

Вариант 4

Име: [redacted]	
Факултетен № [redacted]	

Задача 1. Дадени са матриците:

1

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 14 & 10 & 5 \\ 18 & 15 & 9 \\ 22 & 16 & 7 \end{pmatrix}.$$

Да се намерят всички решения на матричното уравнение:

$$AXB = C.$$

Задача 2. Да се пресметне детерминантата

0,40

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} -4 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & -4 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & -4 \end{vmatrix}.$$

Задача 3. Нека $V \subseteq \mathbb{R}^4$ е пространството от решения на хомогенната система линейни уравнения

1⁻

$$V : \left| \begin{aligned} -x_1 + x_3 &= 0 \\ 3x_1 - 3x_2 + x_4 &= 0 \\ -4x_1 + 3x_2 + x_3 - x_4 &= 0 \end{aligned} \right. ,$$

а $W = \ell(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3)$ е линейната обвивка на векторите

$$\boldsymbol{a}_1 = (1, 2, 1, 3), \ \boldsymbol{a}_2 = (0, 1, 1, 0), \ \boldsymbol{a}_3 = (3, 7, 4, 9).$$

Да се намерят базиси на линейните пространства $V \cap W$ и $V + W$.

Задача 4. В линейното пространство

$$M = \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix} \middle| \ a_{ij} \in \mathbb{C} \right\}$$

на квадратните матрици от четвърти ред с комплексни елементи са дадени подмножествата

$$M_1 = \{A \in M : \det A = 0\} \quad \text{и}$$

$$M_2 = \{A \in M : \operatorname{tr} A = 0\}.$$

(За произволна квадратна матрица $A \in M$ *следата* $\operatorname{tr} A$ на матрицата е сумата от диагоналните ѝ елементи, т. е., $\operatorname{tr} A = a_{11} + a_{22} + a_{33} + a_{44}$.)

(а) Да се докаже, че M_1 не е линейно подпространство на M.

(б) Да се докаже, че M_2 е линейно подпространство на M. Да се намери базис на M_2 и да се пресметне размерността на M_2.