Домашно задание 1

Първи курс,
специалност *Приложна Математика*

1 декември 2014 г.

Задача 1. Дадени са матриците:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 32 & 16 & 24 \\ 40 & 14 & 26 \\ 12 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad C_1 = \begin{pmatrix} 32 & 16 & 24 \\ 40 & 14 & 26 \\ 72 & 30 & 50 \end{pmatrix}.$$

(а) Да се намерят всички решения на матричното уравнение:

$$AXB = C.$$

(б) Да се намерят всички решения на матричното уравнение:

$$A_1XB = C_1.$$

Задача 2. Да се пресметне детерминантата:

$$\begin{vmatrix} x^n & x^{n-1} & \dots & x & 1 \\ (x+1)^n & (x+1)^{n-1} & \dots & x+1 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ (x+n)^n & (x+n)^{n-1} & \dots & x+n & 1 \end{vmatrix}$$

Задача 3. Да се намерят стойностите на параметрите λ и μ, за които векторът

$$\boldsymbol{v} = (0, -3, -33, \mu)$$

се изразява като линейна комбинация на векторите

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}_1 &= (1, 2, -2, 1), \\ \boldsymbol{v}_2 &= (0, 3, 5, -2), \\ \boldsymbol{v}_3 &= (1, 5, 3, -1), \\ \boldsymbol{v}_4 &= (3, 4, 14, \lambda), \end{aligned}$$

Задача 4. (а) Да се докаже, че сумата на две различни една от друга равнини през началото (т. е., линейни подпространства от размерност 2) в $\mathbb{R}^3$ е цялото пространство $\mathbb{R}^3$.

(б) Каква е най-малката размерност на линейно пространство в което две линейни подпространства от размерност n се пресичат в една точка?

Задача 5. Линейните подпространства V_1 и V_2 на $\mathbb{R}^4$ са зададени като пространства от решения на системи от уравнения

$$V_1 : \left| \begin{array}{rcl} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 & = & 0 \\ 3x_2 + x_3 & = & 0 \\ x_1 - 4x_2 + x_3 + x_4 & = & 0 \end{array} \right. \quad V_2 : \left| \begin{array}{rcl} x_1 + x_3 + x_4 & = & 0 \\ 2x_1 - 4x_2 + 2x_3 + 2x_4 & = & 0 \end{array} \right. ,$$

а $W_1 = \ell(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3)$ и $W_2 = \ell(\boldsymbol{a}_4, \boldsymbol{a}_5)$ са линейни обвивки, зададени от следните вектори:

$$\boldsymbol{a}_1 = (1, 2, 3, 1),\ \boldsymbol{a}_2 = (2, 1, 3, 1),\ \boldsymbol{a}_3 = (-3, -2, -5, -2),$$

$$\boldsymbol{a}_4 = (1, 2, 1, 0),\ \boldsymbol{a}_5 = (0, 0, 2, 1).$$

Да се намерят базиси на линейните пространства:

(а) $V_1 \cap V_2$ и $V_1 + V_2$;

(б) $W_1 \cap W_2$ и $W_1 + W_2$;

(в) $V_1 \cap W_1$ и $V_1 + W_2$;