

Лекция 7:

Представяне на несигурни знания и вероятностни разсъждения

ПРЕДСТАВЯНЕ НА НЕСИГУРНИ ЗНАНИЯ С ВЕРОЯТНОСТИ

- *Случайна променлива*. Величина в езика за представяне на знания, която може да има няколко (вкл. безброй много) възможни стойности.
- *Област на променлива*:  $dom(x)$  = множеството от възможни стойности на  $x$ .
- *Твърдение*: булев израз от присвоявания на променливи ( $x_i = v_j$ ). Например: (*време = дъждовно*)  $\vee$  (*болест = грип*)  $\vee \neg$ (*температура = повишена*).
- *Вероятност* = мярка за увереност в дадено твърдение (реално число между 0 и 1).  $P(A)=0 \rightarrow 100\%$  увереност, че твърдението  $A$  е лъжа;  $P(A)=1 \rightarrow 100\%$  увереност, че твърдението  $A$  е истина.
- *Вероятностното разпределение* задава вероятността на всяка възможна стойност на променливата. Ако  $dom(x) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ , то  $\sum_{i=1}^n P(x = v_i) = 1$ .
- *Априорна вероятност* – вероятност при отсъствие на каквато и да е информация.
- *Условна вероятност* – вероятност при наличието на информация за стойностите на други случайни променливи. Например:  $P(\text{температура} = \text{повишена} \mid \text{болест} = \text{грип})$ .
- *Основни зависимости* ( $A, B$  – твърдения):
  - $P(A \vee B) = P(A) + P(B) - P(A \wedge B)$
  - $A$  и  $B$  са *независими* (т.е. знанието на едното не променя вероятността на другото), когато  $P(A \wedge B) = P(A)P(B)$
  - $A$  и  $B$  са *несъвместими* (т.е. никога не могат да се случат заедно), когато  $P(A \wedge B) = 0$
  - Дефиниция на условна вероятност:  $P(A|B) = \frac{P(A \wedge B)}{P(B)}$   
Следователно,  $P(A \wedge B) = P(A|B) P(B)$
  - *Условна независимост* на  $A$  и  $B$  при дадено  $C$ : ако  $P(A|B \wedge C) = P(A|C)$  и  $P(B|A \wedge C) = P(B|C)$
  - Формула (теорема) на Бейс:  $P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)}$
- *Вероятностен модел на предметната област*:
  - *Атомарно събитие*:  $(x_1 = v_1) \wedge (x_2 = v_2) \wedge \dots \wedge (x_n = v_n)$ , където  $x_i$  са случайни променливи. Описва конкретно състояние на предметната област.
  - *Съвместно разпределение*:  $n$ -мерна таблица с  $t_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) клетки по всяка размерност (ако  $x_i$  има  $t_i$  възможни стойности). Във всяка клетка се записва вероятността на съответното атомарно събитие. Тъй като атомарните събития са несъвместими (т.е. взаимно изключващи се) и таблицата съдържа всички атомарни събития, то сумата от стойностите на всички клетки е 1.

## МЕХАНИЗМИ ЗА ИЗВОД

- Използване на съвместното разпределение

Дадено е съвместното разпределение на няколко случайни променливи, например

	зъбобол = да	зъбобол = не
кариес = да	0.04	0.06
кариес = не	0.01	0.89

Тогава могат да се изчисляват вероятностите на произволни твърдения. Например (за краткост са пропуснати стойностите на променливите):

$$P(\text{кариес}) = 0.04 + 0.06 = 0.1 \quad (\text{сумата на реда})$$

$$P(\text{кариес} \vee \text{зъбобол}) = 0.04 + 0.06 + 0.01 = 0.11$$

$$P(\text{кариес} | \text{зъбобол}) = P(\text{кариес} \wedge \text{зъбобол}) / P(\text{зъбобол}) = 0.04 / (0.04 + 0.01) = 0.8$$

- Използване на формулата на Бейс

- Дадени са:  $e$  – множество от симптоми ( $e = e_1 \wedge e_2 \wedge \dots \wedge e_k$ ) и  $d_1, d_2, \dots, d_n$  – изчерпващо множество от диагнози. Предполага се, че елементарните симптоми  $\{e_i\}$  са независими. Известни са  $P(d_i)$  и  $P(e|d_i)$  за  $i = 1, \dots, n$  (по-точно,  $P(e_j|d_i)$  за  $j = 1, \dots, k$  и  $i = 1, \dots, n$ ).

- Задачата е да се пресметнат  $P(d_i|e)$ ,  $i = 1, \dots, n$  и да се намери най-вероятната диагноза при дадените симптоми  $e$ .

- Според формулата на Бейс

$$P(d_i | e) = \frac{P(d_i)P(e|d_i)}{P(e)} \quad \text{за всяко } i = 1, \dots, n$$

- Предполага се, че елементарните симптоми  $\{e_i\}$  са независими, следователно

$$P(e | d_i) = \prod_{j=1}^k P(e_j | d_i) \quad \text{за всяко } i = 1, \dots, n$$

- $P(e)$  може да се намери по следния начин:

$$\sum_{i=1}^n P(d_i | e) = \sum_{i=1}^n \frac{P(d_i)P(e|d_i)}{P(e)} = 1, \text{ следователно}$$

$$P(e) = \sum_{i=1}^n P(d_i)P(e | d_i)$$

- Пример:

вероятност	здрав	грип	алергия
$P(d)$	0.9	0.05	0.05
$P(\text{кихане} d)$	0.1	0.9	0.9
$P(\text{кашлица} d)$	0.1	0.8	0.7
$P(\text{температура} d)$	0.01	0.7	0.4

Нека симптомите  $e$  са кихане и кашлица без повишена температура.

Тогава

$$e = e_1 \wedge e_2 \wedge e_3,$$

$$e_1 = \text{кихане}, e_2 = \text{кашлица}, e_3 = \neg(\text{повишена температура})$$

$$d_1 = \text{здрав}, d_2 = \text{грип}, d_3 = \text{алергия}$$

$$P(\text{здрав}|e) = \frac{P(\text{здрав})P(e|\text{здрав})}{P(e)} = \frac{(0.9)P(e|\text{здрав})}{P(e)};$$

$$P(e|\text{здрав}) = \prod_{j=1}^3 P(e_j | \text{здрав}) = (0.1)(0.1)(1-0.01)$$

Следователно,

$$P(\text{здрав}|e) = \frac{(0.9)(0.1)(0.1)(0.99)}{P(e)} = \frac{0.0089}{P(e)}$$

$$P(\text{грип}|e) = \frac{(0.05)(0.9)(0.8)(0.3)}{P(e)} = \frac{0.01}{P(e)}$$

$$P(\text{алергия}|e) = \frac{(0.05)(0.9)(0.7)(0.6)}{P(e)} = \frac{0.019}{P(e)}$$

$$P(e) = \sum_{i=1}^3 P(d_i)P(e|d_i) = 0.0089 + 0.01 + 0.019 = 0.0379$$

Следователно,

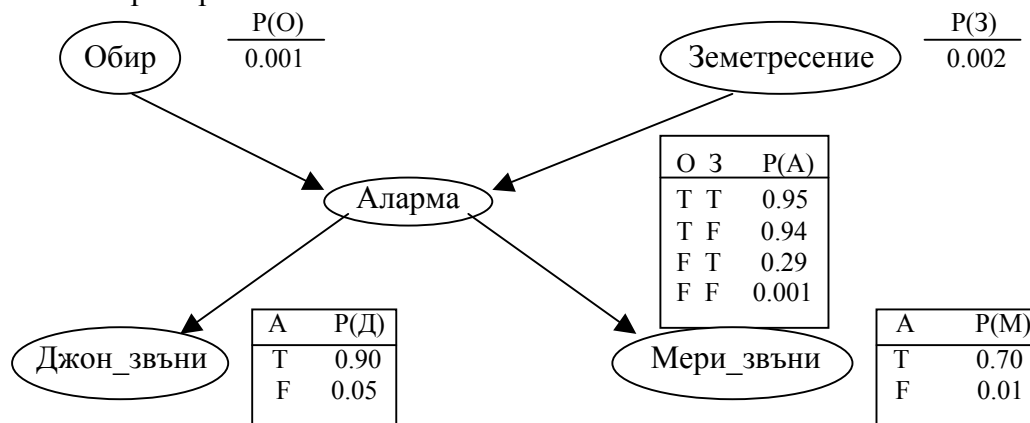
$$P(\text{здрав}|e) = 0.23; P(\text{грип}|e) = 0.26; P(\text{алергия}|e) = 0.50$$

- Проблем: предположението за независимост на елементарните симптоми е прекалено силно и нереалистично.

### БЕЙСОВИ МРЕЖИ (БМ, BELIEF NETWORKS)

- Използване на ацикличен ориентиран граф за представяне на зависимостите между променливите с цел сбито (компактно) описание на съвместното им разпределение.
- На всяка случайна променлива съответства отделен възел от мрежата. Дъгите от мрежата задават *причинно-следствени връзки*. Интуитивното значение на дъгата от възела X към възела Y е, че X оказва *директно влияние* върху Y.
- За всеки възел е дефинирана таблица с условни вероятности, която задава вероятността на всяка стойност на променливата във възела в зависимост от всяка възможна комбинация от стойности на променливите в родителските възли.

Пример:



*Примерна предметна област.* В жилището си имате монтирана нова сигнална инсталация (аларма). Тя е чувствителна и реагира на опит за проникване в жилището ви (в частност, при опит за обир), но също и на слаби земетресения. Имате също двама съседни, Джон и Мери, които са обещали да ви се обаждат по телефона в службата

винаги когато чуят, че алармата във вашето жилище се е включила. Джон винаги ви се обажда, когато чуе алармата, но понякога я обърква със звъна на телефона и тогава също ви се обажда. Мери пък обича да слуша силна музика и понякога е възможно да не чуе алармата у вас.

Ако е известно кой от двамата ви се е обадил или не се е обадил, може да се установи например вероятността в жилището ви да е извършен обир.

- БМ задават неявно съвместното разпределение на променливите си. Нека  $x_1, x_2, \dots, x_n$  са случайни променливи и  $P(v_1, v_2, \dots, v_n)$  е съвместната вероятност те да получат съответно стойности  $v_1, v_2, \dots, v_n$ . Тогава

$$P(v_1, v_2, \dots, v_n) = \prod_{i=1}^n P(v_i \mid \text{Parents}(x_i)),$$

където  $P(v_i \mid \text{Parents}(x_i))$  е условната вероятност за  $x_i = v_i$  при условие, че са дадени стойностите на родителските променливи  $\text{Parents}(x_i)$  на  $x_i$ . Например:

$$P(\text{Джон\_звъни}, \text{Мери\_звъни}, \text{Аларма}, \neg\text{Обир}, \neg\text{Земетресение}) = (0.9)(0.7)(0.001)(0.999)(0.998) = 0.000628$$

- Видове извод в БМ. При дадени стойности на подмножество от променливите (наблюдаеми, evidence variables) да се определи вероятността на стойностите на друго подмножество от променливите (търсени, query променливи).
  - Диагностика – от следствието към причината:  $P(\text{Обир} \mid \text{Джон\_звъни}) = ?$
  - Предсказване – от причината към следствието:  $P(\text{Джон\_звъни} \mid \text{Обир}) = ?$
  - Междупричинен извод – между причините за дадено следствие:  $P(\text{Обир} \mid \text{Земетресение}) = ?$
  - Смесен извод – комбинация на горните три:  $P(\text{Аларма} \mid \text{Джон\_звъни} \wedge \neg\text{Земетресение}) = ?$