Софийски Университет „ Св.Климент Охридски “
Факултет по Математика и Информатика

Катедра „ВОИС “

Димитър Атанасов

Задачи по терия на вероятностите

СОФИЯ, 2000

Съдържание

Глава 1

Комбинаторика

Разглеждаме множеството $A = \{a_1, ..., a_n\}$. С $|A|$ означаваме броя на елементите на A. Нека $A_1, ..., A_m$ са подмножества на A и нека да разгледаме множеството $K = A_1 \times A_2 \times ... \times A_m$.

1.1 Наредена извадка с повторения

Нека $A_i = A$ за $i = 1, ..., m$, тогава броя на елементите на множеството K ще е $|K| = n^m = \tilde{V}_n^m$. Такава конфигурация наричаме вариация от n елемента, m-ти клас, със повторения.

1.2 Наредена извадка без повторения

Нека $1 \leq m \leq n$. Разглеждаме множеството $K = A_1 \times A_2 \times ... \times A_m$, където $A_1 = A, A_2 = A \setminus \{a_1\}, ..., A_m = A_{m-1} \setminus \{a_{m-1}\} = A \setminus \{a_1, ..., a_{m-1}\}$. В този случай

$$|K| = |A_1| * |A_2| * ... * |A_m| = n(n-1)(n-2)...(n-m+1) = \frac{n!}{(n-m)!} = V_n^m. \tag{1.1}$$

Такава конфигурация наричане вариация от n елемента, m-ти клас, без повторения.

Ако $n = m$ това са пермутациите на n елемента, $P_n = n!$.

1.3 Ненаредена извадка без повторения

В този случай е вярно (1), но всяка m-орка може да бъде повторена $m!$ пъти, тогава

$$|K| = \frac{V_n^m}{m!} = \frac{n!}{(n-m)!m!} = \binom{n}{m} = C_n^m. \tag{1.2}$$

Тази конфигурация наричаме комбинации от n елемента, m-ти клас, без повторения. Тя съответства на броя на подмножествата на A с точно m елемента, защото всяко подмножество може да се разглежда като ненаредена извадка без повторения.

Тук може да се покаже следния прост резултат. Интересуваме се от броя на подмножествата на дадено множество, тогава

$$\sum_{m=1}^{n} \binom{n}{m} = \sum_{m=1}^{n} \binom{n}{m} 1^m 1^{n-m} = (1+1)^n = 2^n.$$

1.4 Ненаредена извадка с повторения

Разглеждаме множество K състоящо се от $n+m-1$ номерирани кутии. Нека имаме m елемента $* \notin A$. Разпръскваме $*$ по произволен начин в тези кутии, като в всяка кутия попада по една $*$. Броя на възможните разпределения на $*$ в кутиите е $\binom{n+m-1}{m}$. От първата кутия до кутията с най-малък номер, съдържаща $*$ поставяме елемента a_1, от тази кутия до кутията с втори по големина номер съдържаща $*$ поставяме елемента a_2 и т.н. Така на всяко разположения на $*$ ще съответства една наредена конфигурация с повторения, тогава броя на тези конфигурации ще е равен на броя на разпределения на $*$.

1.5 Задачи

Задача 1.5.1 *Разпределят се k неразличими частици в n различими клетки. Да се намери броя на възможните начини на разпределение, ако всяка клетка може да съдържа най-много една частица. (Ферми - Дирак)*

Решение 1.5.1 Броя на възможните начини на разпределение на частиците съответства на подмножествата от k клетки, маркирани чрез попадане на частица в тях (виж по горе).

Задача 1.5.2 *Разпределят се k неразличими частици в n различими клетки. Да се намери броя на възможните начини на разпределение, ако няма ограничение за броя на частиците попаднали в една клетка. (Бозе - Айнщайн)*

Решение 1.5.2 Броя на възможните начини на разпределение на частиците съответства на ненаредените извадки с повторения (виж по горе).

Задача 1.5.3 *Разпределят се k различими частици в n различими клетки. Да се намери броя на възможните начини на разпределение, ако няма ограничение за броя на частиците попаднали в една клетка. (Максуел - Болцман)*

Решение 1.5.3 Този брои съответства на всички k цифрени числа в n бройна система, т.е. n^k

Задача 1.5.4 *Разпределят се k различими частици в n различими клетки. Да се намери броя на възможните начини на разпределение, ако 1 клетка може да съдържа най-много една частица.*

Решение 1.5.4 Това разпределение представлява разпределението на наредени извадки без повторения (виж по горе).

Задача 1.5.5 *Да се докажат тъждествата:*

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

Решение 1.5.5 Първото от тъждествата се доказва тривиално, тъй като на всяка извадка можем да съпоставим нейното допълнение.

За да докажем второто ще разгледаме ненаредени извадки без повторения. Нека A_1 е множеството от онези извадки, които не съдържат фиксиран елемент, нека той да е a_1. Означаваме $A = K_n^k \setminus A_1$, където K_n^k е множеството от всички разглеждани извадки.

Тогава, очевидно, ще бъде изпълнено

$$\left|K_n^k\right| = |A| + |A_1| = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

Задача 1.5.6 *Разпределят се k различими частици в n различими клетки. Да се намери броя на възможните начини на разпределение, ако клетката a_1 побира произволен брой частици, а останалите клетки само по една частица.*

а) в клетката a_1 има точно s частици

б) в клетката a_1 има не повече от s частици

в) в клетката a_1 има поне s частици

Решение 1.5.6 а) броя на попадналите в a_1 ще е $\binom{k}{s}$, а на останалите ще е $\frac{(n-1)!}{(n-k+s-1)!}$. Тогава общия брой ще е

$$\binom{k}{s}\frac{(n-1)!}{(n-k+s-1)!}$$

при $k \geq s$, $n-1 \geq k-s$ и нула в останалите случаи.

Имайки предвид това, другите два случая се представят като суми, като единствения проблем е да се преценят границите на сумирането.

Задача 1.5.7 *Да се намери броя на равнините, отстоящи на еднакво разстояние от четири некомпланарни точки.*

Решение 1.5.7 Една равнина се определя от три точки, или от две точки и разстоянието до трета точка, или от точка и две разстояния и т.н.

Нека Σ е равнина изпълняваща условието. Тогава всяка точка може да се намира в едно от двете полупространства определени от Σ. Ако четирите точки лежат в едно и също полупространство, то те лежат в една равнина, Следователно поне една от точките е от другото полупространство.

Нека A_i, $i =, \cdots, 4$ са дадените точки и разстоянието $\rho\,(A_i, \Sigma) = d$, $i = \cdots 4$.

Ако три от точките са от едното полупространство, равнината ще я считаме за еквивалентна на равнината минаваща през тези три точки. Нека всички такива равнини са $\tilde{\Sigma}_1$.

Ако $\Sigma \in \tilde{\Sigma}_1$, то $\rho\,(A_4, \Sigma) = 2d$. Броят на равнините в $\tilde{\Sigma}_1$ е $\binom{4}{3}$, защото се определят от избора на три от четирите точки.

Нека две от точките, A_1, A_2, са от едното, а другите две да са в другото полупространство. Тогава равнината, минаваща на еднакво разстояние от четирите точки я считаме за еквивалентна на равнината минаваща през точките A_1 и A_2, и на разстояние $2d$ от другите две точки.

Нека всички такива равнини са $\tilde{\Sigma}_2$, техния брой ще е $\binom{4}{2}$, защото се определят от избора на две точки. Но така всяка получена равнина се брои два пъти. Следователно общия брой равнини е

$$\binom{4}{2} + \frac{\binom{4}{3}}{2} = 7.$$

Задача 1.5.8 *Да се намери броя на целочислените положителни решения на*

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_m = n.$$

Решение 1.5.8 Нека $x_1, \cdots, x_m$ са цели, неотрицателни решения на уравнението. Нека имаме една n-орка, състояща се от x_1 елемента от 1-ви тип, x_2 елемента от 2-ри тип и т.н. Тогава имаме взаимно еднозначно съответствие между извадките от n елемента от множество с m елемента с повторения и множеството от цели неотрицателни решения на уравнението. Следователно броят на тези решения е $\binom{m+n-1}{n}$.

Глава 2

Класическа вероятност

Нека извадковото пространство $\Omega = \{\omega_1, ..., \omega_n\}$ се състои от краен брой елементи $\{\omega_i\}_{i=1}^{n}$. На всеки елемент на Ω съпоставяме число представляващо неговата вероятност $\omega_i \Rightarrow P\{\omega_i\}$, $P\{\omega_i\} \geq 0$, $\sum_{i=1}^{n} P\{\omega_i\} = 1$.

Ако $A \in \Sigma\{\Omega\}$ е някакво събитие от σ-алгебрата $\Sigma\{\Omega\}$ съдържаща Ω, то вероятността $P(A)$ се дефинира като

$$P(A) = \sum_{\omega_i \in A} P(\omega_i)\,. \tag{2.1}$$

Ако $P(\omega_i) = P(\omega_j) = \frac{1}{n}$, за $i, j = 1, ..., n$, тогава $P(A) = \frac{m}{n}$, където m е броя на благоприятните изходи, а n е броя на възможните изходи.

2.1 Пример

Всички стени на един куб са оцветени. Кубът е разрязан на 1000 еднакви кубчета, които след това са добре размесени. Да се намери вероятността избрано кубче да има точно две оцветени страни.

Кубът има 12 ръба, на всеки от които има по 8 кубчета с точно две оцветени страни. Следователно броя на благоприятните изходи ще е $12 * 8 = 96$, а броя на възможните изходи е 1000, следователно търсената вероятност ще е $\frac{96}{1000}$.

2.2 Пример

Урна съдържа M черни и $N - M$ бели топки, $M < N$. Образуваме ненаредена извадка без връщане с обем n, $n < M, n < N - M$. Да се пресметне вероятността извадката да съдържа точно k черни топки.

Имаме $\binom{N}{n}$ възможни изхода, като благоприятните са тези извадки, които съдържат k черни и $n-k$ бели топки. Броят на извадките с обем k от черните топки е равен на $\binom{M}{k}$, а броя на извадките от $n-k$ бели топки, които допълват извадката от k бели е $\binom{N-M}{n-k}$. Следователно броя на благоприятните изходи е $\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}$. Тогава търсената вероятност е

$$p = \frac{\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}.$$

2.3 Пример

Да се пресметне вероятността при хвърлянето на два зара да се падне поне една шестица, ако:

а) заровете са различими и различните изходи са равновероятни

б) заровете са неразличими и различните изходи са равно вероятни

в) могат ли двете предположения да описват една и съща действителност.

Резултата от хвърлянето на k зара може да се разглежда като разпределение на k частици в 6 различими клетки.

а) в този случай може да се разглежда разпределение на 2 различими частици в 6 различими клетки. Тогава броя на всичките възможни изхода е 6^2. Нека $\overline{A}$ е събитието „нито една частица не попада в клетката *шестица*. $\overline{A}$ се състой от онези изходи при които и двете частици са попаднали в другите 5 клетки. Тогава

$$P(A) = 1 - P\left(\overline{A}\right) = 1 - \frac{5^2}{6^2}$$

б) този случай е аналогичен на предния, като се разглежда разпределението на две неразличими частици в 6 клетки, т.е. извадката е ненаредена с повторения. Тогава броя на възможните изходи е

$$n = \binom{7}{2},$$

а броя на благоприятните изходи за събитието $\overline{A}$ е

$$m = \binom{6}{2},$$

тогава

$$P(A) = 1 - P\left(\overline{A}\right) = 1 - \frac{\binom{6}{2}}{\binom{7}{2}}.$$

в) ако допуснем, че и двете предположения описват вярно действителността, то ще има разлика във вероятностите на даденото събитие в зависимост от това дали хвърлящият заровете ги различава или не. Тъй като заровете са два реални обекта, то вероятността разглежданото събитие не би трябвало да зависи от някакъв субективен фактор като това дали хвърлящият ги различава или не. Тъй като изходът $(1, 6)$ може да настъпи по два различни начина $(1, 6)$, $(6, 1)$, а $(6, 6)$ само по един, то модела б) не описва добре действителността.

Парадокс на Дьо Мере. При хвърляне на три зара по-често се пада комбинация при която сумата от точките е 11, отколкото комбинация при която сумата от точките е 12. Ако приемаме, че заровете са неразличими то за двете събития има равен брой благоприятни изходи, докато ако заровете са различими, броя на благоприятните изходи в двата случая е различен.

2.4 Задачи

Задача 2.4.1 *Хвърлят се два различими зара. Каква е вероятността да се паднат две тройки, ако сумата от падналите се точки е кратна на 3?*

Решение 2.4.1 Сумата е кратна на 3 в случаите $(i, j), (i, j + 3)$, където $j = \min_j \{(i + j)\, mod 3 = 0\}$, $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ и $(\mathbf{6}, 6)$, $(6, \mathbf{6})$, т.е. общо 14 изхода. От тях два са благоприятни $(\mathbf{3}, 3)$ и $(3, \mathbf{3})$, така че търсената вероятност е $\frac{1}{7}$.

Задача 2.4.2 *Числата 1,2,3,4,5 са написани на 5 картички. Последователно се изтеглят три картички без връщане и се разполагат една до друга по реда на изтегляне. Каква е вероятността така полученото трицифрено число да е четно.*

Решение 2.4.2 Броя на начините, по които можем да изтеглим 3 от възможни 5 карти без връщане е $\frac{5!}{(5-3)!}$. От тях благоприятни са онези наредени тройки, които завършват на 2 или 4. Тези които завършват на 2 ги избираме като от останалите 4 картички теглим 2, съответстващи на първите 2 цифри, тогава тяхната бройка е $\frac{4!}{(4-2)} = 12$. Аналогично броя на тези, които завършват на 4 също е 12. Тогава търсената вероятност е

$$p = \frac{(12 * 2) * (5 - 3)!}{5!} = 0.4.$$

Задача 2.4.3 *При провеждане на избори има двама кандидати, като за първия са пуснати n бюлетини, а за втория m, $n > m$. Каква е вероятността при преброяване на бюлетините броят на преброените гласове, подадени за първия кандидат, през цялото време да е по-голям от броя на гласовете, подадени за втория кандидат.*

Решение 2.4.3 Нека бюлетините са подредени по реда на подаване $\epsilon_1, \epsilon_2, ..., \epsilon_{n+m}$, като $\epsilon_i = 1$ ако бюлетината е за първия кандидат, $\epsilon_i = -1$ ако бюлетината е за втория кандидат.

Дефинираме

$$S_k = \sum_{i=1}^{k} \epsilon_i,$$

$S_n = n - m$.

Всяка подредба на бюлетините се представя чрез траектория, тръгваща от 0 и състояща се от $m + n$ скока, n от които положителни, а m отрицателни. Всяка траектория завършва в точката $n - m$ и може да се определи еднозначно от моментите в които има положителни скокове. Следователно броят на траекториите е $\binom{m+n}{n}$.

Нека A е събитието "при преброяването бюлетините на първия са винаги повече от бюлетините на втория". Тогава благоприятни за събитието A са тези траектории за които $S_1 = 1$ и не се допират до правата $S = 0$.

Броят на траекториите за които $S_1 = -1$ е $\binom{n+m-1}{n}$, тъй като трябва да се извършат n положителни скока, при възможни $n+m-1$. От редицата $\epsilon_1, \epsilon_2, ..., \epsilon_{n+m}$ можем да махнем ϵ_1, тъй като вече сме фиксирали $S_1 = -1$. Новите траектории ще завършват в точката $(n + m - 1, n - m + 1)$, тъй като имат един отрицателен скок по малко.

За да маркираме траекториите които се допират до правата $S = 0$, ще използваме т.н. метод на отражението. Всяка траектория допираща се до правата $S = 0$ я отразяваме симетрично относно $S = 0$, започвайки от първия момент на допиране. Новите траектории се състоят от $n + m - 1$ скока и ще завършват в точката, симетрична на $(n + m - 1, n - m + 1)$ спрямо $S = 0$. Тази точка е $(n + m - 1, m - n - 1)$. Нека x е броя на положителните,а y е броя на отрицателните скокове на отразените траектории. Тогава

$$x + y = m + n - 1$$

$$x - y = m - n - 1.$$

Следователно $y = n$, а $x = m - 1$. Тогава броя на траекториите които ще се допират до $S = 0$ ще е $\binom{n+m-1}{m-1}$. Така броя на благоприятните траектории е

$$\binom{n+m}{n} - \binom{n+m-1}{n} - \binom{n+m-1}{m-1}.$$

Следователно вероятността една траектория да е благоприятна е

$$P = \frac{\binom{n+m}{n} - \binom{n+m-1}{n} - \binom{n+m-1}{m-1}}{\binom{n+m}{n}} = 1 - \frac{\binom{n+m-1}{n} + \binom{n+m-1}{m-1}}{\binom{n+m}{n}} =$$

$$1 - \frac{2\frac{(n+m-1)!}{n!(m-1)!}}{\frac{(m+n)!}{n!m!}} = \frac{n-m}{m+n}.$$

Задача 2.4.4 *Да се намери вероятността случайно избрано естествено число да е*
а) четно
б) кратно на 5.

Решение 2.4.4 а) Да разгледаме първите N числа $1, 2, ..., N$ и нека $q(N)$ е броя на четните числа които не надминават N.

Имаме $N = 2q + r$, където $q = q(N) = [\frac{N}{2}]$ и $r \in 0, 1$. Можем да дефинираме вероятността на събитието A=„избраното число е четно“по следния начин:

$$P(A) = \lim_{N\to\infty} \frac{q(N)}{N} = \lim_{q\to\infty} \frac{q}{2q+r} = \frac{1}{2}.$$

Разглеждането на случая б) е напълно аналогично.

2.5 Геометрична вероятност

Нека извадковото пространство Ω е някакво геометрично множество, а разглежданото събитие A е негово подмножество. Тогава вероятността на A може да се дефинира по следния начин

$$P(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)},$$

където μ е някаква мярка, например площ.

Задача 2.5.1 Иглата на Бюфон. *Върху раирана покривка с разстояние между райетата a пускаме игла с дължина l. Да се намери вероятността иглата да пресече някое от райетата.*

Решение 2.5.1 Нека y е разстоянието от средата на иглата до най-близката линия от райетата, а x е ъгълът между направлението на иглата и нормалата към райетата. Тогава

$$\Omega = \left\{(x,y) : 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq y \leq \frac{a}{2}\right\},$$

$$A = \left\{(x,y) : 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq y \leq \frac{l}{2}\cos x\right\}.$$

В този случай

$$\mu\left(A\right) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{l}{2}\cos x dx = \frac{l}{2},$$

$$\mu\left(\Omega\right) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{a}{2}} dxdy = \frac{a\pi}{4}.$$

Следователно търсената вероятност е

$$P\left(A\right) = \frac{2l}{a\pi}.$$

Глава 3

Условна вероятност. Формула за пълната вероятност, формула на Бейс.

3.1 Условна вероятност

Нека B е събитие за което $P(B) > 0$. Условна вероятност на събитието A при условие B се дефинира по следния начин:

$$P(A \mid B) = \frac{P(AB)}{P(B)}.$$

Ако A и B са събития, като $P(A) > 0$ и $P(B) > 0$, тогава

$$P(AB) = P(A \mid B)P(B) = P(B \mid A)P(A). \tag{3.1}$$

Представянето (3.1) се нарича *формула за умножение на вероятности*. То може да се обобщи за повече от две събития по следния начин:

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{k} A_k\right) = P(A_1)...P(A_k \mid A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_{k-1}) \tag{3.2}$$

3.2 Формула за пълната вероятност

Използвайки адитивността на вероятностната мярка имаме, че

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{k} A_k\right) = \sum_{i=1}^{k} P(A_i),$$

където $A_1, ...A_k$ са две по две несъвместими събития.

Нека $H_1, ..., H_k$ образуват т.н. пълна група от събития, т.е. $\bigcup_{i=1}^{k} H_i = \Omega$, $H_i H_j = \emptyset$, $i, j = 1, ..., k$, $i \neq j$. Тогава всяко събитие A може да се представи във вида $A = \bigcup_{i=1}^{k} AH_k$.

Вероятността на събитието A може да се представи във вида

$$P(A) = \sum_{i=1}^{k} P(AH_i) = \sum_{i=1}^{k} P(H_i) P(A \mid H_i) \tag{3.3}$$

Представянето (3.3) се нарича *формула за пълната вероятност.*

3.3 Формула на Бейс

Ако е настъпило събитието A то вероятността $P(H_i \mid A)$ може да се представи чрез т.н. *формула на Бейс*:

$$P(H_i \mid A) = \frac{P(A \mid H_i) P(H_i)}{P(A)} = \frac{P(A \mid H_i) P(H_i)}{\sum_{i=1}^{k} P(H_i) P(A \mid H_i)} \tag{3.4}$$

Вероятностите $P(H_i \mid A)$ се наричат апостериорни вероятности на хипотезите H_i, $i = 1, ..., k$.

3.4 Задачи

Задача 3.4.1 *Вероятността даден стрелец да улучи една мишена е $\frac{2}{3}$. Ако улучи мишената при първия изстрел той получава правото на втори изстрел по втора мишена. Вероятността за улучване на двете мишени при двата изстрела е $\frac{1}{2}$. Да се пресметне вероятността за улучване на втората мишена, ако стрелецът е получил право на втори изстрел.*

Решение 3.4.1 Нека A е събитието *„стрелецът уцелва първата мишена“*, а B е събитието *„стрелецът уцелва втората мишена“*. Търсим вероятността на събитието B при условие A.

$$P(B \mid A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = 0.75.$$

Задача 3.4.2 *При всеки опит едно събитие настъпва с вероятност p. Опитите се провеждат последователно до настъпването на събитието. Да се намери вероятността събитието да настъпи на $k+1$ опит.*

Решение 3.4.2 Нека $P(B)$ е търсената вероятност. Тогава

$$P(B) = P\left(\overline{A}_1 ... \overline{A}_k A_{k+1}\right) = (1-p)^k p.$$

Задача 3.4.3 *Каква е вероятността да се получи несъкратима дроб, ако числителят и знаменателят са числа, които се избират от редицата на естествените числа по случаен начин и независимо едно от друго.*

Решение 3.4.3 За да се получи несъкратима дроб трябва и числителят и знаменателят да не се делят на едно и също просто число. Позовавайки се на Решение 2.4.4 вероятността едно случайно избрано число да се дели на дадено число k е $\frac{1}{k}$. Тогава вероятността двете числа да се делят на едно и също просто число е $\frac{1}{k^2}$, k-просто. Следователно търсената вероятност е

$$\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)... = \prod_{k\neq 1}\left(1-\frac{1}{k^2}\right),$$

където k е просто число.

Задача 3.4.4 *Играча А получава информация „да“или „не“и я съобщава на играча Б. После Б я съобщава на В, а В на Г, който обявява получената информация. Всеки от играчите казва истината в един от три случая. Каква е вероятността А да е казал истината, ако Г е съобщил верния резултат.*

Решение 3.4.4 Нека A е събитието „А казва истината“, а D е събитието „Г казва истината“. D настъпва когато: всеки от четиримата казва истината, кои да е двама казват истината, а другите двама лъжат, или лъжат и четиримата. Тогава

$$P(D) = \left(\frac{1}{3}\right)^4 + \binom{4}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{41}{3^4}.$$

Ако А е казал истината, то

$$P(D \mid A) = \left(\frac{1}{3}\right)^3 + \binom{3}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{13}{3^3}.$$

$$P(DA) = P(A)P(D \mid A) = \frac{13}{3^4}.$$

Тогава

$$P(A \mid D) = \frac{P(DA)}{P(D)} = \frac{13}{41}.$$

Задача 3.4.5 *Кутия съдържа n билета, от които $m \leq n$ са печеливши. По случаен начин n играчи избират по един билет. Еднакви ли са шансовете за печалба на всички играчи? Кога е най-изгодно да се изтегли билет?*

Решение 3.4.5 Нека A_k е събитието *„изтегля се печеливш билет, след като от кутията са извадени k билета“*. За предходните $k-1$ опита имаме следните хипотези: $H_k s$ *-s от изтеглените k билета печелят*, $s = 0, ..., k$.

Тогава вероятността

$$P\left(H_k s\right) = \frac{\binom{m}{s}\binom{n-m}{k-s}}{\binom{n}{k}}$$

за $s = 0, ..., k$ и 0 при $s > m$.

Условната вероятност на събитието A_k е $P\left(A_k \mid H_k s\right) = \frac{m-s}{n-k}$.

Прилагайки формулата за пълната вероятност получаваме

$$P\left(A_k\right) = \sum_{s=0}^{k} \frac{\binom{m}{s}\binom{n-m}{k-s}}{\binom{n}{k}} \frac{m-s}{n-k} = \frac{m}{n} \sum_{s=0}^{k} \frac{\binom{m-1}{s}\binom{n-m}{k-s}}{\binom{n-1}{k}} = \frac{m}{n}.$$

Следователно шансовете за печалба са еднакви.

Задача 3.4.6 *Последователно се хвърля монета. Ако се падне лице, играчът печели 1 лв., ако се падне герб, губи 1 лв. Началния капитал на играча е x лв. Играта завършва или когато играчът фалира, или когато събере предварително определена сума α. Каква е вероятността играчът да се разори?*

Решение 3.4.6 Нека $p\left(x\right)$ е вероятността играчът да се разори ако притежава x лв. Тогава вероятността да се разори при условие че е спечелил на първия ход е $p\left(x+1\right)$, а ако е загубил е $p\left(x-1\right)$.

Събитията $B_1 =$*„играчът печели на първия ход“* и $B_2 =$*„играчът губи на първия ход“* образуват пълна група от събития.

Нека A е събитието *„играчът се разорява“*. Тогава $P\left(A \mid B_1\right) = p\left(x+1\right)$ и $P\left(A \mid B_2\right) = p\left(x-1\right)$. Имайки предвид, че $P\left(B_1\right) = P\left(B_2\right) = \frac{1}{2}$ и прилагайки формулата за пълната вероятност получаваме, че

$$p\left(x\right) = \frac{1}{2}\left(p\left(x+1\right) + p\left(x-1\right)\right),$$

където $0 \leq x \leq \alpha$. Използвайки началните условия $p\left(0\right) = 1$ и $p\left(\alpha\right) = 0$, получаваме, че

$$p\left(x\right) = -\frac{1}{\alpha}x + 1.$$

Задача 3.4.7 *Двама души играят до победа, като за това е необходимо първият да спечели m, а вторият n партии. Първият играч печели всяка партия с вероятност p, а вторият с вероятност $q = 1 - p$. Да се пресметне вероятността първият играч да спечели цялата игра.*

Решение 3.4.7 Първият печели цялата игра ако спечели първите m игри, или ако от първите $m+1$ игри загуби една игра, и т.н. Тогава търсената вероятност е

$$P = p^m + \binom{m}{1} q p^m + \binom{m+1}{2} q^2 p^m + \cdots + \binom{m+n-2}{n-1} q^{n-1} p^m =$$

$$p^m \left(1 + \binom{m}{1} q + \cdots + \binom{m+n-2}{n-1} q^{n-1} \right).$$

Биномните коефициенти изразяват факта, че моментите в които първия играч печели се разпределят между изиграните игри.

Задача 3.4.8 *Всяка от n урни съдържа k бели и m черни топки. От първата урна вадим една топка и я пускаме във втората урна, след това от втората урна вадим топка и я пускаме в третата и т.н. Каква е вероятността от последната урна да се извади бяла топка.*

Решение 3.4.8 Нека A_w^i е събитието „от i-тата урна вадим бяла“, а A_b^i - „от i-тата урна вадим черна“. Вероятностите на тези събития за първата урна ще са съответно: $P\left(A_w^1\right) = \frac{k}{k+m}$ и $P\left(A_b^1\right) = \frac{m}{k+m}$.

Тогава вероятността да извадим бяла топка от втората урна ще е

$$P\left(A_w^2\right) = P\left(A_w^2 \mid A_w^1\right) P\left(A_w^1\right) + P\left(A_w^2 \mid A_b^1\right) P\left(A_b^1\right) =$$

$$\frac{k+1}{k+m+1} . \frac{k}{k+m} + \frac{k}{k+m+1} . \frac{m}{k+m} = \frac{k}{k+m}.$$

Аналогично $P\left(A_b^2\right) = \frac{m}{k+m}$. Следователно търсената вероятност не зависи от n и е равна на $\frac{k}{k+m}$.

Задача 3.4.9 *Всяка от n урни съдържа k бели и m черни топки. От първата урна вадим една топка и я пускаме във втората урна, след това от втората урна вадим топка и я пускаме в третата и т.н., като топката извадена от последната урна пускаме в първата. Каква е вероятността съставът на урните да не се е променил.*

Решение 3.4.9 Съставът на урните няма да се промени, ако каквато топка сме извадили от първата урна, такава топка вадим от всички следващи урни. Тогава ако A е събитието „съставът на урните не се е променил“, а B_1 и B_2 са събитията „от първата урна е извадена бяла топка“и „от първата урна е извадена черна топка“

$$P(A) = P(A \mid B_1) P(B_1) + P(A \mid B_2) P(B_2) = \frac{k(k+1)^{n-1} + m(m+1)^{n-1}}{(k+m)(k+m+1)^{n-1}}$$

Задача 3.4.10 *През точка O от вътрешността на триъгълник прекарваме произволна права l. Всеки от върховете на триъгълника причисляваме само към една от страните му. Нека вероятностите l да пресече всяка от страните му са p_1, p_2 и p_3. Да се докаже, че $p_1 + p_2 + p_3 = 2$.*

Решение 3.4.10 Нека $p_i = P(A_i)$, $i = 1, 2, 3$. Имаме $A_1A_2 = \overline{A}_3$; $A_2A_3 = \overline{A}_1$; $A_1A_3 = \overline{A}_2$. Следователно $P(A_1A_2) = 1 - p_3$, $P(A_3A_2) = 1 - p_1$, $P(A_1A_3) = 1 - p_2$, освен това $P(A_1A_2A_3) = P\left(\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3\right) = 0$. Тогава

$$0 = P(A_1A_2A_3) = P\left(\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3\right) = 1 - P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) =$$

$$1 - P(A_1) - P(A_2) - P(A_3) + P(A_1A_2) + P(A_1A_3) + P(A_2A_3) =$$

$$1 - p_1 - p_2 - p_3 + (1 - p_1) + (1 - p_2) + (1 - p_3) =$$

$$4 - 2p_1 - 2p_2 - 2p_3 = 2(2 - p_1 - p_2 - p_3).$$

Следователно $p_1 + p_2 + p_3 = 2$.

Задача 3.4.11 *С помощта на вероятностни разсъждения да се покаже, че $(1 - x^m)^n + (1 - (1 - x)^n)^m \geq 1$, за $x \in [0, 1]; m, n \in N$.*

Решение 3.4.11 Нека да разгледаме правоъгълна таблица с n реда и m стълба. Хвърляме неправилна монета, като вероятността да се падне лице е $1 - x$, а вероятността за герб е x. Във всяка от клетките на таблицата записваме резултата от едно хвърляне. Тогава x^m означава в произволен ред да има само гербове, а $1 - x^m$ е вероятността в произволен ред да има поне едно лице. Следователно вероятността във всички редове да има поне едно лице е $(1 - x^m)^n$. Аналогично $(1 - (1 - x)^n)^m$ е вероятността във всеки стълб да има поне един герб. Нека разгледаме събитията A=поне един герб във всеки стълб и B=поне едно лице във всеки ред. За тях $A \cup B = \Omega$.

$$1 = P(\Omega) = P(A \cup B) \leq P(A) + P(B) = (1 - x^m)^n + (1 - (1 - x)^n)^m.$$

Задача 3.4.12 *Да предположим, че вероятността да се роди момче или момичи е една и съща. Тогава ако едно семейство има две деца, каква е вероятността двете да са момичета ако*

а) ако по - голямото дете е момиче;

б) ако поне едното е момиче.

Решение 3.4.12 Ако по - голямото е момиче, то тогава вероятността двете да са момичета е равна на вероятността второто да е момиче, следователно е $\frac{1}{2}$.

Ако означим с A събитието „първото дете е момиче“, а с B - „второто дете е момиче“, то търсим вероятността

$$P\left(AB \mid A\bigcup B\right) = \frac{P\left(AB\right)}{P\left(A\bigcup B\right)}$$

$$= \frac{P\left(AB\right)}{P\left(A \setminus B\right) + P\left(B \setminus A\right) - P\left(AB\right)} = \frac{1}{2}.$$

Задача 3.4.13 *Хвърлят се три зарчета. Каква е вероятността едно и също число да се появи точно на две от тях.*

Задача 3.4.14 *От тесте с 52 карти по случаен начин се изтеглят две.*

а) Каква е вероятността те да са от един и същ номинал?

б) Каква е вероятността те да са от един и същ номинал при условие, че са от различни бои?

Решение 3.4.12

Глава 4

Независимост

Събитията $A_1, A_2, \cdots, A_n$ се наричат независими в съвкупност, ако за всяко k, $2 \leq k \leq n$ е изпълнено

$$P\left(A_{i_1} A_{i_2} \cdots A_{i_k}\right) = P\left(A_{i_1}\right) P\left(A_{i_2}\right) \cdots P\left(A_{i_k}\right), \tag{4.1}$$

където $1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq n$.

При $k = 2$, събитията A_1, A_2 са независими, ако

$$P\left(A_1 A_2\right) = P\left(A_1\right) P\left(A_2\right). \tag{4.2}$$

Ако (4.1) е изпълнено само при $k = 2$, то събитията се наричат независими две по две.

4.1 Пример

Ако две събития A и B са независими и всяко от тях има положителна вероятност, то те не са несъвместими. Това следва просто от факта, че $P\left(AB\right) = P\left(A\right) P\left(B\right) > 0$, следователно $AB \neq \emptyset$.

Лесно може да се провери, че ако A и B са независими, то независими ще бъдат и двойките от събития A и $\overline{B}$, $\overline{A}$ и $\overline{B}$.

Независимостта на две събития зависи предимно от вероятностната мярка дефинирана върху тях. Като пример за това да разгледаме пространството $\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$, и двете събития $A = \{1, 2\}$ и $B = \{1, 3\}$. Ако вероятностната мярка е равномерно разпределена върху Ω, то събитията A и B са независими. В случай, че вероятността има следното разпределение: $p_1 = \frac{1}{4}, p_2 = p_3 = \frac{1}{8}, p_4 = \frac{1}{2}$, тогава събитията не са независими.

Задача 4.1.1 *Хвърлят се два зара. Нека A_1 е събитието „на първия зар се пада нечетно число“, A_2 е „на втория зар се пада нечетно число“,* *а A_3 е „сумата от падналите се точки е нечетна“. Независими ли са събитията две по две, а в съвкупност?*

Решение 4.1.1

$$P(A_1) = P(A_2) = P(A_3) = \frac{1}{2}.$$

$P(A_1A_2) = P(A_1A_3) = P(A_2A_3) = 0.25$, следователно събитията са независими две по две.

Тъй като $P(A_1A_2A_3) = 0 \neq 0.5^3$, то събитията не са независими в съвкупност.

Задача 4.1.2 *Пространството от елементарните събития Ω съдържа N елемента. При какво най-голямо n върху подмножествата на Ω може да се дефинира вероятност P и събития $A_1, A_2, \cdots, A_n$, които да са независими в съвкупност и $0 < P(A_i) < 1, i = 1, \cdots, n$.*

Решение 4.1.2 Нека $A_1, A_2, \cdots, A_n$ са такива събития, че изпълняват условията на задачата. За произволна n-орка $(\epsilon_1, \cdots, \epsilon_n)$, $\epsilon_i = 0, 1$, имаме, че $P\left(\bigcap_{i=1}^n A_i^{(\epsilon_i)}\right) \geq 0$, където $A_i^{(0)} = A_i$, $A_i^{(1)} = \overline{A}_i$.

От тук следва, че $\bigcap_{i=1}^n A_i^{(\epsilon_i)} \neq \emptyset$. Тъй като при $(\epsilon'_1, \cdots, \epsilon'_n) \neq (\epsilon_1, \cdots, \epsilon_n)$ събитията $\bigcap_{i=1}^n A_i^{(\epsilon'_i)}$ и $\bigcap_{i=1}^n A_i^{(\epsilon_i)}$ са непресичащи се, следователно съдържат различни елементи и броят на различните набори $(\epsilon_1, \cdots, \epsilon_n)$ е равен на 2^n. Тогава $N \geq 2^n$, $n \leq \log_2 N$.

Забележка: От факта, че $P(ABC) = P(A)P(B)P(C)$ не следва независимост в съвкупност на събития A,B и C. Това се вижда от следващия пример.

4.2 Пример

Нека пространството $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ и всички изходи са равновероятни. Ако разгледаме събитията $A = \{1, 2, 3, 4\}$ и $B = C = \{1, 5, 6, 7\}$, то имаме, че $P(ABC) = \frac{1}{8}$, но събитията не са независими.

Задача 4.2.1 *Върху n картончета са написани n реални числа. Картончетата се слагат в кутия и се изваждат едно след друго без връщане. Нека A_k е събитието „к-тото извадено число е по-голямо от предишните“.*

1. Да се покаже, че $\frac{P(A_k)=1}{k}$, $k = 1, \cdots, n$.

2. Да се докаже че $A_1, \cdots, A_n$ са независими в съвкупност.

Решение 4.2.1 1. При първите k опита са изтеглени k числа, които могат да се подредят по $k!$ начина. Най-голямото от тях ще бъде последно в $(k-1)!$ случая. Следователно

$$P\left(A_k\right)=\frac{(k-1)!}{k!}=\frac{1}{k}.$$

2. Разглеждаме вероятността $P\left(A_1\cdots A_n\right)$. Събитието $A_1\cdots A_n$ съответства на това картончетата да са изтеглени в нарастващ ред на числата написани на тях. Това можа да стане по един единствен начин от всичките $n!$ възможни. Тогава

$$P\left(A_1\cdots A_n\right)=\frac{1}{n!}=P\left(A_1\right)P\left(A_2\right)\cdots P\left(A_n\right).$$

Още повече, нека $1\leq i_1,\cdots,i_s\leq n$, $s\leq n$. Разглеждаме вероятността $P\left(A_{i_2}\mid A_{i_1}\right)$: вероятността, от i_2 изтеглени картончета i_2-рото да е най-голямо, при условие, че от първите i_1 картончета i_1-вото е най-голямо. Тъй -като i_2 е най-голямо в $(i_2-1)!$ случая, то тази вероятност $P\left(A_{i_2}\mid A_{i_1}\right)=\frac{1}{i_2}$.

С аналогични разсъждения $P\left(A_{i_3}\mid A_{i_1}A_{i_2}\right)=\frac{1}{i_3}$ и т.н. Следователно

$$P\left(A_{i_1}A_{i_2}\cdots A_{i_s}\right)=P\left(A_{i_1}\right)P\left(A_{i_2}\mid A_{i_1}\right)\cdots P\left(A_{i_s}\mid A_{i_1}A_{i_2}\cdots A_{i_{s-1}}\right)=$$

$$\frac{1}{i_1 i_2\cdots i_s.}$$

Следователно събитията са независими.

Глава 5

Дискретни сл. в. и техните характеристики. Схема на Бернули. Функция на разпределение. Примери за дискретни разпределения

5.1 Дискретни сл. в. и техните функции на разпределение

Казваме, че е дефинирана случайна величина, ако дефинирано съответствие $\xi : \Omega \to \ R$ за което прообраза на бореловата σ-алгебра се съдържа в σ-алгебрата породена от подмножествата на Ω. Ако случайната величина приема изброим (краен или безкраен) брой стойности тя се нарича дискретна и непрекъсната в противен случай.

Дискретните случайни величини могат да се дефинират по следния начин:

$$\begin{array}{ccccc} \xi & x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ p & p_1 & p_2 & \cdots & p_n \end{array}$$

където $\{x_i\}_1^n$ са стойностите които приема случайната величина ξ, а $\{p_i\}_1^n$, $\sum_{i=1}^n p_i = 1$ са вероятностите, с които приема тези стойности.

Основна характеристика на случайните величини се явява тяхната функция на разпределение. Тя се дефинира по следния начин:

$$F_\xi (x) = P (\xi \leq x) .$$

Така дефинираната функция еднозначно (с точност до еквивалентност) определя дадена случайна величина.

Задача 5.1.1 *Да се намери функцията на разпределение на случайната величина*

ξ	0	1	2	3	4
p	0.22	0.32	0.33	0.04	0.09

.

Също така по дадена функция на разпределение може да се намери случайната величина.

Нека имаме две случайни величини ξ и η. Тяхната съвместна плътност може да се дефинира чрез следната таблица:

$$\begin{matrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{m1} & p_{m2} & \cdots & p_{mn} \end{matrix},$$

където $p_{ij} = P\left(\{\xi = x_i, \eta = y_j\}\right)$.

Очевидно $p_i := P\left(\{\xi = x_i\}\right) = \sum_{j=1}^{n} P\left(\{\xi = x_i, \eta = y_j\}\right) = \sum_{j=1}^{n} p_{ij}$ и $\sum_{j=1}^{n} p_{ij} = 1$.

Разпределението $\{p_i\}_{i=1}^{n}$ се нарича маргинално разпределение на случайната величина ξ.

В случая когато ξ и η са независими имаме, че $P\left(\{\xi = x_i, \eta = y_j\}\right) = P\left(\{\xi = x_i\}\right) P\left(\{\eta = y_j\}\right)$, т.е. $p_{ij} = p_i p_j$.

Съвместната функцията на разпределение на ξ и η се дефинира така:

$$F_{\xi,\eta}(x, y) = P\left(\{\xi \le x, \eta \le y\}\right).$$

Можем да разгледаме условното разпределение на ξ при условие η:

$$P\left(\xi = i \mid \eta = j\right) = \frac{p_{ij}}{\sum_k p_{kj}},$$

където

$$P\left(\eta = j\right) = \sum_k p_{kj}.$$

Задача 5.1.2 *Дадени са случайните величини* $\xi : -1, 0, 1, 3$ *и* $\eta : -1, 2, 3$, *като* $P\left(\{\xi = x_i, \eta = y_j\}\right) = c\left(i^2 + j^2\right)$, *където* $c \ge 0$ *е неизвестна константа. Да се намерят константата* c, *както и маргиналните плътности на* ξ *и* η, *и вероятностите* $P\left(\{\xi = 0, \eta \le 2\}\right)$, $P\left(\{\xi \le 1, \eta > 2\}\right)$, $P\left(\{\xi + \eta > 2\}\right)$*!*

Задача 5.1.3 *Случайните величини ξ и η са независими и са дефинирани по следния начин:*

$$\begin{array}{ccc} \xi & -1 & 1 \\ p & 0.5 & 0.5 \end{array},$$

$$\begin{array}{cccc} \eta & 1 & 3 & 5 \\ p & 0.5 & 0.25 & 0.25 \end{array}.$$

Да се намери съвместната плътност на ξ и η, разпределенията на $\nu = 2\xi + \eta + 1$ и $\tau = \xi\eta$, както и тяхната съвместна плътност.

5.2 Схема на Бернули

Провеждат се серия от независими опити, като при всеки опит има единствено два възможни изхода A и $\overline{A}$. При всеки опит вероятността на събитието A е една и съща.

Събитията A и $\overline{A}$ могат да се интерпретират като *успех* и *неуспех* при провеждането на някакъв опит, а $p = P(A)$ и $q = P(A) = 1 - p$ като съответно вероятността за успех и неуспех при провеждането на опита.

Под **схема на Бернули** (n, p) ще разбираме поредица от n от гореописаните опити, с вероятност за успех p. Нека с ν_n означим броя на успехите в серия от n бернулиеви опита. Вероятността $P_n(k)$ за постигане на k успеха може да се пресметне по формулата

$$P_n(k) = P\{\nu_n = k\} = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}, \tag{5.1}$$

където $k = 0, ..., n$.

Ясно е, че вероятността $P_n(k)$ е коефициента пред s^k в развитието на полинома $(ps + q)^n$.

5.3 Биномно разпределение

Нека да разгледаме случайната величина ξ-*„брой успехи в серия от n бернулиеви опита“*. Тази случайна величина приема стойности $\xi : 0, 1, ...,$ с вероятности

$$P(\xi = k) = p_k = \binom{n}{k} q^{n-k} p^k$$

. За така дефинирана случайна величина казваме, че е биномно разпределенабиномно разпределение $Bi(n, p)$.

Ако $\xi \in Bi(n_1, p)$ и $\eta \in Bi(n_2, p)$ са независими случайни величини, тогава $\xi + \eta \in Bi(n_1 + n_2, p)$.

Наистина, нека $P(\xi = k) = p_k = \binom{n_1}{k} q^{n_1-k} p^k$, а $P(\eta = k) = q_k = \binom{n_2}{k} q^{n_2-k} p^k$, където $q = 1 - p$. Тогава

$$P(\xi + \eta = t) = \sum_{i=1}^{t} P(\xi = i, \eta = t - i)$$

и понеже ξ и η са независими

$$P(\xi + \eta = t) = \sum_{i=1}^{t} p_i q_{t-i} =$$

$$\sum_{i=1}^{t} \binom{n_1}{i} q^{n_1-i} p^i \binom{n_2}{i} q^{n_2-(t-i)} p^{t-i} =$$

$$p^t q^{n_1+n_2-t} \sum_{i=1}^{t} \binom{n_1}{i} \binom{n_2}{i}.$$

За да пресметнем сумата, разглеждаме следния модел: Имаме $n_1 + n_2$ клетки. В първите n_1 клетки пускаме по случаен начин i елемента $*$, а в вторите n_2 клетки пускаме $t - i$ $*$. За всяко от $\binom{n_2}{i}$ на брой разпределения на $*$ в първите n_1 клетки имаме $\binom{n_2}{t-i}$ разпределения на $*$ във вторите n_2 клетки. Тогава $\sum_{i=1}^{t} \binom{n_1}{i} \binom{n_2}{i}$ съответства на броя начини по който могат да се разпределят t на брой $*$ в $n_1 + n_2$ клетки. Следователно

$$\sum_{i=1}^{t} \binom{n_1}{i} \binom{n_2}{i} = \binom{n_1 + n_2}{t}.$$

Следователно $\xi + \eta \in Bi(n_1 + n_2, p)$.

Задача 5.3.1 *Един пушач винаги носи в джоба си две кутии кибрит. Когато иска да запали той взима клечка от случайно избрана от двете кутии. След известно време той остановява, че едната е празна. Каква е вероятността в този момент другата кутия да има k клечки, ако в началото и в двете кутии е имало по n клечки?*

Решение 5.3.1 Нека наречем едната кутия *успех*, а другата *неуспех*. Тогава трябва да се намери вероятността да има n на брой успеха и $n - k$ на брой неуспеха в серия от бернулиеви опити. Тази вероятност е

$$\binom{n + n - k}{n} \frac{1}{2^n} \frac{1}{2^{n-k}} = \binom{2n - k}{n} \frac{1}{2^{2n-k}}.$$

Задача 5.3.2 *Нека преди опита съществуват две равновероятни и единствено възможни хипотези относно вероятността за успех при един опит: $p = 1/2$ и $p = 2/3$. Коя от двете хипотези има по голяма апостериорна вероятност ако при провеждане на 200 независими опита са настъпили 116 успеха?*

Решение 5.3.2 Нека A е събитието it „116 успеха от 200 опита“. Апостериорните вероятности на двете хипотези са $P(H_1 \mid A)$ и $P(H_2 \mid A)$. Тогава имаме

$$\frac{P(H_1 \mid A)}{P(H_2 \mid A)} = \frac{P(H_1 A)\,\cancel{/}P(A)}{P(H_2 A)\,\cancel{/}P(A)} = \frac{P(A \mid H_1)\,\cancel{/}P(H_1)}{P(A \mid H_2)\,\cancel{/}P(H_2)} = \frac{\binom{200}{116}\frac{1}{2^{116}}\frac{1}{2^{84}}}{\binom{200}{116}\frac{2}{3^{116}}\frac{1}{3^{84}}} = \frac{3^200}{2^316} \approx 1.98.$$

5.4 Геометрично разпределение

Нека да разгледаме случайната величина ξ-*„брой неуспехи до поява на първи успех“* в серия от бернулиеви опити. Тази случайна величина приема стойности $\xi : 0, 1, ...,$ с вероятности $P(\xi = k) = p_k = q^k p$. За така дефинирана случайна величина казваме, че е геометрично разпределена $Ge(p)$.

Нека да изразим нейната функция на разпределение:

$$F_\xi(x) = P(\xi \le x) = 1 - P(\xi > x) = 1 - P(\xi \ge n+1) =$$

$$1 - \sum_{i=n+1}^{\infty} P(\xi = i) = 1 - \sum_{i=n+1}^{\infty} q^i p = 1 - p\frac{q^{n+1}}{1-q} = 1 - q^{n+1},$$

където $n = [x]$.

Задача 5.4.1 *Нека ξ и η са независими и еднакво геометрично разпределени случайни величини с параметри p и t. Да се намери функцията на разпределение на $\tau = \min[\xi, \eta]$.*

Решение 5.4.1

$$F_\tau(z) = P(\tau \le z) = 1 - P(\min[\xi, \eta] > z) =$$

$$1 - P(\xi > z, \eta > z) = 1 - P(\xi > z)\,P(\eta > z) =$$

$$1 - P(\xi \ge n+1)\,P(\eta \ge n+1) = 1 - (1-p)^{n+1}(1-t)^{n+1}.$$

Следователно $\tau \in Ge(pt)$.

5.5 Отрицателно биномно разпределение

Нека да разгледаме случайната величина ξ-*„брой неуспехи до поява на r-ти успех“* в серия от бернулиеви опити. Тази случайна величина приема стойности $\xi : 0, 1, ...,$ с вероятности $P(\xi = k) = \binom{k+r-1}{r-1} p^{r-1} q^k$. За така дефинирана случайна величина казваме, че има отрицателно биномно разпределение $NB(r, p)$.

Задача 5.5.1 *Каква е вероятността осмия човек чул някакъв слух да е петия повярвал, ако вероятността един човек да повярва е p.*

5.6 Хипер геометрично разпределение

Нека имаме N изделия, от които M са дефектни. Правим извадка с обем n и се интересуваме от броя на дефектните изделия в тази извадка. Нека ξ е случайната величина *„брой дефектни изделия в извадка с обем n“*.

Тогава $\xi : 0, 1, ..., \min[M, n]$, като вероятностите с които се приемат тези стойности са

$$p_k = P\{\xi = k\} = \frac{\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{k}}.$$

За такава случайна величина казваме, че е хипер геометрично разпределена $HG(N, M, n)$.

Задача 5.6.1 *Да се докаже, че при $N, M \to \infty$, като $\lim_{N\to\infty}(M/N) = p$, $0 < p < 1$, е изпълнено*

$$\lim_{N\to\infty} p_k = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

Решение 5.6.1

$$p_k = \frac{\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{k}}$$

$$= \frac{M!}{k!\,(M-k)!} \cdot \frac{(N-M)!}{(n-k)!\,(N-M-n+k)!} \cdot \frac{n!\,(N-n)}{N!}$$

$$= \binom{n}{k} \frac{M!}{(M-k)!} \cdot \frac{(N-M)!}{(N-M-n+k)!} \cdot \frac{(N-n)}{N!} =$$

$$= \binom{n}{k} \frac{M}{N} \frac{(M-1)!}{(M-k)!} \cdot \frac{(N-M)!}{(N-M-n+k)!} \cdot \frac{(N-n)}{(N-1)!} =$$

$$\vdots$$

$$= \binom{n}{k} \frac{M}{N} \frac{\frac{M}{N} - \frac{1}{N}}{1 - \frac{1}{N}} \frac{\frac{M}{N} - \frac{2}{N}}{1 - \frac{2}{N}} \cdots \frac{\frac{M}{N} - \frac{k-1}{N}}{1 - \frac{k-1}{N}}$$

$$\frac{1 - \frac{M}{N}}{1 - \frac{k}{N}} \frac{1 - \frac{M}{N} - \frac{1}{N}}{1 - \frac{k+1}{N}} \cdots \frac{1 - \frac{M}{N} - \frac{n-k-1}{N}}{1 - \frac{n-1}{N}}.$$

Тогава $\lim_{N\to\infty} p_k = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$.

5.7 Поасоново разпределение

Развитието на експонентата в ред на Тейлор има вида

$$e^x = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!}.$$

Тогава ако разделим на e^x ще получим

$$1 = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!} e^{-x},$$

при $x > 0$

Следователно по този начин можем да дефинираме случайна величина $\xi : 0, 1, 2, \cdots$ с вероятности

$$p_k = P(\xi = k) = \frac{\lambda^i}{i!} e^{-\lambda}.$$

За такава случайна величина казваме, че е поасоново разпределена $\xi \in Po(\lambda)$.

Задача 5.7.1 *Нека $\xi \in Po(\lambda_1)$ и $\eta \in Po(\lambda_2)$ са независими случайни величини. Да се докаже, че $\tau = \xi + \eta \in Po(\lambda_1 + \lambda_2)$.*

Решение 5.7.1

$$P(\tau = k) = P(\xi + \eta = k) =$$

$$\sum_{i=0}^{k} P(\xi = i, \eta = k - i) = \sum_{i=0}^{k} P(\xi = i) P(\eta = k - i) =$$

$$\sum_{i=0}^{k} \frac{{\lambda_1}^i}{i!} e^{-\lambda_1} \frac{{\lambda_2}^{k-i}}{k-i!} e^{-\lambda_2} = e^{-(\lambda_1+\lambda_2)} \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^{k} k! \frac{{\lambda_1}^i}{i!} \frac{{\lambda_2}^{k-i}}{k-i!} =$$

$$e^{-(\lambda_1+\lambda_2)} \frac{1}{k!} (\lambda_1+\lambda_2)^k.$$

Задача 5.7.2 *Да се докаже, че ако $n \to \infty$ и $p_n \to 0$, по такъв начин, че $p_n n = \lambda$, то*

$$\lim_{n\to\infty} \binom{n}{k} {p_n}^k (1-p_n)^{n-k} = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}.$$

Решение 5.7.2 Тъй-като $p_n = \frac{\lambda}{n}$ то

$$\binom{n}{k} {p_n}^k 1 - {p_n}^{n-k} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} {p_n}^k (1-p_n)^{n-k}$$

$$= \frac{\lambda^k}{k!} \left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k}.$$

Следователно

$$\lim_{n\to\infty} \binom{n}{k} {p_n}^k 1 - {p_n}^{n-k} = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}.$$

Задача 5.7.3 *Нека $\xi_1 \cdots \xi_m$ са независими случайни величини. Да се докаже, че*

а) ако $\xi_i \in Bi\,(n_i, p)\,, i = 1 \cdots m$ то

$$\xi_1 + \cdots + \xi_n \in Bi\,(n_1 + \cdots + n_m, p)$$

б) ако $\xi_i \in Po\,(\lambda)$ то

$$\xi_1 + \cdots + \xi_n \in Po\,(\lambda_1 + \cdots + \lambda_m)\,.$$

Решение 5.7.3 Доказателството се извършва по индукция. В случая на $m = 2$ подточка б) е разгледана по-горе. Подточка а) се разглежда аналогично (виж по-горе).

Задача 5.7.4 *Нека $\xi \in Po\,(\lambda)$ и $\eta \in Po\,(\mu)$ са независими случайни величини. Да се намери условното разпределение на ξ при условие, че $\xi + \eta = n$.*

Решение 5.7.4 Нека $0 \leq k \leq n$, $k, n \in N$. Тогава

$$P\{\xi = k \mid \xi + \eta = n\} = \frac{P\{\xi = k, \xi + \eta = n\}}{P\{\xi + \eta = n\}} =$$

$$\frac{P\{\xi = k\} P\{\xi + \eta = n \mid \xi = k\}}{P\{\xi + \eta = n\}} = \frac{\left(\lambda^k e^{-\lambda}/k!\right) P\{\eta = n - k\}}{\sum_{j=0}^{n} P\{\xi = j\} P\{\eta = n - j\}} =$$

$$\binom{n}{k}\left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)^k\left(\frac{\mu}{\lambda+\mu}\right)^{n-k}$$

Следователно търсеното разпределение е $Bi\left(n, \frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)$.

Задача 5.7.5 *Броят на проведените опити ξ е случаен и може да се мени от 0 до ∞, при което вероятността той да е равен на k е*

$$p_k = P(\xi = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}.$$

Всеки опит може да бъде успешен с вероятност p и неуспешен с вероятност $1 - p$. Да се построи разпределението на броя на успешните опити.

Решение 5.7.5 Нека η е броя на успешните опити.

$$P\{\eta = k\} = \sum_{k=m}^{\infty} P\{\eta = m \mid \xi = k\} P\{\xi = k\} = \sum_{k=m}^{\infty} \binom{k}{m} p^m q^{k-m} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} =$$

$$e^{-\lambda} \sum_{k=m}^{\infty} \binom{k}{m} p^m q^{k-m} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} \frac{(\lambda p)^m}{m!} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda q)^n}{n!} =$$

$$\frac{(\lambda p)^m}{m!} e^{-\lambda p}.$$

5.8 Полиномно разпределение

Провеждаме n независими опита, при всеки от които настъпва точно едно от събитията $A_1, \cdots, A_r$ с вероятности $p_1, \cdots, p_r$, $\sum_{i=1}^{r} p_i = 1$. Тогава вероятността събитието A_1 да настъпи k_1 на брой пъти, A_2 - k_2 на брой пъти и т.н. е

$$P_n(k_1, \cdots, k_r) = n! \prod_{i=1}^{r} \frac{1}{k_i!} {p_i}^{k_i}.$$

Съвкупността от всички такива числа се нарича полиномно разпределение. Тези вероятности са коефициентите пред ${s_1}^{k_1}, \cdots, {s_r}^{k_r}$ в развитието на

$$g\left(s_1, \cdots, s_r\right) = \left(p_1 s_1 + \cdots + p_r s_r\right)^n.$$

Ако се интересуваме каква е вероятността A_1 да е настъпило k пъти повече от A_2, тогава полагаме $s_1 = s$ и $s_2 = s^{-1}$. Търсената вероятност е коефициента пред s^k.

Ако търсим вероятността от номерата на настъпилите събития да е равна на някакво число k, тогава полагаме $s_i = s^i$ и търсената вероятност е коефициента пред s^k.

5.9 Числови характеристики на случайни величини

Математическо очакване на дискретната случайната величина ξ дефинирана чрез

$$\begin{array}{ccccc} \xi & x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ p & p_1 & p_2 & \cdots & p_n \end{array}$$

дефинираме като $E\xi = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i$. Математическото очакване представлява линеен оператор. Ако ξ и η са независими, то $E\xi\eta = E\xi E\eta$.

$E\xi^k = \sum_{i=1}^{n} x_i^k p_i$ наричаме k-ти момент на ξ.

$D\xi = E(\xi - E\xi)^2 = E\xi^2 - 2E\left(\xi E\xi\right) + E\xi^2 = E\xi^2 - \left(E\xi\right)^2$ наричаме дисперсия на ξ.

Свойствата на дисперсията са следствие от свойствата на математическото очакване. Едно важно свойство е:

$$D\left(\xi + \eta\right) = D\xi + D\eta + 2E\left(\xi - E\xi\right)\left(\eta - E\eta\right).$$

Числото $cov\left(\xi, \eta\right) = 2E\left(\xi - E\xi\right)\left(\eta - E\eta\right)$ се нарича ковариация на ξ и η. Ако ξ и η са независими, то $cov\left(\xi, \eta\right) = 0$.

Задача 5.9.1 *Да се намерят математическите очаквания и дисперсиите на случайните величини дефинирани в задачи 5.1.1, 5.1.2, 5.1.3.*

Задача 5.9.2 *Да се намерят математическите очаквания на поасоново и биномно разпределени случайни величини.*

Глава 6

Пораждащи функции

Ще разглеждаме дискретни случайни величини, приемащи положителни стойности

$$\begin{array}{cccccc} \xi & x_1 & x_2 & \cdots & x_n & \cdots \\ p & p_1 & p_2 & \cdots & p_n & \cdots \end{array}$$

където $\sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1$. Когато случайната величина приема краен брой стойности сумирането е крайно.

За тях можем да дефинираме следната функция:

$$h_\xi(s) = Es^\xi = \sum_{i=1}^{\infty} p_i s^i. \tag{6.1}$$

Такава функция натичаме пораждаща функция на моментите на случайната величина ξ. Редът (6.1) е абсолютно сходящ при $|s| \le 1$, следователно функцията $h_\xi(s)$ е аналитична в единичния кръг. Тъй като

$$p_n = \frac{h_\xi^{(n)}(0)}{n!},$$

то между пораждащите функции и дискретните случайни величини има еднозначно съответствие (с точност до еквивалентност).

6.1 Изразяване на моментите чрез пораждащата функция

Ако съществува $E\xi$, то

$$h'_\xi(1) = E\xi = \sum_{i=1}^{\infty} p_i i, \tag{6.2}$$

а ако съществуват моментите от k-ти ред то

$$h_{\xi}^{(k)}(1) = E\xi(\xi-1)\cdots(\xi-k+1). \tag{6.3}$$

Тогава дисперсията може да се изрази така:

$$D\xi = h_{\xi,,}(1) - \left(h'_{\xi}(1)\right)^2 + \left(h'_{\xi}(1)\right). \tag{6.4}$$

6.2 Пораждащата функция в серия от опити

Ако разгледаме серия от бернулиеви опити, при които вероятността за успех се мени от опит на опит и нека означим с p_i вероятността за успех на i-тия опит. Тогава вероятността за k успеха от n опита $P_n(k)$ е равна на коефициента пред s^k в развитието на пораждащата функция:

$$h(s) = \prod_{i=1}^{n}(p_i s + q_i) = \sum_{i=1}^{n} P_n(k)\, s^k.$$

Тогава вероятностите $P_n(k)$ могат да се намерят по следния начин:

$$P_n(k) = \frac{1}{k!}\frac{d^k h(s)}{ds^k}\,|_{s=0}\,.$$

Измежду числата $P_n(k)$ най-голямо е това число $P_n(m)$ за което $m = [(n+1)p]$, където с $[.]$ е означена цялата част на числото. Тогава имаме неравенствата

$$(n+1)p - 1 \le m \le (n+1)p.$$

С помощта на пораждащата функция лесно могат да изразят сложно комбинаторни твърдения (виж параграфа за полиномно разпределение).

Задача 6.2.1 *Да се намерят пораждащите функции на разпределенията дефинирани в глава 5. Използвайки представянията* (6.3) *и* (6.4) *да се намерят математическото очакване и дисперсията на тези разпределения.*

6.3 Композиция на разпределения

Нека $\xi_1, \cdots, \xi_n$ са независими случайни величини с пораждащи функции $h_{\xi}(s)$. Търсим пораждащата функция на $\xi_1 + \cdots + \xi_n$. Тъй като $\xi_1, \cdots, \xi_n$ са независими случайни величини, то $s^{\xi_1}, \cdots, s^{\xi_n}$ също ще са независими случайни величини, тогава по свойствата на математическото очакване имаме

$$Es^{\xi_1+\cdots+\xi_n} = Es^{\xi_1}\cdots s^{\xi_n} = \prod_{i=1}^{n} Es^{\xi_i},$$

следователно

$$h_{\xi_1+\cdots+\xi_n}(s) = \prod_{i=1}^{n} h_{\xi_i}(s).$$

От тук лесно следва задача 5.7.3 без да се прибягва до използването на формулата за пълната вероятност.

Задача 6.3.1 *Нека ξ е целочислена случайна величина с пораждаща функция $h(s)$. Да се намери пораждащата функция на случайната величина*

а) $\eta = \xi + 1$

б) $\eta = \xi + k$, *където k е цяло число*

в) $\eta = 2\xi$

Решение 6.3.1 Без ограничение на общността може да се счита, че ξ приема стойности от 0 до ∞.

а)

$$P\{\eta = i\} = P\{\xi = i-1\} = p_{i-1}.$$

Тогава

$$h_\eta(s) = \sum_{i=1}^{\infty} p_{i-1}s^i = s\sum_{i=0}^{\infty} p_i s^i = sh(s).$$

б) решава се аналогично на а).

в)

$$P\{\eta = 2i\} = P\{\xi = i\} = p_i.$$

Тогава

$$h_\eta(s) = \sum_{i=0}^{\infty} p_i s^{2i} = h\left(s^2\right).$$

Задача 6.3.2 *Нека ξ е целочислена случайна величина с пораждаща функция $h(s)$. Да се изрази функцията $g(s) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n s^n$ чрез $h(s)$, където*

а) $a_n = P\{\xi \le n\}$

б) $a_n = P\{\xi < n\}$

в) $a_n = P\{\xi \ge n\}$

г) $a_n = P\{\xi > n+1\}$

д) $a_n = P\{\xi = 2n\}$

Решение 6.3.2 Както и в предната задача можем да считаме, че ξ приема стойности от 0 до ∞.

а) В този случай

$$a_n = P\{\xi \leq n\} = \sum_{i=0}^{n} P\{\xi = i\} = \sum_{i=0}^{n} p_i.$$

Тогава

$$g(s) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n s^n = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{n} p_i s^n = \sum_{i=0}^{\infty} p_i \sum_{n=i}^{\infty} s^n =$$

$$\sum_{i=0}^{\infty} p_i s^i \sum_{n=0}^{\infty} s^n = \frac{h(s)}{1-s}.$$

б) В този случай

$$a_n = P\{\xi < n\} = \sum_{i=0}^{n-1} P\{\xi = i\} = \sum_{i=0}^{n-1} p_i.$$

Тогава

$$g(s) = \sum_{i=0}^{\infty} p_i \sum_{n=i+1}^{\infty} s^n = \frac{sh(s)}{1-s}.$$

в) В този случай

$$a_n = 1 - P\{\xi < n\} = 1 - \sum_{i=0}^{n-1} P\{\xi = i\} = 1 - \sum_{i=0}^{n-1} p_i.$$

Тогава

$$g(s) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n s^n = \sum_{n=0}^{\infty} s^n - s\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{n-1} p_i s^n = \frac{1 - sh(s)}{1-s}.$$

За подточки г) и д) разглеждането е аналогично.

Задача 6.3.3 *Нека ξ и η са целочислени случайни величини и нека случайния вектор $\zeta = (\xi, \eta)$ има разпределение $P\{\xi = i, \eta = j\} = p_{ij}$, $i, j = 0, 1, \cdots$.*

а) Да се изразят пораждащите функции $h_\xi(s)$ и $h_\eta(s)$ чрез пораждащата функция $h_\zeta(s_1, s_2)$.

б) Да се представи $h_{\xi+\eta}(s)$ чрез $h_\zeta(s_1, s_2)$.

в) Да се докаже, че $\xi \perp \eta \Longleftrightarrow h_\zeta(s_1, s_2) = h_\xi(s_1)\, h_\eta(s_2)$.

Решение 6.3.3 а) Маргиналното разпределение на ξ е $P\{\xi = i\} = \sum_{j=0}^{\infty} p_{ij}$. Тогава

$$h_\xi(s) = \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} p_{ij} {s_1}^i = h_\zeta(s_1, 1)$$

. Аналогично за $h_\eta(s)$.

б)

$$P\{\xi + \eta = i\} = \sum_{k=0}^{i} P\{\xi = i-k, \eta = k\} = \sum_{k=0}^{i} p_{i-k,k}.$$

Тогава според дефиницията за пораждаща функция имаме:

$$h_{\xi+\eta}(s) = \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{i} p_{i-k,k} s^i = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{i=k}^{\infty} p_{i,k} s^i =$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{\infty} p_{i,k} s^{i+k} = h_\zeta(s, s).$$

в) В едната посока твърдението е тривиално, имайки в предвид дефиницията за пораждаща функция. В другата посока то следва от това, че коефициентите пред съответните степени на s_1 и s_2 трябва да съвпадат.

6.4 Теорема за непрекъснатото съответствие

Нека $\xi_1, \xi_2, \cdots$ е редица от целочислени случайни величини с разпределения $p_k(n) = P\{\xi_n = k\}$ и пораждащи функции $h_n(s) = Es^{\xi_n}$.

За да бъде изпълнено, че за всяко $k = 0, 1, \cdots$

$$\lim_{n\to\infty} p_k(n) = p_k,$$

е необходимо и достатъчно за всяко $0 \le s < 1$ да е изпълнено

$$\lim_{n\to\infty} h_n(s) = h(s).$$

В задача 5.7.2 показахме, че биномното разпределение клони към поасоновото разпределение когато $p_n n = \lambda$. Този резултат може да се получи и чрез пораждащите функции.

Знаем, че пораждащата функция на биномното разпределение е $(p_n s + q)^n$. Тогава

$$(p_n s + q)^n = (p_n s + 1 - p)^n = \left(\frac{np_n s + n - np_n}{n}\right)^n =$$

$$\left(\frac{n - np_n(1-s)}{n}\right)^n = \left(\frac{n - \lambda(1-s)}{n}\right)^n = \left(1 - \frac{\lambda(1-s)}{n}\right)^n,$$

следователно

$$\lim_{n\to\infty} (p_n s + q)^n = e^{-\lambda(1-s)}.$$

Глава 7

Абсолютно непрекъснати разпределения

Нека $(\Omega, \mathrm{F}, \mathrm{P})$ е вероятностно пространство (множеството Ω е достоверното събитие, F е σ-алгебрата породена от подмножествата на Ω, а P е вероятностна мярка дефинирана в F). Нека (R_1, B_1) е бореловото измеримо пространство (R_1 е реалната права, а B_1 е σ-алгебрата породена от полуотворените интервали в R_1).

Случайна величина ξ наричаме функция, изобразяваща Ω в R_1, която притежава свойството измеримост:

$$\xi^{-1}(B) \in \mathrm{F},$$

където $B \in \mathrm{B}_1$.

Както и в дискретния случай може да се дефинира функцията на разпределение $F(x) = P\{\xi < x\}$, но в сега ще разглеждаме такива случайни величини за които функцията на разпределение е непрекъсната.

Нека $B \in \mathrm{B}_1$, тогава

$$P\{\xi \in B\} = \int_{R_1} I_B(x)\, dF_\xi(x),$$

където $I_B(x)$ е индикаторът на множеството B, а $F_\xi(x)$ е функцията на разпределение на ξ.

Ако $g(x) : (R_1, \mathrm{B}_1) \longrightarrow (R_1, \mathrm{B}_1)$ е измеримо съответствие и $\eta = g(\xi)$, тогава

$$F_\eta(x) = \int_{R_1} I_B(y)\, dF_\xi(y),$$

където $B = \{y : g(y) < x\}$.

Казваме, че функцията F е абсолютно непрекъсната, ако съществува функция f, интегруема върху R_1 в смисъл на Лебег, такава че

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(u)\, du,$$

тази функция f наричаме плътност на вероятностното разпределение. Ако имаме функция g, такава че $F(x) = \int_{-\infty}^{x} g(u)\, du$, то $g = f$ п.н.

Следователно необходимо и достатъчно условие една функция да е функция на плътност за някое разпределение е $f(u) \geq 0$ за п.в. $x \in R_1$ и

$$\int_{R_1} f(u)\, du = 1. \tag{7.1}$$

Тогава ако ξ има функция на разпределение $F_\xi(x)$, която е абсолютно непрекъсната, то ξ притежава плътност $f_\xi(x)$, като

$$P\{\xi \in B\} = \int_B f_\xi(x)\, dx.$$

Ако $y = g(x)$ е диференцируема функция, като $g'(x) \neq 0$ и $g(x) \in C(R_1)$, то $\eta = g(\xi)$ има плътност

$$f_\eta(x) = \begin{cases} \frac{f_\xi\left(g^{-1}(y)\right)}{|g'(g^{-1}(y))|} & \inf_{x\in R_1} g(x) < y < \sup_{x\in R_1} g(x) \\ 0 & else \end{cases}$$

Числото $x_p : P\{\xi < x_p\} \leq p \leq P\{\xi \leq x_p\}$ се нарича p-квантил, при $p = 1/2$ се нарича медиана.

Математическо очакване и дисперсия (както и моментите от произволен ред) могат да се дефинират аналогично на дискретния случай, като сумирането се замени с интегриране:

$$E\xi = \int_{R_1} x dF_\xi(x) = \int_{R_1} x f_\xi(x)\, dx \tag{7.2}$$

$$D\xi = \int_{R_1} (x - E\xi)^2 dF_\xi(x) = \int_{R_1} (x - E\xi)^2 f_\xi(x)\, dx \tag{7.3}$$

$$E\xi^k = \int_{R_1} x^k dF_\xi(x) = \int_{R_1} x^k f_\xi(x)\, dx \tag{7.4}$$

7.1 Равномерно разпределение

Казваме, че непрекъснатата случайна величина ξ е равномерно разпределена $U(a,b)$ в интервала $[a,b]$, ако нейната плътност на разпределение има вида

$$f_\xi(x) = \begin{cases} 0 & x < a \\ c & a \le x \le b \\ 0 & x > b \end{cases},$$

където c е такава константа, че да е изпълнено (7.1), т.е. $c = \frac{1}{b-a}$.

Тогава функцията на разпределение ще има вида:

$$F_\xi(x) = \begin{cases} 0 & x < a \\ \frac{x-a}{b-a} & a \le x \le b \\ 0 & x > b \end{cases}.$$

$$E\xi = \int_a^b x\frac{1}{b-a}dx = \frac{a+b}{2}.$$

$$D\xi = \int_a^b \left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2 \frac{1}{b-a}dx = \frac{1}{b-a}\int_a^b \left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2 dx =$$

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b \left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2 d\left(x - \frac{a+b}{2}\right) = \frac{1}{b-a}\frac{\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^3}{3}\Big|_a^b = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

Можем да изразим вероятността случайната величина да принадлежи на даден интервал (α,β):

$$P(\alpha < \xi < \beta) = \int_\alpha^\beta \frac{dx}{b-a} = \frac{\alpha-\beta}{b-a}.$$

7.2 Експоненциално разпределение

Казваме, че случайната величина ξ има експоненциално $E(\lambda)$ разпределение ако нейната плътност на разпределение има вида

$$f_\xi(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & x \ge 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}.$$

Тогава функцията на разпределение ще бъде

$$F_\xi(x) = \int_0^x \lambda e^{-\lambda u}du = 1 - e^{-\lambda x}.$$

За математическото очакване и дисперсията имаме:

$$E\xi = \int_0^x x\lambda e^{-\lambda u} du = \frac{1}{\lambda}.$$

$$E\xi^2 = \int_0^x x^2\lambda e^{-\lambda u} du = \frac{2}{\lambda^2}.$$

$$D\xi = E\xi^2 - E^2\xi = \frac{1}{\lambda^2}.$$

Нека да разгледаме следния модел. Дадено устройство започва да работи в момента t_0 и след време t дефектира. Нека T е случайната величина $t - t_0$, представляваща времето на безотказна работа на устройството. Тогава функцията на разпределение

$$F(t) = P(T < t)$$

определя вероятността за повреда в периода t.

Вероятността за безотказна работа в този период е

$$R(t) = P(T \geq t) = 1 - F(t).$$

Функцията $R(t)$ наричаме функция на надеждността.

Ако $F_\xi(x) = 1 - e^{-\lambda x}$ то $R(t) = e^{-\lambda t}$.

Нека A е събитието *„безотказна работа в интервала (t_{-1}, t_0)“* с продължителност t_{-1}, а B е събитието *„безотказна работа в интервала (t_0, t)“* с продължителност t. Тогава според горните разсъждения

$$P(A) = e^{-\lambda t_{-1}},$$

$$P(B) = e^{-\lambda t}.$$

Очевидно събитието A и събитието B са независими, защото

$$P(AB) = P(A)\,P(B) = e^{-\lambda(t_{-1}+t)}.$$

Тогава

$$P(B \mid A) = P(B),$$

което представлява отсъствие на последействие.

7.3 Нормално разпределение

Казваме, че случайната величина ξ е нормално $N\left(a, s^2\right)$ разпределена ако нейната вероятностна плътност има вида

$$f_\xi\left(x\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi s^2}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2s^2}}.$$

Нека да намерим математическото очакване.

$$E\xi = \int_{-\infty}^{\infty} xf\left(x\right)dx = \int_{-\infty}^{\infty} x\frac{1}{\sqrt{2\pi s^2}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2s^2}} dx.$$

Правим смяната

$$t = \frac{x-a}{s},$$

тогава $x = st + a$, $dx = sdt$.

$$E\xi = \frac{1}{s\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} s\left(st+a\right)e^{-\frac{t^2}{2}}dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left(st+a\right)e^{-\frac{t^2}{2}}dt =$$

$$\frac{s}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} te^{-\frac{t^2}{2}}dt + \frac{a}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}dt.$$

Интеграла

$$\int_{-\infty}^{\infty} te^{-\frac{t^2}{2}}dt = 0$$

защото функцията

$$te^{-\frac{t^2}{2}}$$

е нечетна, а интеграла

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}dt = 1$$

защото подинтегралната функция е плътност на нормално разпределение $N\left(0,1\right)$ и

$$\int_{-\infty}^{\infty} f\left(x\right)dx = 1.$$

Следователно $E\xi = a$.

Сега да намерим дисперсията.

$$D\xi = \int_{-\infty}^{\infty} \left(x - E\xi\right)^2 f\left(x\right)dx = \int_{-\infty}^{\infty} \left(x - E\xi\right)^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi s^2}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2s^2}} dx.$$

Отново правим смяната

$$t = \frac{x - E\xi}{s},$$

тогава $x = st + E\xi$, $dx = sdt$. Чрез интегриране по части получаваме

$$D\xi = \frac{s^2}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} t^2 e^{-\frac{t^2}{2}} dt = -\frac{s^2}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} t d e^{-\frac{t^2}{2}} =$$

$$-\frac{s^2}{\sqrt{2\pi}} \left[t e^{-\frac{t^2}{2}} \Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \right] =$$

$$-\frac{s^2}{\sqrt{2\pi}} \left[0 - \sqrt{2\pi} \right] = s^2,$$

следователно $D\xi = s^2$.

Плътността на нормалното разпределение има максимум в точката $E\xi$ и две инфлексни точки в $x = \pm E\xi$. Разпределението $N(0,1)$ се нарича стандартно нормално разпределение.

7.4 Гама разпределение

Нека дефинираме Гама функцията по следния начин

$$\Gamma(a) = \int_0^{\infty} x^{a-1} e^{-x} dx.$$

Този интеграл е сходящ и $\Gamma(n+1) = n!$ за целите числа n.

Казваме, че случайната величина ξ е Гама разпределена $\Gamma(\alpha, \beta)$ ако нейната плътност на разпределение има вида

$$f_\xi(x) = \begin{cases} \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\beta x} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}.$$

Нека да намерим моментите на така дефинираното разпределение.

$$E\xi^k = \int_0^{\infty} \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1+k} e^{-\beta x} dx.$$

Правим смяната $\beta x = t$, тогава $dt = \beta dx$.

$$E\xi^k = \frac{1}{\beta^k \Gamma(\alpha)} \int_0^{\infty} t^{\alpha-1+k} e^{-t} dt = \frac{1}{\beta^k \Gamma(\alpha)} \Gamma(\alpha + k).$$

Следователно $E\xi = \frac{\alpha}{\beta}$, и $D\xi = \frac{\alpha}{\beta^2}$.

7.5 Бета разпределение

Казваме, че случайната величина ξ е бета разпределена $B(p,q)$ ако нейната плътност има вида

$$f_\xi(x) = \begin{cases} \frac{\Gamma(p+q)}{\Gamma(p)\Gamma(q)} x^{p-1}(1-x)^{q-1} & x \in [0,1] \\ 0 & x \notin [0,1] \end{cases}.$$

Където

$$\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)} = \mathrm{B}(p,q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx$$

е т.н. бета функция.

Нека да намерим моментите на така дефинираната случайна величина.

$$E\xi^l = \frac{\Gamma(p+q)}{\Gamma(p)\Gamma(q)} \int_0^1 x^{p-1+l}(1-x)^{q-1}dx =$$
$$\frac{\Gamma(p+q)\Gamma(p+l)}{\Gamma(p)\Gamma(p+q+l)}.$$

При $l = 1, 2$ поради свойствата на гама функцията имаме

$$E\xi = \frac{p}{p+q}$$
$$D\xi = \frac{p(p+1)}{(p+q)(p+q+1)}.$$

7.6 Разпределение на Коши

Казваме, че случайната величина ξ има разпределение на Коши $K(a,\sigma)$ ако плътността на разпределение има вида

$$f_\xi(x) = \frac{1}{\pi\sigma}.\frac{1}{1+\left(\frac{x-a}{\sigma}\right)^2}.$$

Графиката на това разпределение е подобна на графиката на нормалното разпределение, но по-бавно се схожда към 0 при $x \to \infty$. Затова това разпределение няма математическо очакване.

7.7 χ^2 разпределение

Казваме, че случайната величина ξ е χ^2 разпределена с n степени на свобода ако тя има разпределение $\Gamma\left(\frac{n}{2}, \frac{1}{2}\right)$. Това разпределение може да се получи и като линейна комбинация на квадрати на нормално разпределени случайни величини.

7.8 Разпределение на Стюдент

Казваме че случайната величина ξ има разпределение на Стюдент $t(n)$, ако плътността на разпределение на ξ има вида

$$f(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\sqrt{n\pi}}\left[1 + \frac{x^2}{n}\right]^{-\frac{n+1}{2}}$$

$x \in \mathrm{R}$, $n \in \mathrm{Z}$.

При $n = 1$ се получава разпределението на Коши. При $n \geq 2$ $E\xi = 0$, при $n \geq 3$ $D\xi = \frac{n}{n-2}$.

Това разпределение може да се получи като функция на две независими случайни величини ξ и η, като $\xi \in \chi^2(n)$, а $\eta \in N(0,1)$, тогава $\zeta = \frac{\eta}{\sqrt{\frac{\xi}{n}}} \in t(n)$.

7.9 Разпределение на Фишер

Казваме, че случайната величина има разпределение на Фишер (F разпределение) $F(n,m)$ ако нейната плътност на разпределение има вида

$$f(x) = \frac{m^{m/2} n^{n/2} \Gamma\left(\frac{m+n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} x^{m/2-1}(mx+n)^{-\frac{m+n}{2}}$$

$x \geq 0$, $m, n \in \mathrm{Z}$. Тогава при $n \geq 3$ имаме $E\xi = \frac{n}{n-2}$.

Това разпределение може да се получи, ако $\xi \in \chi^2(m)$, а $\eta \in \chi^2(n)$, тогава

$$\zeta = \frac{\frac{\xi}{m}}{\frac{\eta}{n}} \in F(n,m).$$

7.10 Задачи

Задача 7.10.1 *Нека $\xi \in E(\lambda)$. Ако $[\xi]$ е цялата част на ξ, да се намери вероятността на събитието $A =$„$[\xi]$ е четно число“.*

Решение 7.10.1 Събитието A може да се представи като сума от несъвместими събития $A = \sum_{k=0}^{\infty} A_k$, където

$$A_k = \{[\xi] = 2k\} = \{2k \leq \xi < 2k+1\}.$$

Тогава

$$P(A) = \sum_{k=0}^{\infty} P(A_k).$$

$$P(A_k) = F(2k+1) - F(2k) = e^{-2k}\left(1 - e^{-1}\right)$$
$$P(A) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-2k}\left(1 - e^{-1}\right) = \frac{e}{e+1}.$$

Задача 7.10.2 *Нека случайната величина ξ приема неотрицателни стойности, има непрекъсната функция на разпределение $F(x)$ и нека $P\{\xi < x+y \mid \xi \geq y\} = P\{\xi < x\}$, $x \geq 0$, $y \geq 0$. Да се докаже, че ξ е експоненциално разпределена.*

Решение 7.10.2

$$P\{\xi < x+y \mid \xi \geq y\} = \frac{P\{y \leq \xi < x+y\}}{P\{\xi \geq y\}} = \frac{F(x+y) - F(y)}{1 - F(y)}.$$

Следователно

$$F(x) = \frac{F(x+y) - F(y)}{1 - F(y)},$$
$$1 - F(x+y) = (1 - F(x))(1 - F(y)).$$

Полагаме $H(x) = 1 - F(x)$. Тогава

$$H(x+y) = H(x)H(y).$$

Следователно $H(x) = e^{-\lambda x}$, $F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$.

Задача 7.10.3 *Нека случайната величина $\xi \in \Gamma(\alpha, 1)$, а $\eta \in Po(\lambda)$, α - произволно естествено число. Да се докаже, че $P\{\xi \geq \lambda\} = P\{\eta \leq \alpha - 1\}$.*

Решение 7.10.3

$$P\{\xi \geq \lambda\} = 1 - F(\lambda) = 1 - \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{\lambda} x^{\alpha-1}e^{-x}dx =$$
$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{\lambda}^{\infty} x^{\alpha-1}e^{-x}dx.$$

Интегригаме последователно по части и получаваме

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{\lambda}^{\infty} x^{\alpha-1}e^{-x}dx = -\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{\lambda}^{\infty} x^{\alpha-1}de^{-x} =$$
$$-\frac{1}{\Gamma(\alpha)}x^{\alpha-1}e^{-x}\Big|_{\lambda}^{\infty} + \frac{1}{\Gamma(\alpha-1)}\int_{\lambda}^{\infty} x^{\alpha-2}e^{-x}dx =$$
$$\cdots$$
$$\sum_{i=1}^{\alpha-1}\frac{1}{\Gamma(\alpha-i)}\lambda^{\alpha-i}e^{-x} =$$
$$\sum_{i=1}^{\alpha-1} P\{\eta = i\} = P\{\eta \leq \alpha - 1\}.$$

Задача 7.10.4 *Нека случайната величина ξ има функция на разпределение $F(x)$. Да се намери функцията на разпределение на случайната величина $\eta = F(\xi)$.*

Решение 7.10.4 Означаваме с $g(y) = \sup_x [x : F(x) < y]$, където $0 < y < 1$. Тъй като $F(x)$ е функция на разпределение, то $[x : F(x) < y] = (-\infty, g(y))$, при $F(x) = y$, $[x : F(x) < y] = (-\infty, g(y)]$, при $F(x) < y$.

В първия случай получаваме

$$P\{\eta < y\} = P\{F(\xi) < y\} = P\{\xi < g(y)\} = F(g(y)) = y,$$

а в другия случай

$$P\{\eta < y\} = P\{F(\xi) < y\} = P\{\xi \leq g(y)\} = F(g(y) + 0).$$

Откъдето търсеното твърдение е очевидно.

Задача 7.10.5 *Казваме, че случайната величина ξ е симетрична ако ξ и $-\xi$ имат едно и също разпределение. Да се изрази свойството симетричност чрез функцията на разпределение и плътността.*

Решение 7.10.5 От дефиницията за симетричност следва, че

$$F(x) = P\{-\xi > -x\} = 1 - P\{-\xi \leq -x\} = 1 - F(-x + 0).$$

Ако $F(x)$ е непрекъсната функция, то

$$F(x) = 1 - F(-x),$$

ако съществува вероятностна плътност $f = F'$, то $f(x) = f(-x)$.

Използвайки тези разсъждения може да се покаже, че нормалното разпределение, равномерното разпределение в интервала $(0, 1)$, гама разпределението, разпределението на Коши с параметър 0 са симетрични разпределения.

Задача 7.10.6 *Нека ξ и η са независими, експоненциално разпределени $E(\lambda)$. Да се намери разпределението на $\zeta = \min\{\xi, \eta\}$.*

Решение 7.10.6

$$P(\zeta < x) = P(\min\{\xi, \eta\} < x) =$$

$$1 - P(\min\{\xi, \eta\} > x) = 1 - P(\xi > x) P(\eta > x) =$$

$$1 - (1 - F(x))^2 = 1 - e^{-2\lambda x}$$

Следователно разпределението на ζ е също експоненциално, но с параметър 2λ.

Задача 7.10.7 *Нека* $\xi_n = max\{\eta_1, \cdots, \eta_n\}$, *където* $\eta_i, i = 1, \cdots, n$ *са независими и еднакво разпределени с функция на разпределение* $F(x) = 1 - x^{-\alpha}$ *за* $x > 0$ *и* 0 *в противен случай. Означаваме с* $\zeta_n = \frac{\xi_n}{n^{1/\alpha}}$. *Да се намери разпределението на* ζ_n *при* $n \to \infty$.

Решение 7.10.7

$$F_{\zeta_n}(x) = P\{\zeta_n < x\} = P\left\{\xi_n < n^{1/\alpha}x\right\} =$$

$$P\left\{max\{\eta_1, \cdots, \eta_n\} < n^{1/\alpha}x\right\} = \prod_{i=1}^{n} P\left\{\eta_i < n^{1/\alpha}x\right\} =$$

$$\prod_{i=1}^{n} F\left(n^{1/\alpha}x\right) = \prod_{i=1}^{n}\left(1 - \frac{x^{-\alpha}}{n}\right) \to e^{-x^{-\alpha}}.$$

Задача 7.10.8 *Нека* $\xi_n = max\{\eta_1, \cdots, \eta_n\}$, *където* $\eta_i, i = 1, \cdots, n$ *са независими и еднакво равномерно разпределени разпределени в интервала* $[0, 1]$ *Означаваме с* $\zeta_n = n(1 - \xi_n)$. *Да се намери разпределението на* ζ_n *при* $n \to \infty$.

Решение 7.10.8 Решението е аналогично на (7.10.7).

Задача 7.10.9 *Нека* $\xi_1, \cdots, \xi_n$ *са независими и еднакво разпределени случайни величини с плътност* $f_\xi(x)$ *и функция на разпределние* $F_\xi(x)$. *Подреждаме реализациите на случайните величини във вариационния ред* $\xi_{(1)} \leq \cdots \leq \xi_{(n)}$. *Да се намери разпределението на случайната величина* $\xi_{(r)}$. *Какво би било разпределението на случайната величина* $(F_\xi(\xi_{i_r}))_{(r)}$, *стоящa на* r*-то място във вариационния ред* $(F_\xi(\xi_{i_1}))_{(1)} \leq \cdots \leq (F_\xi(\xi_{i_n}))_{(n)}$.

Решение 7.10.9

Глава 8

Трансформации на случайни величини

Аналогично на едномерния случай можем да дефинираме многомерни случайни величини, като съответно тяхната функция на разпределение е многомерна. Тогава и функцията на плътността ще е многомерна функция, като е изпълнено

$$F_{(\xi_1,\cdots,\xi_n)}\left(x_1,\cdots,x_n\right)=\int_{-\infty}^{x_1}\int_{-\infty}^{x_2}\cdots\int_{-\infty}^{x_n}f_{(\xi_1,\cdots,\xi_n)}\left(u_1,\cdots,u_n\right)du_1du_2\cdots du_n.$$

Аналогично на дискретния случай се дефинират и маргиналните разпределения

$$f_{\xi_1}=\int_{-\infty}^{x_2}\int_{-\infty}^{x_3}\cdots\int_{-\infty}^{x_n}f_{(\xi_1,\cdots,\xi_n)}\left(u_1,\cdots,u_n\right)du_2du_3\cdots du_n.$$

$$f_{\xi_i}=\int_{-\infty}^{x_1}\cdots\int_{-\infty}^{x_{i-1}}\int_{-\infty}^{x_{i+1}}\cdots\int_{-\infty}^{x_n}f_{(\xi_1,\cdots,\xi_n)}\left(u_1,\cdots,u_n\right)du_1\cdots du_{i-1}du_{i+1}\cdots du_n.$$

Може да се дефинира и условно разпределение на една случайна величина спрямо друга:

$$f_{\xi|\eta}\left(x,y\right)=\frac{f_{\xi,\eta}\left(x,y\right)}{f_\eta\left(y\right)},$$

където f_η е маргиналното разпределение на η.

Тогава може да се дефинира условно математическо очакване, аналогично на дискретния случай, като

$$E\left(\xi\mid\eta\right)=\int_R xf_{\xi|\eta}\left(x,y\right)dx.$$

Нека $x, y \in R^n$, $y = g(x)$ е някакво обратимо изображение от R^n в R^n. Нека $\xi = (\xi_1, \cdots \xi_n)$ е случаен вектор с функция на плътността $f_\xi(x)$. Образуваме случайния вектор $\eta = g(\xi)$. Търсим разпределението на η. Според теоремата за смяна на променливите имаме

$$f_\eta(y) = f_\xi\left(g^{-1}(y)\right) \mid J \mid,$$

където J е якобиана на смяната $x = g^{-1}(y)$.

Аналогично на дискретния случай при независими случайни величини съвместната плътност е произведение от маргиналнте плътности.

8.1 Конволюция на независими случайни величини

Нека ξ и η са две независими случайни величини с плътности $f_\xi(x)$ и $f_\eta(y)$ съответно. Тогава съвместната плътност на ξ и η е

$$f_{(\xi,\eta)}(x, y) = f_\xi(x) f_\eta(y).$$

Правим смяната

$$\begin{array}{c} \zeta = \xi + \eta \\ \theta = \xi \end{array}$$

изразена чрез

$$\begin{array}{c} u = x + y \\ v = x \end{array},$$

чиято обратна има вида

$$\begin{array}{c} x = v \\ y = u - v \end{array},$$

с якобиан $J = -1$.

Тогава

$$f_{\zeta,\theta}(u, v) = f_\xi(v) f_\eta(u - v) \mid J \mid.$$

Следователно

$$f_\zeta(u) = \int_R f_\xi(v) f_\eta(u - v)\, dv. \tag{8.1}$$

Това представяне се нарича конволюция на случайните величини ξ и η, или на функциите $f_\xi(x)$ и $f_\eta(y)$.

8.2 Произведение на независими случайни величини

Нека ξ и η са две независими случайни величини с плътности $f_\xi(x)$ и $f_\eta(y)$ съответно. Тогава съвместната плътност на ξ и η е

$$f_{(\xi,\eta)}(x,y) = f_\xi(x)\, f_\eta(y)\,.$$

Правим смяната

$$\begin{array}{c} \zeta = \xi\eta \\ \theta = \xi \end{array}$$

изразена чрез

$$\begin{array}{c} u = xy \\ v = x \end{array},$$

чиято обратна има вида

$$\begin{array}{c} x = v \\ y = \frac{u}{v} \end{array},$$

с якобиан $J = -\frac{1}{v}$.

Тогава

$$f_{\zeta,\theta}(u,v) = f_\xi(v)\, f_\eta\left(\frac{u}{v}\right) \mid J \mid .$$

Следователно

$$f_\zeta(u) = \int_R f_\xi(v)\, f_\eta\left(\frac{u}{v}\right)\frac{1}{v}dv. \tag{8.2}$$

Това е представянето на плътността на произведението на случайните величини ξ и η.

8.3 Задачи

Задача 8.3.1 *Нека ξ и η са независими, експоненциално разпределени $E(\lambda)$. Да се намери разпределението на $\zeta = \frac{\xi}{\xi+\eta}$.*

Решение 8.3.1 Използваме смяната

$$\begin{array}{c} \zeta = \frac{\xi}{\xi+\eta} \\ \tau = \xi + \eta \end{array}$$

изразена чрез функцията

$$\begin{array}{c} u = \frac{x}{x+y} \\ v = x + y \end{array},$$

нейната обратна има вида

$$\begin{array}{c} x = uv \\ y = v - uv \end{array},$$

като якобиана е $J = v$.

Тъй като случайните величини са независими, съвместната плътност има вида

$$f_{\xi,\eta}(x,y) = \lambda^2 e^{-\lambda(x+y)}.$$

Следователно

$$f_{\zeta,\tau}(u,v) = \lambda^2 e^{-\lambda v} \mid v \mid .$$

Тогава маргиналната плътност е

$$f_{\zeta}(u) = \int_0^{\infty} \lambda^2 e^{-\lambda v} \mid v \mid dv.$$

След интегриране по части получаваме, че

$$f_{\zeta}(u) = 1,$$

откъдето следва че $\zeta \in U(0,1)$.

Задача 8.3.2 *Нека ξ и η са независими, нормално разпределени $N(0,\sigma^2)$. Да се намери разпределението на $\zeta = \frac{\xi}{\eta}$.*

Решение 8.3.2 Използваме смяната

$$\begin{array}{c} \zeta = \frac{\xi}{\eta} \\ \tau = \eta \end{array}$$

изразена чрез функцията

$$\begin{array}{c} u = \frac{x}{y} \\ v = y \end{array},$$

нейната обратна има вида

$$\begin{array}{c} x = uv \\ y = v \end{array},$$

като якобиана е $J = v$.

Съвместната плътност на ξ и η има вида

$$f_{\xi,\eta}(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}}.$$

Тогава съвместната плътност на ζ и τ е

$$f_{\zeta,\tau}(u,v) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{(uv)^2+v^2}{2\sigma^2}} \mid v \mid =$$

$$\frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{\frac{-v^2\left(1+u^2\right)}{2\sigma^2}} \mid v \mid .$$

Следователно маргиналната плътност на ζ има вида

$$\frac{1}{2\pi\sigma^2} \int_0^\infty e^{\frac{-v^2\left(1+u^2\right)}{2\sigma^2}} v dv = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{1+u^2},$$

където сме използвали, че интеграла е симетричен относно v.

Следователно ζ има разпределение на Коши.

Глава 9

Вериги на Марков

Верига на Марков с дискретен параметър наричаме редица от целочислени случайни величини $\{\xi_n, n \geq 0\}$, такива че за произволни $n, i_0, \cdots, i_{n-1}, i_n, i, j$, за които е дефинирана вероятността

$$P\{\xi_{n+1} = j \mid \xi_0 = i_0, \cdots, \xi_{n-1} = i_{n-1}, \xi_n = i\},$$

е изпълнено

$$P\{\xi_{n+1} = j \mid \xi_0 = i_0, \cdots, \xi_{n-1} = i_{n-1}, \xi_n = i_n\} = P\{\xi_{n+1} = j \mid \xi_n = i\}.$$

Такава верига на Марков може са се разглежда като множество от състояния, като даден процес прескача от състояние в състояние със съответните вероятности за преход.

Ако за всяко n е изпълнено

$$P\{\xi_{n+1} = j \mid \xi_n = i\} = p_{ij},$$

казваме, че веригата на Марков е хомогенна (стационарна). Ще разглеждаме само такива вериги. За тях матрицата $P = \{p_{ij}\}$ се нарича матрица на преходите. Вероятността p_{ij} е вероятността за преход от състояние i в състояние j. Ясно е, че

$$\sum_{j=1}^{\infty} p_{ij} = 1.$$

Тогава разглежданият процес е напълно дефиниран, ако знаем началното състояние и матрицата на преходите P.

Нека с $p_{ij}^{(n)}$ е вероятността за преход от състояние i в състояние j за n скока. Тогава казваме, че състоянието j е достижимо от състоянието i, ако за някое n $p_{ij}^{(n)} > 0$. Ако две състояния са взаимно достижими, то казваме, че са еквивалентни. Очевидно така дефинираната еквивалентност е релация на еквивалентност, която разделя състоянията на една верига на Марков на класове на еквивалентност.

Казваме, че едно състояние е периодично с период $d > 1$, ако най - малкият общ делител на всички n, за които $p_{ii}^{(n)} > 0$, е равен на d. Тогава ако две състояния са от един и същ клас на еквивалентност, то те ще бъдат периодични с един и същи период.

Нека
$$f_i^{(n)} = P\left\{\xi_n = i, \xi_k \neq i, k = 1, \cdots, n-1 \mid \xi_0 = i\right\}$$
е вероятността процесът да се върне в състояние i точно след n скока. Тогава ако i е периодично състояние, то $f_i^{(n)} = 0$, за $n \neq kd, k \in N$.

Тогава $f_i = \sum_{n=1}^{\infty} f_i^{(n)}$ е вероятността веригата когато и да е да се върне в състояние i. Състояние, за което $f_i = 1$, се нарича възвратно, а ако $f_i < 1$, се нарича преходно. Математическото очакване

$$\mu_i = \sum_{n=1}^{\infty} n f_i^{(n)}$$

се нарича средно време за връщане в състоянието i.

За всички цели положителни числа е вярно уравнението на Колмогоров - Чепмен
$$p_{ij}^{(m+n)} = \sum_{k=0}^{\infty} p_i^{(n)} p_{kj}^{(m)} = \sum_{k=0}^{\infty} p_i^{(m)} p_{kj}^{(n)}.$$

Ако това равенство се запише в матрична форма, ще приеме вида

$$P^{(n+m)} = P^{(m)} P^{(n)} = P^{(n)} P^{(m)}.$$

Тогава по индукция може да получим

$$P^{(n)} = P.P. \cdots .P = P^n.$$

Едно състояние е възвтарно тогава и само тогава, когато

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_{ii}^{(n)} = \infty.$$

Освен това $f_{ij}^{(0)} = 0$, $f_{ij}^{(1)} = p_{ij}$, $p_{ij}^{(n)} = \sum_{k=1}^{n} f_{ij}^{(k)} p_{jj}^{(n-k)}$, където $f_{ij}^{(n)}$ е вероятността системата за първи път да попадне в състояние j, ако началното състояние е i.

От тук се вижда, че поведението на веригата се определя като цяло от $p_{ij}^{(n)}$.

Казваме, че едно състояние е ергодично, ако е възвратно, такова че средното време за връщане е крайно, и не е периодично.

Както вече споменахме, една верига може да се разложи на класове на еквивалентност. Тогава ако една верига на Марков е неразложима, то всички нейни състояния са от еднакъв тип.

Всяко разпределение $\{\pi_i\}$, $i = 1, 2, \cdots$, което удовлетворява системата уравнения

$$\pi_j = \sum_{i=1}^{\infty} \pi_i p_{ij}$$

$j = 1, 2, \cdots$, се нарича стационарно разпределение на веригата.

Тогава една неразложима непериодична верига на Марков принадлежи на единия от два типа:

а) съставена е или само от преходни ($f_i < 1$), или само от нулеви възвратни състояния ($\mu_i = \infty$). В този случай

$$\lim_{n \to \infty} p_{ij}^{(n)} = 0$$

за всички състояния i, j и веригата няма стационарно разпределение;

б) съставена е само от ергодични състояния, тогава за всеки две състояния i и j

$$\lim_{n \to \infty} p_{ij}^{(n)} = \pi_j$$

$$\sum_{j=0}^{\infty} \pi_j = 1$$

и $\{\pi_j\}$ е единствено стационарно разпределение на веригата.

Друг критерий за ергодичност е, че една верига е ергодична, ако за корените на характеристичното уравнение $|P - \lambda E| = 0$, λ_i, е изпълнено, че $\lambda_0 = 1$ и $|\lambda_i| < 1$ за всички останали състояния.

Също така вярно е твърдението, че за една неразложима и непериодична марковска верига съществува стационарно разпределение тогава и само тогава, когато системата

$$\pi_j = \sum_{i=1}^{\infty} \pi_i p_{ij}$$

$j = 1, 2, \cdots$ притежава поне едно неотрицателно, ненулево ограничено решение за променливите π_j.

9.1 Задачи

Задача 9.1.1 *Да разгледаме марковска верига зададена с матрицата*

$$P = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

Да се провери дали тя е ергодична и да се намери нейното стационарно разпределение.

Решение 9.1.1 Очевидно $P^{2n} = E$, а $P^{2n-1} = P$. Тогава не съществува $\lim_{n\to\infty} P^n$, следователно веригата не е ергодична. За да намерим стационарното разпределение, решаваме системата уравнения

$$\begin{aligned} \pi_1 &= \pi_2 \\ \pi_2 &= \pi_1. \end{aligned}$$

Тогава стационарното разпределение е $\left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\}$ и очевидно то е единствено.

Задача 9.1.2 *Дадена е веригата на Марков, състояща се от състоянията* $0, 1, \cdots$, *с преходни вероятности:* $p_{01} = 1$, $p_{i,i+1} = p_{i,i-1} = \frac{1}{2}$. *Да се намери стационарното разпределение на веригата.*

Решение 9.1.2 Очевидно веригата е неразложима, тогава решавайки системата

$$\begin{aligned} \pi_0 &= \tfrac{\pi_1}{2} \\ \pi_1 &= \tfrac{\pi_0}{2} + \tfrac{\pi_1}{2} \\ \pi_2 &= \tfrac{\pi_1}{2} + \tfrac{\pi_3}{2} \\ &\vdots \end{aligned}$$

получаваме $2\pi_0 = \pi_1 = \pi_2 = \cdots$. Следователно

$$\sum_{i=1}^{\infty} \pi_i = \begin{cases} 0 & \pi_0 = 0 \\ \infty & \pi_0 \neq 0 \end{cases}$$

Следователно стационарно разпределение не съществува и веригата не е ергодична.

Задача 9.1.3 *Дадена е веригата на Марков състояща се от състоянията* $1, 2, 3, 4$, *и с матрица на преходите*

$$P = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Да се намери стационарното разпределение на веригата.

Решение 9.1.3 Веригата е неразложима и стационарното разпределение се намира, като се реши системата

$$\begin{array}{r} \pi_1 = \pi_1 + \frac{\pi_0}{2} \\ \pi_2 = \frac{\pi_3}{2} \\ \pi_3 = \frac{\pi_2}{2} \\ \pi_4 = \pi_4 + \frac{\pi_3}{2} \end{array}.$$

Тогава стационарното разпределение е $(p, 0, 0, 1-p)$.

Задача 9.1.4 *Модел на Еренфест. Два съда A и B, разделени със мембрана, съдържат общо a на брой молекули. В даден момент по случаен начин една молекула преминава през мембраната от единия съд в другия. Да се намери стационарното разпределение на системата.*

Решение 9.1.4 Нека в съда A в дадения момент n има k молекули (състояние к), в следващия момент системата ще премине в състояние $k-1$ или $k+1$ съответно с вероятности $p_{j,j+1} = 1 - \frac{j}{a}$ и $p_{j,j-1} = \frac{j}{a}$, защото вероятностите за преход на молекула от единия съд в другия са пропорционални на броя на молекулите в този съд.

Тогава стационарното разпределение се явява решение на системата

$$\begin{array}{r} \pi_0 = \frac{\pi_1}{a} \\ \pi_k = \left(1 - \frac{k-1}{a}\right)\pi_{k-1} + \frac{k+1}{a}\pi_{k+1} \quad k = 1, \cdots, a-1\,. \\ \pi_a = \frac{\pi_{a-1}}{a} \end{array}$$

Тогава стационарното разпределение може да се даде във вида $\pi_k = \binom{a}{k} 2^{-a}$.

Задача 9.1.5 *Дадена е веригата на Марков, определена от матрицата*

$$P = \begin{vmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & o \end{vmatrix}.$$

Да се провери дали тя е неразложима, периодична и да се определи стационарното разпределение.

Решение 9.1.5 Очевидно веригата е неразложима и периодична с период $d = 2$. За да намерим стационарното разпределение, решаваме системата

$$\begin{array}{r} \pi_1 = \frac{\pi_2}{2} + \frac{\pi_3}{2} \\ \pi_2 = \frac{\pi_1}{2} + \frac{\pi_3}{2} \\ \pi_3 = \frac{\pi_2}{2} + \frac{\pi_1}{2} \end{array}.$$

Следователно $\pi_1 = \pi_2 = \pi_3 = \frac{1}{3}$.

Предметен показалец