Съвместни, маргинални и условни (непрекъснати) разпределения.

- Съвместно разпределение на X и Y: $\int_a^b \int_c^d f_{XY}(x,y)dxdy = P(a \leq X \leq b, c \leq Y \leq d)$, $f_{XY}(x,y) \geq 0$, $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x,y)dxdy = 1$
- Маргинални разпределения на двумерно (X,Y) разпределение със съвместна плътност $f_{XY}(x,y)$: $f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x,y)dy$, $f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x,y)dx$
- Независимост: ако $f_{XY}(x,y) = f_X(x)f_Y(y)$ за всяко x и y.
- Математическо очакване: $E(H(X,Y)) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} H(x,y)f_{XY}(x,y)dxdy$, ако съществува $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} |H(x,y)|f_{XY}(x,y)dxdy$.
- Ковариация: $Cov(X,Y) = E((X-\mu_x)(Y-\mu_y)) = E(XY)-E(X)E(Y)$. Ако X и Y са независими ковариацията им е 0, обратното НЕ Е вярно.
- Корелационен коефициент: $\rho_{XY} = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{VarX}\sqrt{VarY}}$
- Условна плътност: $f_{X|y}(x) = f_{X|Y=y}(x) = \frac{f_{XY}(x,y)}{f_Y(y)}$
  условно математическо очакване: $E(X|Y=y) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_{X|y}(x)dx$
- Трансформация на променливи: (X,Y) са случайни величини със съвместна плътност $f_{XY}(x,y)$, а $U = g_1(X,Y)$, $V = g_2(X,Y)$, където g_1, g_2 дефинират взаимно еднозначна трансформация. Ако означим обратната трансформация с $X = h_1(U,V)$, $Y = h_2(U,V)$, то плътността на (U,V) тогава е

  $$f_{UV}(u,v) = f_{XY}(h_1(u,v), h_2(u,v))|J|,$$

  където

  $$|J| = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$$

  е якобианът на обратната трансформация.

ЗАДАЧИ:

1. У здравите индивиди на възраст между 20 и 29 години нивото на калций в кръвта X е между 8.5 и 10.5 мг/дл, а нивото на холестерол Y е между 120 и 240 мг/дл. Да предположим, че стойностите на (X, Y) са равномерно разпределени в този правоъгълник (т.е. $f_{XY}(x, y) = c$). Намерете c. Намерете вероятността даден човек да има калций между 9 и 10 и холестерол между 125 и 140. Намерете маргиналните разпределения. Независими ли са? Намерете очакванията, ковариацията, корелационния коефициент. *Отг.* 1/240; 15/240; 1/2, 2/240; 9.5, 180, 1710, 0.

2. Нека X и Y са съответно вътрешното и външното барометрично налягане в даден експеримент и тяхната съвместна плътност е $f_{XY}(x, y) = c/x$, $27 \leq y \leq x \leq 33$, $c = 1/(6 - 27\ln 33/27) \approx 1.72$. Намерете маргиналните разпределения, вероятността $P(X \leq 30, Y \leq 28)$, независими ли са, условните плътности, $P(X > 32|y = 30)$, $E(X|y = 30)$, $E(X|y)$. *Отг.* $c(1 - 27/x)$, $c(\ln 33 - \ln y)$, 0.15, $1/x(\ln 33 - \ln y)$, 0, 32, 31.48, $(33 - y)/(\ln 33 - \ln y)$.

3. Нека X и Y са независими равномерно разпределени случайни величини съответно в (0, 2) и (0, 3) и нека $U = X - Y$, $V = X + Y$. Намерете съвместната плътност на U и V.

4. Нека X и Y са случайни величини със съвместна плътност f_{XY}. Ако $U = X + Y$, докажете че $f_U(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(u - v, v)dv$. Ако $U = XY$, докажете че $f_U(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(u/v, v)|1/v|dv$.