

Непрекъснати разпределения.

- Плътност на непрекъснатата случайна величина $f(x)$:

$$- f(x) \geq 0$$

$$- \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$$

$$- P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)dx$$

- Функция на разпределение: $F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt$

$$P(a \leq X \leq b) = F(b) - F(a)$$

- Очакване: $E(H(x)) = \int_{-\infty}^{\infty} H(x)f(x)dx$, ако $\int_{-\infty}^{\infty} |H(x)|f(x)dx < \infty$

- Трансформация на променливи: X е случайна величина с плътност $f_X(x)$, а $Y = g(X)$, където g е строго монотонна и диференцируема функция. Плътността на Y тогава е

$$f_Y(y) = f_X(g^{-1}(y)) \left| \frac{dg^{-1}(y)}{dy} \right|$$

- Непрекъснато равномерно разпределение:

$$f(x) = \frac{1}{b-a}, \quad a < x < b; \quad E(e^{tX}) = \frac{e^{tb} - e^{ta}}{t(b-a)}; \quad EX = \frac{a+b}{2}; \quad VX = \frac{(b-a)^2}{12}$$

- Експоненциално разпределение:

$$f(x) = \frac{1}{\beta} e^{-x/\beta}, \quad x, \beta > 0; \quad E(e^{tX}) = \frac{1}{1 - \beta t}; \quad EX = \beta; \quad VX = \beta^2;$$

- Нормално разпределение:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}; \quad E(e^{tX}) = e^{\mu t + \frac{\sigma^2 t^2}{2}}; \quad EX = \mu; \quad VX = \sigma^2$$

- χ^2 -разпределение:

$$f(x) = \frac{1}{\Gamma(\gamma/2)2^{\gamma/2}} x^{\gamma/2-1} e^{-x/2}, \quad x > 0, \gamma > 0; \quad E(e^{tX}) = (1 - 2t)^{-\gamma/2};$$

$$EX = \gamma; \quad VX = 2\gamma; \quad \Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} z^{\alpha-1} e^{-z} dz; \quad \alpha > 0$$

ЗАДАЧИ:

1. Докажете, че времето на чакане до първа поява на поасоново събитие е експоненциално разпределено. Какъв е параметърът на това разпределение?
2. Ако X е нормално разпределена със средно μ и дисперсия σ^2 , докажете че:

$$P(-\sigma + \mu < X < \sigma + \mu) \approx 0.68$$

$$P(-2\sigma + \mu < X < 2\sigma + \mu) \approx 0.95$$

$$P(-3\sigma + \mu < X < 3\sigma + \mu) \approx 0.99$$

3. Намерете очакването на случайна величина със следната плътност:
 $f(x) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{1+x^2}$
4. Атомна електроцентрала излъчва радиоактивни емисии средно два пъти на месец. Намерете вероятността да изминат поне 3 месеца преди първата такава емисия.
5. В Калифорния годишно се усещат около 500 земетресения. Такива с разрушителна сила обаче, има средно веднъж годишно. Каква е вероятността да изминат поне 3 месеца до първото такава земетресение? Ако не е имало такава земетресение в продължение на 4 месеца, каква е вероятността да няма такава още поне 3 месеца?
Отг. $e^{-0.25} \approx 0.779$
6. Повечето галактики имат формата на плосък диск, като степента на плоскост е различна. В Млечния път газообразната маса е разположена близо до центъра на галактиката. Нека с X означим разстоянието от този център до дадено струпване на такава маса. То е нормално разпределено със средно 0 и стандартно отклонение

100 парсека. Направете графика на плътността на X , отбележете на графиката вероятността газообразната маса да е на разстояние до 200 парсека и намерете тази вероятност. Приблизително каква част от масата е на по-голямо разстояние от 250 парсека? За какво разстояние 20% от масата е поне толкова далече от центъра? Каква е п.ф.м. на X ? *Отг.* 0.9544; 1.24%; 128 p ; e^{5000t^2}

7. Направен е следния експеримент, изследващ пространствената памет на животни: в кръг са поставени осем симетрични тунела и в края на всеки има храна. Гладното животно се поставя в центъра на кръга и се брой в колко от първите осем влизания в тунелите, животното избира тунел, в който има все още храна. Проучването показва $\mu = 7.9$. Нормално ли е разпределението?
8. При определяне на разстояния по фотографски образ, вероятността за непренебрежима грешка е 0.05. Направени са 150 независими такива измервания. Нека X е броя на грешките. За да намерим вероятността за поне една такава грешка, може ли да се използва апроксимация с нормално разпределение? ($p \leq 0.5$, $np > 5$ или $p > 0.5$, $n(1 - p) > 5$) Каква е тази вероятност? Каква е приблизително вероятността за най-много три грешки? *Отг.* 0.9956; 0.0668
9. Средния брой самолети, излитащи или кацащи на летище О'Харе е един на всеки 40 секунди. Каква е приблизителната вероятност поне 75 (по-малко от 100) излитания и кацания да бъдат осъществени в рамките на един час? *Отг.* 0.9484; 0.8413
10. Нека с C означим температурата в градуси по Целзий, на която ще бъде изложен даден компютър и нека тя е равномерно разпределена в интервала (15, 21). Нека F е същата температура по Фаренхайт и $F = \frac{9}{5}C + 32$. Намерете плътността на F . *Отг.* $5/54$, $59 < x < 69.8$
11. Нека Z е стандартно нормално разпределена случайна величина. Намерете плътността на $Y = 2Z^2 - 1$.