(по *Конкретна математика*, Р. Греъм, Д. Кнут, О. Паташник)

Правилни зарове: $P_0 : P(1) = P(2) = P(3) = P(4) = P(5) = P(6) = 1/6$, $P_{00} =?$

Неправилни зарове: $P_1 : P(1) = P(6) = 1/4, P(2) = P(3) = P(4) = P(5) = 1/8$, $P_{11} =?$

Случайни величини: $S_1(\omega)$ - "брой точки на първия зар", $S_2(\omega)$ - "брой точки на втория зар", $S(\omega)$ - "сума от точките на двата зара", $Pr(\omega)$ - "произведение от точките на двата зара". Намерете разпределението на тези случайни величини за правилни и неправилни зарове.

- Независимост: $P(X = x, Y = y) = P(X = x)P(Y = y)$. Независими ли са S_1 и S_2? А S_1 и S? S и Pr?

- Средна стойност:

  - за редици: средно аритметично, медиана (разделя стойностите поравно - колкото по-големи, толкова и по-малки от нея), мода (най-често срещана стойност);
  - за случайни величини, съответно: $\sum\limits_{x\in X(\omega)} xP(X = x)$; $P(X \leq x) \geq 1/2, P(X \geq x) \geq 1/2$; $P(X = x) \geq P(X = x_1)$.

- Математическо очакване: $EX = \mu = \sum\limits_{\omega\in\Omega} X(\omega)P(\omega)$

  - $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$
  - $E(aX) = aE(X)$
  - за *независими* случайни величини $E(XY) = E(X)E(Y)$

  Какво е очакването на S_1, S_2, S, Pr, SPr?

- Дисперсия: $Var(X) = V(X) = D(X) = \sigma^2 = E((X - E(X))^2) = E(X - \mu)^2 = EX^2 - (EX)^2$

  - за *независими* сл. величини $V(X + Y) = VX + VY$
  - $\sqrt{VX} = \sigma$ се нарича *стандартно отклонение*

  Имате ваучър за два билета в следната лотария: всяка седмица се продават 100 билета, от които се тегли един, който печели 100 милиона. С този ваучър можете да купите билети от един или от два различни тиража. Коя стратегия бихте избрали? (Пресметнете разпределенията, очакването и дисперсията (стандартното отклонение) на печалбата в двата случая и направете анализ.)

- Неравенство на Чебишов: $P((X - EX)^2 \geq a) \leq \frac{VX}{a}, a > 0$

  Ако заместим $a = c^2 VX$, получаваме $P(|X - \mu| \geq c\sigma) \leq 1/c^2$, което означава, че поне 75% от стойностите на една случайна величина се намират в интервала $(\mu - 2\sigma, \mu + 2\sigma)$ и поне 99% от стойностите се намират в интервала $(\mu - 10\sigma, \mu + 10\sigma)$, съответно за $c = 2$ и $c = 10$.

  Ако хвърляме двойка зарове n пъти (при големи n) общата сума от точките ще е приблизително $7n$. По-точно от неравенството на Чебишов имаме, че за 99% от хвърлянията тази сума е в интервала $(7n - 10\sqrt{\frac{35}{6}n}, 7n + 10\sqrt{\frac{35}{6}n})$, което за 1 000 000 хвърляния е $(6976000, 7024000)$.

- Емпирично средно и дисперсия: $\hat{E}X = \frac{X_1+X_2+\ldots+X_n}{n}$,
  $\hat{V}X = \frac{X_1^2+X_2^2+\ldots+X_n^2}{n-1} - \frac{(X_1+X_2+\ldots+X_n)^2}{n(n-1)}$ $(E(\hat{V}X) = VX)$

  Оценка на X: $\hat{\mu} \pm \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}}$.

  При хвърляне на два зара е получена следната последователност: $(4,3), (5,3), (3,1), (6,4), (2,6), (5,6), (4,1), (5,1), (2,6), (4,3)$. Оценката за S е $\hat{\mu} = 7,4$, $\hat{\sigma} \approx 2,1$, $S : 7,4 \pm 0,7$.

- Средно и дисперсия на броя неподвижни точки на пермутация: нека означим с $F_n(\pi)$ броя неподвижни точки в пермутацията π. Тогава $F_n(\pi) = F_{n,1}(\pi) + F_{n,2}(\pi) + \ldots + F_{n,n}(\pi)$, където $F_{n,k}(\pi) = 1$, ако k е неподвижна точка за π и 0 в противен случай. За очакването получаваме

$$EF_n = EF_{n,1} + \ldots + EF_{n,n} = nP(F_{n,k} = 1) = n\frac{(n-1)!}{n!} = n/n = 1$$

  За дисперсията ($F_{n,k}$ не са независими!) имаме

$$E(F_n^2) = E(\sum_{k=1}^{n} F_{n,k})^2 = E(\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} F_{n,j}F_{n,k}) =$$

$$\sum_j \sum_k E(F_{n,j}F_{n,k}) = \sum_{1\leq k\leq n} E(F_{n,k}^2) + 2\sum_{1\leq j<k\leq n} E(F_{n,j}F_{n,k}),$$

$F_{n,k}^2 = F_{n,k}$, следователно $E(F_{n,k}^2) = E(F_{n,k}) = 1/n$, за $j < k$: $E(F_{n,j}F_{n,k}) = P(j \quad i \quad k \quad sa \quad nepod. \quad t.) = \frac{(n-2)!}{n!} = 1/n(n-1)$. Тогава $E(F_n^2) = \frac{n}{n} + \binom{n}{2}\frac{2}{n(n-1)} = 2,\ n \geq 2$. Следователно $V(F_n) = 2 - 1^2 = 1$ и $\sigma = 1$.

- Пораждащи функции: $G_X(z) = \sum\limits_{k\geq 0} P(X = k)z^k = \sum\limits_{\omega\in\Omega} P(\omega)z^{X(\omega)} = E(z^X)$

  Свойства:

  - $G_X(1) = 1$
  - $G'_X(1) = EX$
  - $G''_X(1) + G'_X(1) - (G'_X(1))^2 = VX$

    Пример: (дискретно) равномерно разпределение от ред n: случайната величина приема стойности $0, 1, 2, \ldots n-1$ с равна вероятност $1/n$. Тогава п.ф. е

    $$U_n(z) = \frac{1}{n}(1 + z + z^2 + \ldots + z^{n-1}) = \frac{1}{n}\frac{1 - z^n}{1 - z}, n \geq 1$$

    Да се определят моментите е по-лесно, ако използваме развитието в ред на Тейлър около 1-та:

    $$G(1 + t) = G(1) + \frac{G'(1)}{1!}t + \frac{G''(1)}{2!}t^2 + \frac{G'''(1)}{3!}t^3 + \ldots$$

    Използвайки това разлагаме U_n по степените на t и получаваме $U_n(t+1) = \frac{1}{n}\binom{n}{1} + \frac{1}{n}\binom{n}{2}t + \frac{1}{n}\binom{n}{3}t^2 + \ldots + \frac{1}{n}\binom{n}{n}t^{n-1}$, откъдето $U_n(1) = 1$, $U'_n(1) = \frac{n-1}{2} = EX$, $U''_n(1) = \frac{(n-1)(n-2)}{3}$ и $VX = \frac{n^2-1}{12}$
  - ако X и Y са независими $G_{X+Y}(z) = G_X(z)G_Y(z)$. Оттук лесно следват равенствата за средно и дисперсия на сума от (независими) случайни величини.

Пораждащи функции за зарове: $G_1(z) = \frac{1}{6}(z+z^2+z^3+z^4+z^5+z^6) = zU_6(z)$ и $G_2(z) = \frac{1}{36}(z^2+2z^3+3z^4+4z^5+5z^6+6z^7+5z^8+4z^9+3z^{10}+2z^{11}+z^{12}) = z^2(U_6(z))^2$. Намерете директно моментите, използвайки полученото за U_n.

- “Хвърляне на монети”. Разглеждаме процеси с два възможни изхода с вероятности съответно p (“успех”) и q (“неуспех”), като $p+q=1$. Тогава поражащата функция на сл. в. “успех” е $H(z) = q + pz$ (разпределение на Бернули). П. ф. на “брой успехи от n повторения” е $H(z)^n = (q+pz)^n = \sum\limits_{k\geq 0} \binom{n}{k} p^k q^{n-k} z^k$ (биномно разпределение) $(EX = np, VX = nqp)$. Разпределението на “необходимия брой опити до първия успех” (геометрично) има п. ф. $pz + qpz^2 + q^2pz^3 + \ldots = \frac{pz}{1-qz}$ $(EX = 1/p, VX = q/p^2)$. (Отрицателно биномно) разпределение на “необходим брой опити до n успеха” - $\left(\frac{p}{1-qz}\right)^n = \sum\limits_k \binom{n+k-1}{k} p^n q^k z^k = \sum\limits_k \binom{-n}{k} p^n (-q)^k z^k$ $(EX = n/p, VX = nq/p^2)$.

  Колко пъти е необходимо да се хвърли монета, за да се падне “лице” два пъти поред?

  Колко пъти е необходимо да се хвърли монета до първото срещане на последователността ГЛГГЛ?

ЗАДАЧИ:

1. Студенти от две групи хвърляли монета докато се падне “лице” два пъти поред. Студентите от първата група получили следните резултати: $3, 2, 3, 5, 10, 2, 6, 6, 9, 2$, а тези от втората: $10, 2, 10, 7, 5, 2, 10, 6, 10, 2$. Оценете математическото очакване и дисперсията, основавайки се (а) на данните от първата група; (б) на данните от втората група. *Отг.* $4.8, 8.6; 6.4, 12.5$

2. Нека $H(z) = F(z)/G(z)$ и $F(1) = G(1) = 1$. Означаваме $Mean(G) = G'(1)$, $Var(G) = G''(1) + G'(1) - (G'(1))^2$. Докажете, че $Mean(H) = Mean(F) - Mean(G)$, $Var(H) = Var(F) - Var(G)$

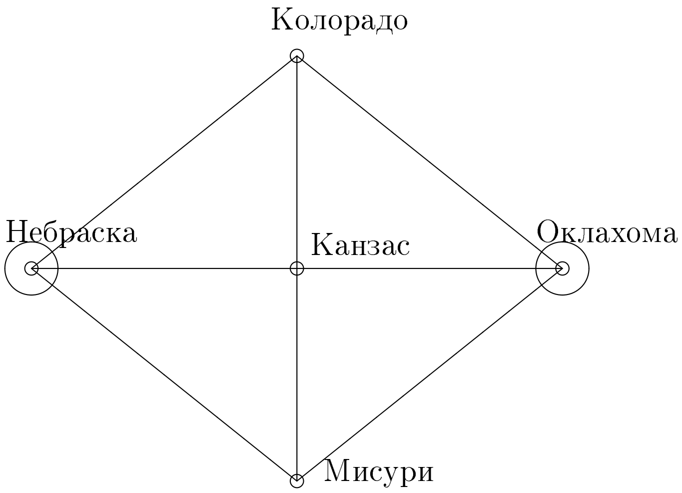
3. Нека $F(z)$ и $G(z)$ са п. ф. на сл. в. и $H(z) = pF(z) + qG(z)$, където $p+q = 1$ (смес). Изразете очакването и дисперсията на H чрез p, q и очакването и дисперсията на F и G. *Отг.* $Mean(H) = pMean(F) + qMean(G); Var(H) = pVar(F) + qVar(G) + pq(Mean(F) - Mean(G))^2$

4. Нека $F(z)$ и $G(z)$ са п. ф. на сл. в. и $H(z) = F(G(z))$ (композиция). Изразете очакването и дисперсията на H чрез очакването и дисперсията на F и G. *Отг.* $Mean(H) = Mean(F)Mean(G); Var(H) = Var(F)(Mean(G))^2 + Mean(F)Var(G)$

5. Нека $X_{n,p}$ и $Y_{n,p}$ имат съответно биномно и отрицателно биномно разпределение с параметри (n,p). Докажете, че $P(Y_{n,p} \leq m) = P(X_{m+n,p} \geq n)$. Какво тъждество за биномните коефициенти следва оттук?

6. X има Поасоново разпределение с параметър λ, ако $P(X = k) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}$, $k = 0, 1, 2, \ldots$. Намерете пораждащата функция на X, очакването и дисперсията. Нека Y има разпределение на Поасон с параметър μ. Каква е вероятността $X + Y = n$? Какви са средното и дисперсията на $2X + 3Y$?

7. Ана и Бил се намират във войскови части, дислоцирани в един от петте щата: Канзас, Небраска, Мисури, Оклахома и Колорадо. Първоначално Ана се намира в Небраска, а Борис в Оклахома. Всеки месец всеки от тях бива преместен в съседен щат (с равна вероятност).



Намерете очакването и дисперсията на броя месеци, необходими двамата да се срещнат.

8. Стефан Банах имал навика да носи в джоба си две кутии кибрит, в които първоначално е имало по n клечки. Когато има нужда от огънче, той случайно и равновероятно вади едната кутия, взема от нея клечка и я връща в джоба си (дори ако тя вече е празна). Ако избраната кутия е празна, той я изхвърля и взема другата. Един

ден, когато изхвърля първата кутия, той открива, че и другата кутия е празна. Каква е вероятността на такова събитие? Каква е вероятността в момента, когато се изхвърли едната кутия, в другата да има точно k клечки? Какво е очакването на този брой? *Отг.* $2^{k-2n}\binom{2n-k}{n}$; $\frac{2n+1}{2^{2n}}\binom{2n}{n} - 1$