$\oint$ Въпрос 12

Дискретни разпределения

Дефиниция 1. Нека $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, ...\omega_n\}$ е множеството от всички възможни изходи при сбъдване на някакво събитие A. (Пример: при хвърляне на зар имаме $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6\}$, -6 изхода, да се падне $1, 2, 3, 4, 5$ или 6). Всяко подмножество на Ω се нарича случайно събитие.
$\omega_i, i = 1, ..n$ се нар. елементарни събития.

Ако $A = \{$ множеството от събитията при хвърляне на зарче да се падне четен брой точки върху него$\}$
$A = \{\omega_2, \omega_4, \omega_6\}$, то $A \subset \Omega$

Аko $\emptyset \in \Omega$, то $\emptyset$ се нарича невъзможно събитие.
Ω като подмножество се нарича достоверно събитие.

Ако A и B са две събития, то събитието:
$A \bigcap B = AB$ се сбъдва, когато едновременно се сбъдват A и B
$A \bigcup B$ се сбъдва, когато се сбъдва само A или само B.

$\overline{A} = \Omega - A$ - всички елементарни изходи без A.

Дефиниция 2. Ако F е едно подмножество на Ω и F удовлетворява следните условия:
1. $\varnothing \in F$
2. $A \in F \Rightarrow \overline{A} \in F$
3. $A, B \in F \Rightarrow A \bigcup B$ и $A \bigcap B \in F$
4. $A_n \in F, n = 1, 2, .. \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} \in F$ и $\bigcap_{n=1}^{\infty} \in F$, то F се нарича σ - алгебра.

Дефиниция 3. Вероятност върху (Ω, F) се нарича числова функция $P : F \to \mathbb{R}$, такава, че
1. $P(A) \geq 0$
2. $P(\Omega) = 1$
3. $P(A + B) = P(A) + P(B), \quad A \bigcap B = \varnothing$ - несъвместими събития
4. $\{A_n\} \to \varnothing$, т.е. редицата от събития A_n клони към несъвместими събития,
$lim_{n\to\infty} P(A_n) = 0$

P - вероятностна мярка $P(\Omega) = 1$

Свойства на вероятностите:
1. $P(\varnothing) = 0$
2. $P(\overline{A} = 1 - P(A))$
3. $0 \leq P(A) \leq 1$

$P(A \bigcup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$ - формула за събиране на вероятности

Дефиниция 4. Минималната σ - алгебра, съдържаща всички крайни интервали $(U = \{(a, b)\})$ ще означаване с $\mathbb{B} = \sigma(U)$ и ще я наричаме Борелова σ - алгебра, а елементите ѝ - Борелови множества.

Дефиниция 5. Реалната функция $X = X(\omega)$, дефинирана върху (Ω, F) и приемаща стойности в $(\mathbb{R}, \mathbb{B}$ - Борелова σ - алгебра) се нарича F - измерима функция или случайна величина, ако за всяко $\mathbf{B_1} \in \mathbb{B}$

$$X^{-1}(B_1) = \{\omega : X(\omega) \in \mathbf{B_1}\} \in F$$

$$X^{-1}(B_1) = \{\omega : X(\omega) \leq x\} \in F$$

В случая, когато $\Omega = \mathbb{R}$ и $F = \mathbb{B}$, функцията $X(\omega)$ се нарича борелова.

Дефиниция 6. F_X се нарича σ - алгебра, породена от случайната величина X.
$F_X = \{A : A = X^{-1}(\mathbf{B_1}, \mathbf{B_1} \in \mathbb{B})\} = \sigma(X)$

Примери:
1. Всяка константа $A \in \mathbb{R}$ е случайна величина.
2. Нека $A \in F$. Дефинираме:

$$I_A(\omega) = \begin{cases} 0 & \omega \notin A \\ 1 & \omega \in A \end{cases}$$

$I_A(\omega)$ се нарича индикаторна функия(индикатор) на множетвото A и се проверява, че е случайна величина.

3. Нека $\{A_k\}$ е разлагане на Ω, т.е. $A_i \bigcap A_j = \emptyset$ при $i \neq j$. За редицата от реални стойности дефинираме сумата:

$$X(\omega) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k A_{I_k}(\omega), \qquad (1)$$

която определя една случайна величина.

Дефиниция 7. Случайните величини с представянето (1) се наричат дискретни случайни величини. Ако (1) са краен брой, случайната величина се нарича проста(елементарна) случайна величина.

Нека (Ω, F, P) е вероятностно пространство и X е случайна величина, дефинирана върху него.

Дефиниция 8. За всяко $x \in \mathbb{R}^1$, функцията

$$F_X(x) = P(\{\omega : X(\omega) \leq x\}) = P(X \leq x),$$

се нарича функция на разпределение на случайната величина X.

Функцията на разпределение на една дискретна случайна величина е напълно определена, ако са извстни нейните стойнсти и съответните вероятности. Това може да се представи във вид на таблица и се нарича **дискретно разпределение**.

$$X \mid x_1 \quad x_2 \quad x_3 \ldots x_n \ldots$$

$$P \mid p_1 \quad p_2 \quad p_3 \ldots p_n \ldots$$

Тази таблица, където $p_n \geq 0$ и $\sum_{n=1}^{\infty} p_n = 1$, се нарича още ред на разпределение на случайната величина.

Дефиниция 9. Математическо очакване (очаквана стойност, средна стойност) на случайната величина X се нар. функционала:

$$EX = \sum_{k=1}^{n} x_k p_k$$

Свойства на математическото очакане:
1. За неотрицателни случайни величини: $0 \leq EX \leq \infty$
2. За положителна константа a, $\quad EaX = aEX$
3. $E(X+Y) = EX + EY$
4. Ако $X \leq Y$, то $EX \leq EY$

5. Ако X_n е растяща редица от неотрицателни случайни величини, то съществува границта на X_n, $lim X_n = X, X$ е неотрицателна и $lim EX_n = EX \leq \infty$

Нека $C - const$
$E(X-C)^k - k$ - ти момент на случайната величина относно константата C, $k-$ цяло число.

1. $C = 0 : EX^k \quad k-$ти начален момент
2. $C = EX : E(X - EX)^k \quad k-$ти централен момент
3. $C = EX, k = 2 : E(X - EX)^2 = DX \quad 2-$ри централен момент (**Дисперсия**)

$$E[(X - EX)^2] = E[X^2 - 2X.EX + (EX)^2] =$$
$$EX^2 - 2EX.EX + (EX)^2 = EX^2 - (EX)^2$$

Свойства на дисперсията:
1. $DC = 0, C - const$
2. $D(CX) = C^2 DX$
3. $D(X \pm Y) = DX \pm DY X \perp Y -$ X и Y са независими сл. величини.

Схема на Бернулий:
- редица от краен брой независими опита.
- при всеки опит имаме два изхода - успех и неуспех

Означаваме:
$P(Y) = p$ - вероятност за успех
$P(H) = 1 - p = q$ - вероятност за неуспех
$X-$броя на успехите на бернулиеви опити

Пример:
- хвърляме една монета 10 пъти. Означаваме с "успех"събитето да се е паднало "герб".
$p = \frac{1}{2} = q$ в отделните опити
- хвърляме зар 5 пъти
а) Означаваме с "успех"съобитието да са се паднали четен бр. точки
$p = \frac{3}{6} = q$
б) Означаваме с "успех"събитието да са се паднали 6 точки
$p = \frac{1}{6} \quad q = \frac{5}{6}$

Биномно разпределение:

Проведени са n бернулиеви опити с вероятност за успех във всеки опит p. Вероятността за точно k успеха е:

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

Дефинираме случайна величина
$X = \{$ броя на успехите от тези n опити $\}$ - биномна разпределена случайна величина
$X \in Bi(n, p)$

$$\sum_{k=0}^{n} p_k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = [p + (1-p)]^n = 1$$

$$EX = \sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \sum_{k=1}^{n} k \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k} =$$

$$np \sum_{k=1}^{n} \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} p^{k-1} (1-p)^{n-k} = np \sum_{j=0}^{n-1} \frac{(n-1)!}{j!(n-1-j)!} p^j (1-p)^{n-1-j}$$

$$= np[p + (1-p)]^{n-1} = np$$

$$EX^2 = \sum_{k=0}^{n} k^2 \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \sum_{k=1}^{n} k^2 \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k} =$$

$$np \sum_{k=1}^{n} \frac{(k+1-1)(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} p^{k-1} (1-p)^{n-k} =$$

$$np \sum_{k=2}^{n} \frac{(k-1)(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} p^{k-1} (1-p)^{n-k} + np \sum_{k=1}^{n} \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} p^{k-1} (1-p)^{n-k} =$$

$$n(n-1)p^2 \sum_{k=2}^{n} \binom{n-2}{k-2} p^{k-2} (1-p)^{n-k} + np = n(n-1)p^2 + np$$

$$DX = n(n-1)p^2 + np - (np)^2 = np - np^2 = np(1-p) = npq$$

Пример:
Хвърляме 4 пъти зар. Означаваме с "успех"събитието да са се паднали 6 точки. $X \in Bi(4, \frac{1}{6})$
$p = \frac{1}{6} \quad q = \frac{5}{6}$

$X: \quad P$
$0: \quad \left(\frac{5}{6}\right)^4$
$1: \quad 4\left(\frac{5}{6}\right)^3 \frac{1}{6}$
$2: \quad 3\left(\frac{5}{6}\right)^2 \left(\frac{1}{6}\right)^2$
$3: \quad 2\left(\frac{5}{6}\right) \left(\frac{1}{6}\right)^3$
$4: \quad \left(\frac{1}{6}\right)^4$

$EX = np = 4\frac{1}{6} = \frac{2}{3}$
$DX = npq = 4\frac{1}{6}\frac{5}{6}$

Геометрично разпределение:

Проведени са n бернулиеви опити с вероятност за успех във всеки опит p. Броя на неуспехите до настъпване на първия успех е:

$$P(X = k) = q^{k-1}p \quad k = \overline{1, \infty}$$

Дефинираме случайна величина
$X = \{$ броя на неуспехите до първия успех$\}$
$X \in Ge(p)$

$$\sum_{k=0}^{\infty} p_k = \sum_{k=0}^{\infty} pq^k = p \sum_{k=0}^{\infty} q^k = p\frac{1}{p} = 1$$

$$EX = \sum_{k=1}^{\infty} kq^{k-1}p = p\frac{d}{dq}\left(\sum_{k=1}^{\infty} q^k\right) = p\left(\frac{q}{1-q}\right)' =$$

$$p\frac{1-q+q}{(1-q)^2} = \frac{1}{p}$$

$$EX^2 = \sum_{k=1}^{\infty} k^2 q^{k-1} p = p\left(\sum_{k=1}^{\infty} kq^k\right)' = p\left(\frac{q}{(1-q)^2}\right)' =$$

$$p\frac{1+q}{(1-q)^3} = \frac{1+q}{p^2}$$

$$DX = \frac{1+q}{p^2} - \frac{1}{p^2} = \frac{q}{p^2}$$

Пример:
Хвърляме зар. X са броя на хвърлянията до падане на 6 точки.
$EX = \frac{\frac{5}{6}}{\frac{1}{6}} = 5 \quad DX = \frac{\frac{5}{6}}{\frac{1}{36}} = 30$

Хипергеометрично разпределение:

Разглеждаме множество от N обекта. M на брой от тях са белязани. Нека имаме извадка(без връщане) от n обекта.Означаваме с $X = \{$ броя на белязаните от извадката $\}$

$X \in HGe(N, M, n)$

$$P(X = k) = \frac{\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$

$X = 0, 1, 2, ..min\{M, n\}$

$EX = \frac{nM}{N} = np \quad p = \frac{M}{N}$

$DX = \frac{nM(N-M)(N-n)}{N.N(N-1)} = npq\frac{N-1}{N-M}$

Пример:
Дадена е партида от N изделия и M от тях са дефектни. Имаме извадка от n изделия и $n < N$. Какава е вероятността точно m да са дефектни.

Поасоново (експоненциално) разпределение:

Наблюдаваме реалиации на случайно събитие A за единица време t. Нека за единица време t, A се реализира λ пъти.

Означаваме с $X = \{$ броя на реализациите на A за единица време $t\}$

$X \in Po(\lambda)$

Вероятността A да се реализира k пъти е:

$$P(X = k) = \frac{\lambda^{k}{}^{-\lambda}}{e}k! \quad k = 0, 1, ..$$

$$EX = \sum_{k=0}^{\infty} k\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{(k-1)!} = \lambda e^{-\lambda}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} =$$

$$\lambda e^{-\lambda}e^{\lambda} = \lambda$$

$$EX^2 = \sum_{k=0}^{\infty} k^2\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} = \lambda e^{-\lambda}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(k+1-1)\lambda^{k-1}}{(k-1)!} =$$

$$\lambda e^{-\lambda}\sum_{k=2}^{\infty}\frac{\lambda^{k-1}}{(k-2)!} + \lambda e^{-\lambda}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} = \lambda^2 + \lambda$$

$$DX = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda$$

Ако имаме n бернулиеви опити с вероятност при всеки успех p. При $n \to \infty$ и $p \to 0$ (с еднаква скорост), $np \to \lambda$.

Ако X - бр. на успехите $P(X = k) = \binom{n}{k}p^k q^{1-p}$ при $np \to \lambda$, $P(X = k) \to \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$

Пример:

Един завод произвежда изделия, сред които 1 на 1000 е нестандартно. Да се пресметне вероятността сред 5000 изделия да има 3 нестандартни.

Биномна вероятност: $n = 5000 \quad p = \frac{1}{1000}$

$$P = \binom{5000}{3} \left(\frac{1}{1000}\right)^3 \left(1 - \frac{1}{1000}\right) \approx \frac{5^3 e^{-3}}{3!}$$

$$np = 5000 \frac{1}{1000} = 5 = \lambda$$

Равномерно разпределение:

$$X \mid x_1 \quad x_2 ... x_n ...$$

$$P \mid \frac{1}{n} \quad \frac{1}{n} ... \frac{1}{n} ...$$

$X \sim U(a, b)$

функцията на разпределение има вида:

$$EX = \sum_{k=1}^{n} x_k p_k = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} x_k$$

Пример: $X \sim U(0, 1)$

$$F(X) = \begin{cases} x, \ x \in [0, 1] \\ 0, \ x < 0 \\ 1, \ x > 1 \end{cases}$$

$F(X) = P(X \leq x)$ - функцията на разпределение

Компютърен набор и разработка: Мариана Митевска `m_mitevska@abv.bg`