1. Направени са наблюдения над трафика рано сутрин на дадено кръстовище с цел по-добра регулация. Наблюдението започва в 5.30 сутринта и времето се измерва в единици време след този час. Нека X означава времето на пристигане на първия автомобил от едната посока, а Y - на първия от другата посока. Предполага се, че съвместната плътност е $f_{XY}(x,y) = 1/x$, $0 < y < x < 1$. Проверете дали това е плътност. Намерете $P(X \leq 0.5, Y \leq 0.25)$, $P(X > 0.5$ или $Y > 0.25)$, $P(X > 0.5, Y > 0.25)$. Намерете маргиналните плътности, $P(X \leq 0.5)$, $P(Y \leq 0.25)$. Независими ли са X и Y? Колко е ρ_{XY}? Намерете $P(X > 0.5 | y = 0.25)$ и $E(Y | x = 0.5)$.

2. Предполага се, че повечето от статистическите процедури, реализирани в даден софтуерен пакет се изпълняват за по-малко от 0.1 секунди. За проверка е направена случайна извадка от 20 такива програми. Съставете хипотеза за проверка на предположението. Нека X е броя на тези програми от избраните, които се изпълняват за по-малко от 0.1 секунди. Намерете критичната област за $\alpha = 0.025$. Когато е проведен експериментът, се оказва, че 14 от програмите се изпълняват за по-малко от 0.1 секунди. Трябва ли да се отхвърли нулевата хипотеза? Намерете β, ако $p = 0.7(0.8)$.

3. Нека X е случайната величина процесорно време необходимо за едно умножение и тя е нормално разпределена със средно μ и дисперсия 4 микросекунди. Имаме следните наблюдения:

42.65	45.15	39.32	44.44
41.63	41.54	41.59	45.68
46.50	41.35	44.37	40.27
43.87	43.79	43.28	40.70

   Какво е разпределението на $\bar{X}$? Направете МПО за μ. Неизместена ли е тя? Намерете 95%-ен доверителен интервал за μ. Изненадващо ло ще е ако бъде докладвано средно време за едно умножение 42.2 микросекунди за тази система?

4. Електронно устройство е проектирано, така че да включва и изключва домашното осветление на случайни интервали от време, като в рамките на един час имаме точно едно включване и едно

изключване. Нека с Y означим времето на включване, а с X времето на изключване и съвместната функция на разпределение е $f_{XY}(x, y) = 8xy$, $0 < y < x < 1$. Намерете $E(XY)$; вероятността лампите да се включат до половин час и после да се изключат до 15 минути; маргиналните плътности; EX, EX^2, EY, EY^2, ρ_{XY}; независими ли са; $f_{X|y}$; ако лампите са включени на десетата минута, намерете вероятността да бъдат изключени до 45-тата минута; очакваното време за изключване, ако осветлението е включено на десетата минута.

5. Устройство за разпознаване на образи разполага с 3000 бита (включено - 1, изключено - 0). Всеки бит може да бъде или достъпен за промяна, или фиксиран. Ако над 95% от битовете се окажат фиксирани, устройството не функционира. Битовете се проверяват последователно до намирането на нефиксиран бит с цел да се открие дали устройството ще откаже. Нека X е броя проверени битове до откриване на първия достъпен. Какво е разпределението на X? Проверете хипотезата H_0 : *системата няма да откаже* за параметъра p - вероятността за откриване на нефиксиран бит. Какво е EX, при условие, че H_0 е изпълнена? Ако е вярна H_1, какво ще бъде X спрямо това очакване? За α между 0.05 и 0.1, намерете критичната стойност на теста. Ако са намерени 30 последователни фиксирани бита, трябва ли да отхвърлим H_0, грешка от кой тип може да се получи и каква е интерпретацията на тази грешка? А за 60 последователни фиксирани бита?

6. Нека с X означим времето на изчакване за печат на един документ (от момента, когато се изпрати за печат, до момента, когато започне да се печата) в даден компютърен център. Предполага се, че X е нормално разпределена със средно 7 минути и дисперсия 16. Как изглежда плътността на разпределение на X? Намерете вероятността даден документ да започне да се печата в рамките на 3 минути от изпращането му. Необичайно ли е времето за изчакване да бъде между 10 и 12 минути? А да е повече от 15 минути?

7. Нека X е равномерно разпределена в интервала $(0, \theta)$. Направени са следните наблюдения над X: 1, 0.6, 1.2, 2, 0.25, 1.6. Намерете оценка на θ по метода на моментите. Неизместена ли е тя? Намерете оценка на θ по метода на максималното правдоподобие.

8. Противниците на строежа на дадена атомна електроцентрала твърдят, че мнозинството от живеещите в близост до мястото на строежа са против такъв проект. За проверка на това твърдение са избрани случайно 75 от тези жители и са попитани за мнението им. Нека с X означим броя на тези от тях, които са против. Ако вероятността случайно избран жител да е против е 0.5, каква е вероятността X да е под 20 или над 60? За кое X, вероятността отговорилите "против"да са поне толкова е 0.95?

9. От 20 случайно избрани автомобила в Студентски град X са със софийска регистрация. Предполага се, че 90% от автомобилите там са на посетители, неживеещи в студентски общежития. Съставете хипотеза за това твърдение и намерете съответната критична област за $\alpha = 0.05$.

10. Цифровите везни не винаги са точни и често имат нужда от допълнителни настройки преди употреба. Проверени са 10 везни и резултатът е следният:

по-тежко	*по-леко*	*по-тежко*	*по-тежко*	*по-тежко*
по-леко	*по-леко*	*по-леко*	*по-тежко*	*по-тежко*

Можем ли да отхвърлим H_0 : везните са точни (в средно), срещу H_1 : везните мерят по-тежко, при $\alpha = 0.05$?

11. Електронен брояч регистрира броя на превозните средства, напускащи автомагистрала на дадено място. Предполага се, че средния брой превозни средства, напускащи за 5-минутен интервал от време е 10. Приблизително каква е вероятността между 100 и 120 (включително) превозни средства да напуснат автомагистралата за 1 час?

12. Направен е тест за издръжливост на високо напрежение на определен вид полупроводници, като са наблюдавани общо 15 дефектни полупроводника. Предполага се, че причина за по-голямата част от дефектите е късо съединение, дължащо се на напрежението. Съставете подходяща нулева и алтернативна хипотеза за проверка на това предположение. Нека с X е означен броя на дефектите от късо съединение. Ако решим да отхвърляме H_0 при $X \geq 11$, на какво ниво α отговаря това? Каква е критична област за $\alpha = 0.1$? Намерете β, ако $p = 0.7$, $p = 0.8$, $p = 0.9$.

13. Съвместната плътност на X и Y е $f_{XY}(x, y) = \frac{x^3y^3}{16}$, $0 \leq x \leq 2$, $0 \leq y \leq 2$. Намерете маргиналните плътности на X и Y. Независими ли са X и Y? Намерете $P(X \leq 1)$ и $P(X \leq 1|Y = 1)$. Намерете $\rho_{X,Y}$.

14. Лог-нормално се нарича разпределението на сл. в. $Y = e^X$, където $X \sim N(\mu, \sigma^2)$. Намерете плътността на Y. Ако с Y е означен диаметърът в mm на стиропорените топчета използвани при пакетиране, $\mu = 0.8$ и $\sigma = 0.1$, намерете вероятността случайно избрано топче да има диаметър поне 2.7 mm. Намерете L_1 и L_2, такива че $P(L_1 \leq Y \leq L_2) = 0.95$.

15. С X е означена температурата на въздуха, а с Y времето в минути, необходимо за стартирането на даден дизелов двигател. Предполага се, че съвместната плътност на X и Y е $f_{XY}(x, y) = \frac{1}{6640}(4x+2y+1)$, $0 \leq x \leq 40$, $0 \leq y \leq 2$. Намерете вероятността в случайно избран ден температурата да е над 20 градуса и да отнеме поне една минута за стартирането на двигателя. Намерете маргиналните плътности на X и Y. Каква е вероятността в даден ден температурата да е над 20 градуса? Каква е вероятността необходимото време за стартиране да е поне една минута? Независими ли са X и Y? Намерете $cov(X, Y)$. Намерете $E(Y|x = 20)$.

16. Сл.в. X има плътност $f(x) = \frac{1}{\theta^2}xe^{\frac{-x}{\theta}}$, $x > 0$, $\theta > 0$. Колко е $E(X)$? Намерете точкова оценка за параметъра θ. Неизместена ли е тя? Оценете θ, ако са дадени следните наблюдения над X: 3, 5, 2, 3, 4, 1, 4, 3, 3, 3.