Функционални зависимости
II част

Обвивки и покрития

Slide 1

Функционална зависимост (FD)

$A_1, A_2, \ldots, A_n \rightarrow B$

- *Ако два кортежа от r(R) съвпадат по атрибутите $A_1, A_2, \ldots, A_n$ of R, те трябва да съвпадат и по атрибута B*
- Ако
  - $A_1 A_2 \ldots A_n \rightarrow B_1$
  - $A_1 A_2 \ldots A_n \rightarrow B_2$
  - … …
  - $A_1 A_2 \ldots A_n \rightarrow B_m$
- то
  - $A_1 A_2 \ldots A_n \rightarrow B_1 B_2 \ldots B_m$

Slide 2

Обвивка на множество от функционални зависимости

Def. Нека *F* е множество от FD's.
F^+ - Обвивка на F е множество от FD's , които логически следват от *F.*

$F^+ = \{ X \rightarrow Y \mid X \models Y \}$ са логически следствия от F

Slide 3

Пример

- Нека
  - R = {A, B, C, G, H, I}
  - F: $A \rightarrow B$, $A \rightarrow C$, $CG \rightarrow H$, $CG \rightarrow I$, $B \rightarrow H$
- Да се докаже:
  - $A \rightarrow H$ следва логически от F

Slide 4

FD's и ключове

- Ако **R** е релационна схема с атрибути *A1. . .An* и м-во от функционални зависимости F и X $A_1,A_2,\ldots,A_n$, то казваме, че **X** е *ключ* на релацията R *ако*:
  - $X \rightarrow A_1,A_2,\ldots,A_n$
  - За никое Y <> 0, $Y \subseteq X$ не е вярно, че $Y \rightarrow A_1,A_2,\ldots,A_n$

Slide 5

Аксиоми на Армстронг

- A1 Рефлексивност (Reflexivity).

Ако $Y \subseteq X$ то $X \rightarrow Y$

Пример: Name, Address → Address

- A2 Разширение, попълнение (Augmentation).

Ако $X \rightarrow Y$ то $XW \rightarrow YW$

Пример : от C# → Description получаваме C#,Id# → Description, Id#

- A3 Транзитивност (Transitivity).

Ако $X \rightarrow Y$ и $Y \rightarrow Z$ то $X \rightarrow Z$

Пример : от Id#,C# → C# и C# → Description, получаваме Id#,C# → Description

Slide 6

Приложение на правилата на Amstrong: Пример

Дадено е м-во от функционални зависимости:
$AB \to C$, $CD \to E$

$ABD \to E$?

- $AB \to C$ дадено
- $ABD \to CD$ A2
- $CD \to E$ дадено
- $ABD \to E$ A3

Slide 7

Надежност (soundness) на аксиомите Armstrong

- **Лема:**
  Аксиомите на Армстронг са надеждни, т.е ако $X \to Y$ е изведено от F чрез аксиомите,
  то $X \to Y$ е вярно за всяка релация, в която важат зависимостите F.

Slide 8

Следствия от Armstrong's Axioms

- Обединение
  Ако $X \to Y$ и $X \to Z$ то $X \to YZ$
- Псевдотранзитивност
  Ако $X \to Y$ и $WY \to Z$ то $XW \to Z$
- Декомпозиция
  Ако $X \to Y$ и $Z \subseteq Y$ то $X \to Z$

ПРАВИЛА ЗА ИЗВОД

Slide 9

Правила за разделяне и обединение

- Имаме право да разделим множеството атрибути в дясната част на FD и да поставим всеки от тях в дясната част на нова FD.
- Правило за декомпозиция:
  - Ако $AA \to B_1, B_2, ..., B_n$, то
    $AA \to B_1$
    $AA \to B_2$
    , ...,
    $AA \to B_n$
- *Можем ли да декомпозираме лявата част?*

Slide 10

Правила за разделяне и обединение

- Правило за обединение:
  Ако $AA \to B_1$
  $AA \to B_2$
  , ...,
  $AA \to B_n$

  то $AA \to B_1, B_2, ..., B_n$

Slide 11

Приложение на правилата на Amstrong: Пример

Дадено е м-во от функционални зависимости:
$A \to B$, $B \to C$, $A \to D$, $CE \to HG$

- Прилагайки транзитивното правило към $A \to B$ и $B \to C$, получаваме $A \to C$.
- Прилагайки правилото за обединение към $A \to B$ и $A \to D$, получаваме $A \to BD$
- Прилагайки правилото за псевдотранзитивност към $CE \to HG$ и резултатът $A \to C$, получаваме $AE \to HG$
- Прилагайки правилото за декомпозиция към горния резултат, получаваме $AE \to H$ и $AE \to G$

Slide 12

Намиране на *FD's*

F

$AB \to C$ ⟶(union) $AB \to BCD$

$A \to D \xrightarrow{aug} AB \to BD$ ⟶(union) $AB \to BCD \xrightarrow{trans} AB \to BCDE \xrightarrow{decomp} AB \to CDE$

$D \to E \xrightarrow{aug} BCD \to BCDE$ ⟶(trans)

$AB \to BD$, $AB \to BCD$, $AB \to BCDE$ и $AB \to CDE$

Slide 13

Пълнота на аксиомите на Armstrong

- **Теорема:**
  Аксиомите на Армстронг са надеждни и пълни.

Slide 14

Еквивалентна дефиниция на F^+

- Следствие:
  Нека F е множество от FD's.
  F^+ - *Обвивка на* F е множество от FD's $\{X \to Y \mid X \to Y$ могат да бъдат извлечени от F чрез аксиомите на Армстронг$\}$
  - Кои зависимости принадлежат на обвивката на множеството F от предходния пример?

Slide 15

Намиране на F^+

F

$AB \to C$ ⟶(union) $AB \to BCD$

$A \to D \xrightarrow{aug} AB \to BD$ ⟶(union) $AB \to BCD \xrightarrow{trans} AB \to BCDE \xrightarrow{decomp} AB \to CDE$

$D \to E \xrightarrow{aug} BCD \to BCDE$ ⟶(trans)

$AB \to BD$, $AB \to BCD$, $AB \to BCDE$ и $AB \to CDE$
са елементи на F^+

Slide 16

Обвивка на атрибут

Def. Обвивка на атрибута (множество от атрибути) X се нарича множеството от атрибути X^+ :

$$X^+ = \cup \{Y \mid X \to Y \in F^+\}$$

- Функционалната зависимост $X \to Y$ е от F (следва от правилата на Армстронг) само ако $Y \subseteq X^+$

Slide 17

Пълнота (soundness) на аксиомите Armstrong

- **Лема:** Нека F е множество от FD's. Функционалната зависимост $X \to Y$ е от F (следва от правилата на Армстронг) само ако $Y \subseteq X^+$

- **Теорема:** Аксиомите на Армстронг са надеждни и пълни

Slide 18

Обвивка на атрибут

- Обвивката X^+ на X е максималният атрибут, за който $X \to X^+$ е от F^+
- $X \subseteq X^+$
- Намиране на обвивка

```
closure:= X;
repeat until there is no change {
        if there is an fd U → V in F
              such that U is in closure
                then add V to closure}
```

Slide 19

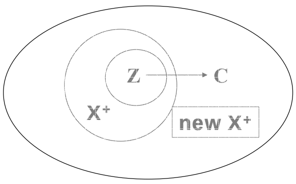
Алгоритъм за намиране на обвивка

Намиране на обвивката на $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$

1. Нека променливата **X** представлява м-во от атрибути, което ще се разшири до обвивката на $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$. Първоначално $X = \{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$
2. Търсим FD **(Z → C)**
   $B_1 B_2 \ldots B_m \to C$, такава че
   $B_1 B_2 \ldots B_m \subseteq X$, но C ! ⊆ X
   *Ако съществува такава **FD**, C се добавя към X*
3. Ст.2 се повтаря докато има **FD,** които позволяват включване на атрибут в X.
4. След завършване - **X** съдържа $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}^+$

Slide 20

Намиране на X^+



? Z → C

Slide 21

Пример: обвивка на атрибут

$AB \to C$ (a)
$A \to D$ (b)
$D \to E$ (c)
$AC \to B$ (d)

$\{AB\}^+$???

Решение:

$\{AB\}^+ = \{AB\}$
(a) $\{AB\}^+ = \{ABC\}$
(b) $\{AB\}^+ = \{ABCD\}$
(c) $\{AB\}^+ = \{ABCDE\}$

Slide 22

Пример: обвивка на атрибут

- Релация с атрибути A,B,C,D,E,F
- FD's
  1. $AB \to C$
  2. $BC \to AD$
  3. $D \to E$
  4. $CF \to B$
- $\{AB\}^+$???
  - X = {AB}
  - $AB \to C$ (1) X= {A,B,C}
  - X= {A,B,C}, $BC \to AD$ (2) X= {A,B,C,D}
  - $D \to E$ (3) X= {A,B,C,D,E}
  - F??, $CF \to B$??

Slide 23

Пример: обвивка на атрибут

$F: AB \to C$
$A \to D$
$D \to E$
$AC \to B$

X	X_F^+
A	$\{A, D, E\}$
AB	$\{A, B, C, D, E\}$ (*AB* е ключ)
B	$\{B\}$
D	$\{D, E\}$

Дали $AB \to E$ е валидна FD? Да
Дали $D \to C$ е валидна FD? Не

X_F^+ ни позволява да определим FDs от F във формата
$X \to Y$

Slide 24

Намиране на всички функционални зависимости

Проверка дали една FD $A_1A_2…A_n \to B$ е част от м-во от функционални зависимости S

1. Намираме $\{A_1, A_2, …, A_n\}^+$ като използваме S
2. Ако $B \in \{A_1, A_2, …, A_n\}^+$ то FD $A_1A_2…A_n \to B$ следва от S
3. В противен случай B не следва от S

Slide 25

Ключове на релации -дефиниции

- *K* $=\{A_1,A_2,…,A_n\}$ е *ключ* за релацията *R* ако:
  1. М-то *K* функционално определя всички атрибути на *R.*
  2. За нито едно подмножество на *K* условие (1) не е вярно
- Ако *K* удовлетворява (1), но не удовлетворява (2), то *K* е *суперключ*.

Slide 26

FD's и ключове

- Ако **R** е релационна схема с атрибути *A1. . .An* и м-во от функционални зависимости F и X $A_1,A_2,…,A_n$, то казваме, че **X** е *ключ* на релацията R *ако*:
  - $X \to A_1,A_2,…,A_n$
  - За никое Y <> 0, $Y \subseteq X$ не е вярно, че $Y \to A_1,A_2,…,A_n$

Slide 27

Обвивки и ключове

$\{A_1, A_2, …, A_n\}^+$ е множеството от всички атрибути на релацията R

тогава и само тогава, когато

$A_1, A_2, …, A_n$ суперключ за тази релация.

Slide 28

Обосновка на алгоритъм за намиране на обвивка

- Алгоритъмът за намиране на обвивката на атрибут (м-во от атрибути) намира само верни FD's
- Алгоритъмът за намиране на обвивката на атрибут (м-во от атрибути) намира всички верни FD's

Slide 29

Намиране на "скрити" FD's

- Мотивация : "нормализация," процес на разбиване на релационната схема на 2 или повече схеми
- Пример: *ABCD* с FD's
  AB ->C, *C ->D*, and *D ->A*.
  - Да разделим ли на *ABC*, *AD*. Какви FD's има в *ABC* ?
    - Не само *AB ->C*, но и *C ->A* (породена) също важи за *ABC*

Slide 30

Еквивалентност на м-ва от FD's

Def. Две множества от FD's, F и G, са *еквивалентни* ако $F^+ = G^+$

Пример:

$\{AB \rightarrow C, A \rightarrow B\}$ и

$\{A \rightarrow C, A \rightarrow B\}$ са еквивалентни.

Def. Всяко м-во от FD's, еквивалентно на F^+, се нарича *покритие* на F

- F^+ с-жа голям брой FD's
- Малки еквивалентни множества

Минимално покритие

Def. Множеството от FD's F е ***минимално*** ако:

1. Всяка FD от F е във вида $X \rightarrow A$, където A е единичен атрибут
2. За никоя FD $X \rightarrow A$ от F, множеството $F - \{X \rightarrow A\}$ не е еквивалентно на F.
3. За никоя $X \rightarrow A$ от F и $Z \subseteq X$, множеството $F - \{X \rightarrow A\} \cup \{Z \rightarrow A\}$ не е еквивалентно на F.

Минимално покритие

Теорема

Всяко множество FD's F е еквивалентно на някакво минимално множество F!