Лекция: Квадратурна формула на Гаус. Квадратурни формули от Гаусов тип

1. Квадратурна формула на Гаус

Да разгледаме квадратурна формула от по-общия вид

$$\int_a^b \mu(x)f(x)\,dx \approx \sum_{k=1}^n A_k f(x_k) =: Q(f), \tag{1}$$

където $\mu(x)$ е дадена функция на тегло за интервала $[a,b]$, и $a \le x_1 < \cdots < x_n \le b$, а $\{A_k\}_{k=1}^n$ са коефициентите на квадратурната формула. Видяхме в предишната лекция, че при зададени възли $\{x_k\}_{k=1}^n$, можем да намерим коефициенти $\{A_k\}_{k=1}^n$ такива че квадратурната формула Q да бъде точна за всички полиноми от π_{n-1}. За тази цел е достатъчно да се построи *интерполационната квадратурна формула* с тези възли, т.е.,

$$\begin{aligned}\int_a^b \mu(x)f(x)\,dx &\approx \int_a^b \mu(x)L_{n-1}(f;x)\,dx\\ &= \sum_{k=1}^n \Big\{\int_a^b \mu(x)\prod_{i=1,i\neq k}^n \frac{x-x_i}{x_k-x_i}\,dx\Big\} f(x_k).\end{aligned}$$

И така, ако квадратурната формула Q с n възела $\{x_k\}_{k=1}^n$ е интерполационна, то тя е точна за всички алгебрични полиноми от степен ненадминаваща $n-1$. (Видяхме в предишната лекция, че е вярно и обратното твърдение: ако Q е квадратурна формула с n възела, която е точна за π_{n-1}, то Q задължително трябва да е интерполационна.) Въпросът, който естествено възниква, е: дали не съществуват някакви специални възли $\{x_k^*\}_{k=1}^n$, при които съответната интерполационна квадратурна формула да бъде точна за полиномите и от степен по-висока от $n-1$? Вече срещнахме такива примери: квадратурната формула на правоъгълниците е с един възел ($n=1$), а е точна за полиномите от π_1; квадратурната формула на Симпсон е с три възела ($n=3$), а е точна за всички полиноми от π_3.

Следното понятие е една важна характеристика на квадратурните формули.

Определение. Казваме, че една квадратурна формула Q има *алгебрическа степен на точност m* (и пишем $ACT(Q)=m$), ако тя е точна за всички алгебрични полиноми от степен $\le m$, и съществува полином от степен $m+1$, за който Q не е точна.

Въпросите, на които ще се спрем в тази част от лекцията, са: Каква е максималната АСТ, която може да има една квадратурна формула с n възела? Как да се построи? Какви формули има за коефициентите ѝ и грешката ѝ?

Лесно се вижда, че максималната АСТ на квадратурната формула (1) е по-голяма или равна на $n-1$. Наистина, както вече казахме, при всеки избор на възлите $\{x_k\}_{k=1}^n$, можем да построим съответната интерполационна квадратурна формула с тези възли, и тя ще е точна за π_{n-1}, т.е., ще има АСТ поне $n-1$. Ще покажем, че не съществува квадратурна формула от вида (1) с АСТ по-голяма от $2n-1$. Наистина, ако такава квадратурна формула съществува, тя трябва да е точна и за полинома

$$\omega^2(x) = (x-x_1)^2(x-x_2)^2\cdots(x-x_n)^2,$$

който е от степен $2n$. Но

$$\int_a^b \mu(x)\omega^2(x)\,dx > 0,$$

докато

$$Q(\omega^2) = \sum_{k=1}^{n} A_k \omega^2(x_k) = 0.$$

Следователно квадратурната формула (1) не е точна за полинома $f(x) = \omega^2(x)$. И така, най-високата АСТ на квадратурна формула от вида (1) е по-малка или равна на $2n-1$.

Параметрите, с които разполагаме при построяване на една квадратурна формула Q от вида (1) са $2n$ на брой - това са възлите $\{x_k\}_{k=1}^n$ и коефициентите $\{A_k\}_{k=1}^n$. Това ни дава известно основание да смятаме, че съществува такъв избор на тези $2n$ параметъра, които да удовлетворяват $2n$-те уравнения, изразяващи точността на квадратурната формула за базисните функции $1,\ x,\ x^2, \dots,\ x^{2n-1}$, които са също $2n$ на брой. По-долу ще покажем, че наистина съществуват възли $\{x_k\}_{k=1}^n$ и коефициенти $\{A_k\}_{k=1}^n$, при които съответната квадратурна формула (1) има АСТ равна на $2n-1$. Тази формула е построена за първи път от немския математик Карл Фридрих Гаус през 1814г., и затова се нарича *квадратурна формула на Гаус*.

Теорема 1. *При всяко естествено число n съществува единствена квадратурна формула Q от вида (1) с АСТ$= 2n-1$. Възлите $\{x_k\}_{k=1}^n$ на тази квадратурна формула са нулите на полинома от степен n, ортогонален в интервала $[a,b]$ при тегло $\mu(x)$ на всички алгебрични полиноми от π_{n-1}.*

Доказателство. Нека $\omega(x)$ е полиномът от степен n с коефициент 1 пред x^n, който е ортогонален в $[a,b]$ при тегло $\mu(x)$ на всички полиноми от π_{n-1}. Видяхме (лекцията за ортогонални полиноми), че съществува единствен такъв полином, и той има n различни реални нули, които са разположени в интервала (a,b). Да означим тези нули с $x_1, \dots, x_n$, тогава $\omega(x) = (x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_n)$. Да построим интерполационната квадратурна формула от вида (1) с възли $\{x_k\}_{k=1}^n$ - нулите на $\omega(x)$. Ще покажем, че тази формула има АСТ$= 2n-1$, която, както видяхме по-горе, е възможно най-високата. Наистина, нека f е произволен полином от степен ненадминаваща $2n-1$, тогава f се представя по единствен начин във вида

$$f(x) = \omega(x)q(x) + r(x), \tag{2}$$

където q и r са полиноми от степен по-малка или равна на $n-1$. Тогава

$$\begin{aligned}\int_a^b \mu(x)f(x)\,dx &= \int_a^b \mu(x)\omega(x)q(x)\,dx + \int_a^b \mu(x)r(x)\,dx \\ &= \int_a^b \mu(x)r(x)\,dx.\end{aligned}$$

Тук използвахме, че $\omega(x)$ е ортогонален на $q(x)$. Тъй като формулата (1) е интерполационна, тя ще е точна за $r(x)$. Следователно

$$\int_a^b \mu(x)r(x)\,dx = Q(r) = \sum_{k=1}^{n} A_k r(x_k).$$

Остава да забележим, че $r(x_k) = f(x_k)$ за $k = 1, \dots, n$. Това следва от (2), като се вземе предвид, че $\omega(x_k) = 0$. Окончателно получаваме

$$\int_a^b \mu(x)f(x)\,dx = \sum_{k=1}^{n} A_k r(x_k) = \sum_{k=1}^{n} A_k f(x_k) = Q(f).$$

Видяхме, че квадратурната формула е точна за произволен $f \in \pi_{2n-1}$. Следователно АСТ$(Q) = 2n-1$.

Сега ще докажем обратното. Нека квадратурната формула (1) има АСТ$= 2n-1$. Ще покажем, че полиномът $\omega(x) = (x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_n)$ е ортогонален в интервала $[a,b]$ при тегло $\mu(x)$ на всеки полином от π_{n-1}. Наистина, нека P е произволен полином от π_{n-1}. Тогава полиномът $f(x) = \omega(x)P(x)$ е от степен ненадминаваща $2n-1$, и квадратурната формула (1) ще е точна за него. Имаме

$$\int_a^b \mu(x)P(x)\omega(x)\,dx = \sum_{k=1}^{n} A_k P(x_k)\omega(x_k) = 0,$$

т.е., ω е ортогонален на P. Поради произволния избор на P следва, че ω е n-тият ортогонален полином в $[a,b]$ при тегло $\mu(x)$. Твърдението е доказано.

Единствеността на квадратурната формула с най-висока АСТ следва от единствеността на полинома $(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_n)$, ортогонален на π_{n-1}. $\square$

Коефициентите $\{A_k\}_{k=1}^n$ на квадратурната формула на Гаус са положителни числа. Това се вижда по следния начин: Полиномът $\omega_k(x) := \omega(x)/(x-x_k)$ е от степен $n-1$. Тогава полиномът $\varphi_k(x) := \omega_k^2(x)/\omega_k^2(x_k)$ е от степен $2n-2$, той е неотрицателен, и $\varphi_k(x_k)=1$. Тъй като Гаусовата квадратурна формула има АСТ$=2n-1$, то

$$0 < \int_a^b \mu(x)\varphi_k(x)\,dx = \sum_{i=1}^n A_i\varphi_k(x_i) = A_k,$$

и твърдението е доказано.

Формулата

$$A_k = \int_a^b \mu(x)\frac{\omega_k^2(x)}{\omega_k^2(x_k)}dx$$

може да се използва за пресмятане на коефициентите $\{A_k\}_{k=1}^n$ на квадратурната формула на Гаус. Ние ще дадем сега един друг начин за пресмятане на A_k, при който се избягва интегрирането.

Нека $P_0(x), P_1(x), \dots, P_n(x)$ е редицата от ортогонални полиноми в $[a,b]$ при тегло $\mu(x)$. Да предположим, че тази редица е ортонормирана, т.е.,

$$\int_a^b \mu(x)P_k^2(x)\,dx = 1,\ \ k=0,1,\dots,n.$$

Освен това ще предположим, че водещите коефициенти α_k на $P_k(x)$, $k=0,\dots,n$, са положителни. Нека $x_1,x_2,\dots,x_n$ са нулите на $P_n(x)$, т.е.,

$$P_n(x) = \alpha_n(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_n) = \alpha_n x^n + \cdots,\ \ \alpha_n > 0.$$

От Теорема 1 следва, че $x_1,\dots,x_n$ са възлите на квадратурната формула на Гаус. За да намерим коефициентите $\{A_k\}$, да разгледаме сумата

$$D[f] := \alpha_{n-1}\sum_{k=1}^n A_k P_{n-1}(x_k) f(x_k). \tag{3}$$

При $f\in\pi_{n-1}$ полиномът $f(x)P_{n-1}(x)$ е от степен ненадминаваща $2n-2$, и затова се интегрира точно от квадратурната формула на Гаус. Следователно,

$$D[f] = \alpha_{n-1}\int_a^b \mu(x)f(x)P_{n-1}(x)\,dx = 0 \ \text{ при } \ f\in\pi_{n-2},$$

$$D[x^{n-1}] = \alpha_{n-1}\int_a^b \mu(x)x^{n-1}P_{n-1}(x)\,dx = \int_a^b \mu(x)[P_{n-1}(x)-p_{n-2}(x)]P_{n-1}(x)\,dx = \int_a^b \mu(x)P_{n-1}^2(x)\,dx = 1.$$

Но последните две свойства характеризират напълно разделената разлика $f[x_1,x_2,\dots,x_n]$. Следователно

$$D[f] = f[x_1,x_2,\dots,x_n] = \alpha_n\sum_{k=1}^n \frac{f(x_k)}{P_n'(x_k)}. \tag{4}$$

Като приравним коефициентите пред $f(x_k)$ в представянията (3) и (4), получаваме

$$A_k = \frac{\alpha_n}{\alpha_{n-1}}\frac{1}{P_n'(x_k)P_{n-1}(x_k)},\ \ k=1,\dots,n.$$

Това са известни формули за пресмятане на коефициентите на квадратурната формула на Гаус.

Накрая ще дадем едно представяне на остатъка на квадратурната формула на Гаус, от което като следствие се получава оценка за грешката ѝ. Да предположим, че функцията f има непрекъсната производна от ред $2n$ в $[a,b]$. Нека $H_{2n-1}(f;x)$ е интерполационния полином на Ермит от степен ненадминаваща $2n-1$, интерполиращ функцията f във възлите $\{x_k\}_{k=1}^n$, всеки с кратност 2, т.е.,

$$H_{2n-1}(f;x_k) = f(x_k),\ H'_{2n-1}(f;x_k) = f'(x_k), \quad k = 1,\dots,n.$$

Знаем от лекциите, че

$$f(x) = H_{2n-1}(f;x) + f[x_1,x_1,\dots,x_n,x_n,x]\omega^2(x). \tag{5}$$

Ако умножим двете страни на това равенство с $\mu(x)$ и ги интегрираме в граници от a до b, ще получим квадратурна формула

$$\int_a^b \mu(x)f(x)\,dx = \int_a^b \mu(x)H_{2n-1}(f;x)\,dx + R_n(f),$$

където

$$R_n(f) = \int_a^b \mu(x)f[x_1,x_1,\dots,x_n,x_n,x]\omega^2(x)\,dx.$$

Тъй като квадратурната формула на Гаус е точна за $H_{2n-1}(f;x)$, имаме

$$\int_a^b \mu(x)H_{2n-1}(f;x)\,dx = \sum_{k=1}^n A_k H_{2n-1}(f;x_k) = \sum_{k=1}^n A_k f(x_k) = Q(f).$$

Поради това, $R_n(f)$ е остатъкът на квадратурната формула на Гаус. Следователно

$$R_n(f) = \int_a^b \mu(x)f[x_1,x_1,\dots,x_n,x_n,x]\omega^2(x)\,dx = f[x_1,x_1,\dots,x_n,x_n,\eta]\int_a^b \mu(x)\omega^2(x)\,dx$$
$$= \frac{f^{(2n)}(\xi)}{(2n)!}\int_a^b \mu(x)\omega^2(x)\,dx.$$

Следствие 1. *Ако $f \in C^{2n}[a,b]$ и $|f^{(2n)}(x)| \le M$ за всяко $x \in [a,b]$, тогава за грешката на n-точковата Гаусова квадратурна формула за интервала $[a,b]$ при тегло $\mu(x)$ е в сила оценката*

$$|R_n(f)| \le \frac{M}{(2n)!}\int_a^b \mu(x)\omega^2(x)\,dx.$$

2. Квадратурни формули от Гаусов тип

Нека сега разгледаме квадратурна формула от вида

$$\int_a^b \mu(x)f(x)\,dx \approx \sum_{i=1}^m B_i f(t_i) + \sum_{k=1}^n A_k f(x_k) =: S(f), \tag{6}$$

където $a \le t_1 < \dots < t_m \le b$, $a \le x_1 < \dots < x_n \le b$, и никой от възлите $\{t_i\}_1^m$ не съвпада с никой от $\{x_k\}_1^n$. Ще предполагаме, че възлите $\{t_i\}_1^m$ са фиксирани (дадени), и ще се опитаме така да определим останалите параметри $\{B_i\}_1^m$, $\{A_k\}_1^n$ и $\{x_k\}_1^n$ така, че квадратурната формула (6) да има възможно най-висока алгебрическа степен на точност. Общият брой на свободните параметри е $2n+m$, което ни дава основание да очакваме, че те могат да бъдат избрани така, че квадратурната формула (6) да е точна за полиномите $1, x, x^2, \dots, x^{2n+m-1}$, т.е., да има АСТ поне $2n+m-1$.

Следващата теорема ни дава характеризация на тези възли и коефициенти, при които квадратурната формула (6) има АСТ поне $2n+m-1$. Нека да въведем означенията

$$\sigma(x) := (x-t_1)(x-t_2)\dots(x-t_m), \quad \omega(x) := (x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_n).$$

Теорема 2. *Квадратурната формула (6) е точна за всички полиноми от степен* $\leq 2n+m-1$ *тогава и само тогава, когато тя е интерполационна и полиномът* $\omega(x)$ *е ортогонален в* $[a,b]$ *при "тегло"* $\mu(x)\sigma(x)$ *на всички полиноми от* π_{n-1}.

(Кавичките са поради това, че функцията $\mu(x)\sigma(x)$ може да не удовлетворява изискванията за функция на тегло, например може да си сменя знака в (a,b).)

Доказателство. Използва се същата идея както при доказателството на Теорема 1 (за квадратурната формула на Гаус). Ако АСТ(6)$=2n+m-1$, тогава очевидно (6) е от интерполационен тип. Остава да докажем ортогоналността на ω. Нека $Q(x)$ е произволен полином от π_{n-1}. Тогава полиномът $f(x)\omega(x)\sigma(x)Q(x)$ е от π_{2n+m-1}, и следователно

$$\int_a^b \mu(x)f(x)\omega(x)\sigma(x)Q(x)\,dx = \sum_{i=1}^m B_i f(t_i)\omega(t_i)\sigma(t_i)Q(t_i) + \sum_{k=1}^n A_k f(x_k)\omega(x_k)\sigma(x_k)Q(x_k) = 0.$$

Това показва, че $\omega(x)$ е ортогонален на Q при "тегло" $\mu(x)\sigma(x)$ в $[a,b]$. Необходимостта е доказана.

Да допуснем сега, че ω е ортогонален на всеки полином от π_{n-1} с тегло $\mu(x)\sigma(x)$. Да построим интерполационната квадратурна формула (6) с възли $x_1, x_2, \ldots, x_n$ - нулите на ω. Ще покажем, че (6) е точна за всяко $f \in \pi_{2n+m-1}$. Наистина, нека $f \in \pi_{2n+m-1}$ е произволен полином, тогава той може да се представи във вида

$$f(x) = \omega(x)\sigma(x)Q(x) + r(x),$$

където $Q \in \pi_{n-1}$ и $r \in \pi_{n+m-1}$. (Обърнете внимание, че $f(t_i) = r(t_i)$ и $f(x_k) = r(x_k)$). Използвайки условието, че

$$\int_a^b \mu(x)\sigma(x)\omega(x)Q(x)\,dx = 0$$

и че (6) е точна за r (като интерполационна с $n+m$ възела), получаваме

$$\begin{aligned}\int_a^b \mu(x)f(x)\,dx &= \int_a^b \mu(x)\sigma(x)\omega(x)Q(x)\,dx + \int_a^b \mu(x)r(x)\,dx\\ &= \int_a^b \mu(x)r(x)\,dx = \sum_{i=1}^m B_i r(t_i) + \sum_{k=1}^n A_k r(x_k)\\ &= \sum_{i=1}^m B_i f(t_i) + \sum_{k=1}^n A_k f(x_k),\end{aligned}$$

т.е., квадратурната формула (6) е точна за f. Теоремата е доказана. □

В нашите разсъждения до този момент предполагахме, че нулите на полинома ω, ортогонален в $[a,b]$ при "тегло" $\mu(x)\sigma(x)$ на π_{n-1}, са различни, реални, и несъвпадащи с никой от фиксираните възли $\{t_i\}_1^m$. Когато $\mu(x)\sigma(x)$ не удовлетворява изискванията за функция на тегло, горните три предположения може и да не са изпълнени. Тези три предположения са задължително изпълнени когато никой от фиксираните възли $\{t_i\}_1^m$ не е вътре в интервала (a,b). Тогава $\mu(x)\sigma(x)$ не си сменя знака в (a,b), и $\mu(x)\sigma(x)$ или $-\mu(x)\sigma(x)$ е неотрицателна функция в $[a,b]$, т.е., е същинска функция на тегло.

Да предположим сега, че $\sigma(x) \neq 0$ в (a,b), тогава $\mu(x)\sigma(x) \geq 0$ или $\mu(x)\sigma(x) \geq 0$ в $[a,b]$, и съществува единствен полином $\omega \in \pi_n$, ортогонален в $[a,b]$ при тегло $\mu(x)\sigma(x)$ (или $\mu(x)\sigma(x)$) на π_{n-1}. При това, нулите на ω са реални, различни, и всичките са разположени в (a,b), поради което никоя от тях не съвпада с някоя от точките $\{t_i\}_1^m$. Това означава, че съществува единствена квадратурна формула от вида (6) с АСТ$=2n+m-1$. Нещо повече, не съществува квадратурна формула от вида (6) с АСТ по-висока от $2n+m-1$. Това следва от факта, че (6) не е точна например за полинома $\sigma(x)\omega^2(x)$. Следователно е в сила следното твърдение.

Следствие 2. *Ако* $\sigma(x) \neq 0$ *в* (a,b), *съществува единствена квадратурна формула от вида (6) с найвисока алгебрическа степен на точност, равна на* $2n+m-1$.

От тук нататък ще предполагаме, че $\sigma(x) \neq 0$ в (a,b). Ще дадем представяне на остатъчния член

$$R_{n,m}(f) := \int_a^b \mu(x) f(x)\, dx - S(f),$$

аналогично на това, което изведохме за квадратурната формула на Гаус. Нека $f \in C^{2n+m}[a,b]$, и p е полиномът от π_{2n+m-1}, който интерполира f в точките $t_1, \ldots, t_m$, и $x_1, x_1, \ldots, x_n, x_n$. По формулата на Нютон,

$$f(x) = p(x) + f[t_1, \ldots, t_m, x_1, x_1, \ldots, x_n, x_n, x]\sigma(x)\omega^2(x).$$

Ако АСТ(6)$= 2n+m-1$, то квадратурната формула (6) интегрира точно p. Имаме

$$\begin{aligned}\int_a^b \mu(x) f(x)\, dx &= \int_a^b \mu(x) p(x)\, dx + \int_a^b \mu(x) f[t_1, \ldots, t_m, x_1, x_1, \ldots, x_n, x_n, x]\sigma(x)\omega^2(x)\, dx \\ &= S(p) + \frac{f^{(2n+m)}(\xi)}{(2n+m)!}\int_a^b \mu(x)\sigma(x)\omega^2(x)\, dx,\end{aligned}$$

където ξ е точка от $[a,b]$. Тъй като $S(p) = S(f)$, то

$$R_{n,m}(f) = \frac{f^{(2n+m)}(\xi)}{(2n+m)!}\int_a^b \mu(x)\sigma(x)\omega^2(x)\, dx.$$

Два са най-често срещаните случаи на квадратурни формули от Гаусов тип:

1. $m = 2$, $t_1 = a,\ t_2 = b$. Квадратурната формула

$$\int_a^b \mu(x) f(x)\, dx \approx B_1 f(a) + B_2 f(b) + \sum_{k=1}^{n} A_k f(x_k) =: S(f)$$

с максимална АСТ, равна на $2n+1$, се нарича *квадратурна формула на Лобато.* Тя е интерполационна, и възлите $\{x_k\}_{k=1}^n$ са нулите на полинома ω от степен n, ортогонален в $[a,b]$ на π_{n-1} при тегло $(x-a)(b-x)\mu(x)$. Ако $f \in C^{2n+2}[a,b]$, тогава

$$\int_a^b \mu(x) f(x)\, dx - S(f) = \frac{f^{(2n+2)}(\xi)}{(2n+2)!}\int_a^b (x-a)(x-b)\mu(x)\omega^2(x)\, dx, \quad \xi \in [a,b].$$

2. $m = 1$, $t_1 = a$. Квадратурната формула

$$\int_a^b \mu(x) f(x)\, dx \approx B_1 f(a) + \sum_{k=1}^{n} A_k f(x_k) =: S(f)$$

с максимална АСТ, равна на $2n$, се нарича *(лява) квадратурна формула на Радо.* Тя е интерполационна, и възлите $\{x_k\}_{k=1}^n$ са нулите на полинома ω от степен n, ортогонален в $[a,b]$ на π_{n-1} при тегло $(x-a)\mu(x)$. Ако $f \in C^{2n+1}[a,b]$, тогава

$$\int_a^b \mu(x) f(x)\, dx - S(f) = \frac{f^{(2n+1)}(\xi)}{(2n+1)!}\int_a^b (x-a)\mu(x)\omega^2(x)\, dx,$$

където $\xi \in [a,b]$. Случаят $m = 1$, $t_1 = b$ е аналогичен, тогава квадратурната формула

$$\int_a^b \mu(x) f(x)\, dx \approx B_1 f(b) + \sum_{k=1}^{n} A_k f(x_k) =: S(f)$$

с максимална АСТ, равна на $2n$, се нарича *дясна квадратурна формула на Радо*. Тя е интерполационна, и възлите $\{x_k\}_{k=1}^n$ са нулите на полинома ω от степен n, ортогонален в $[a,b]$ на π_{n-1} при тегло $(b-x)\mu(x)$. Ако $f \in C^{2n+1}[a,b]$, тогава

$$\int_a^b \mu(x)f(x)\,dx - S(f) = \frac{f^{(2n+1)}(\xi)}{(2n+1)!}\int_a^b (x-b)\mu(x)\omega^2(x)\,dx, \quad \xi \in [a,b].$$

3. Примерни задачи

Задача 1. Да се намери квадратурната формула на Гаус с два възела за интервала $[-1,1]$ при тегло $\mu(x) = 1-x^2$. Намерете представяне на грешката ѝ при предположение, че подинтегралната функция има непрекъснати производни до четвърти ред включително.

Решение. Съгласно Теорема 1, възлите x_1 и x_2 на търсената Гаусова квадратурна формула са нули на полинома от втора степен

$$p(x) = x^2 + ax + b,$$

ортогонален на π_1 в интервала $[-1,1]$ при тегло $\mu(x) = 1-x^2$. За определянето му използваме условията за ортогоналност на 1 и на x:

$$\left|\begin{array}{l} \int_{-1}^{1}(1-x^2)(x^2+ax+b)\,dx = 0 \\ \int_{-1}^{1}(1-x^2)(x^2+ax+b)x\,dx = 0 \end{array}\right. \quad \Rightarrow \quad \left|\begin{array}{l} \frac{4}{15}+\frac{4}{3}b = 0 \\ \frac{4}{15}a = 0 \end{array}\right. \quad \Rightarrow \ p(x) = x^2 - \frac{1}{5}.$$

От тук намираме $x_1 = -\sqrt{5}/5$ и $x_2 = \sqrt{5}/5$, следователно търсената Гаусова квадратурна формула има вида

$$Q(f) = A_1 f\Big(-\frac{\sqrt{5}}{5}\Big) + A_2 f\Big(\frac{\sqrt{5}}{5}\Big).$$

Алгебрическата степен на точност на Q е три, следователно тя трябва да е точна за $f(x)=1$ и $f(x)=x$. От тук намираме коефициентите A_1 и A_2:

$$\left|\begin{array}{ll} \int_{-1}^{1}(1-x^2)\,dx = \frac{4}{3} & = A_1 + A_2 \\ \int_{-1}^{1}(1-x^2)x\,dx = 0 & = A_1\Big(-\frac{\sqrt{5}}{5}\Big) + A_2\Big(\frac{\sqrt{5}}{5}\Big) \end{array}\right. \Rightarrow A_1 = A_2 = \frac{2}{3} \ \Rightarrow \ Q(f) = \frac{2}{3}f\Big(-\frac{\sqrt{5}}{5}\Big) + \frac{2}{3}f\Big(\frac{\sqrt{5}}{5}\Big).$$

Съгласно представянето за грешката на Гаусовата квадратурна формула, имаме

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx - Q(f) = \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}\int_{-1}^{1}(1-x^2)\Big(x^2-\frac{1}{5}\Big)^2 dx = \frac{4}{1575}f^{(4)}(\xi)$$

(последната сметка е за вас :)).

Задача 2. Да се намери лявата квадратурна формула на Радо с два възела за интервала $[0,1]$ при тегло $\mu(x) = 1$. Намерете представяне на грешката ѝ при предположение, че подинтегралната функция има непрекъснати производни до трети ред включително.

Решение. Имаме $t_1 = 0$, а съгласно Теорема 2 (случаят $m = n = 1$), възелът x_1 на търсената квадратурна формула е нула на полинома от първа степен

$$p(x) = x - x_1,$$

ортогонален на π_0 в интервала $[0,1]$ при тегло $\mu(x)\sigma(x) = 1.(x-0) = x$. За определянето му използваме условието за ортогоналност на $f(x) = 1$:

$$\int_0^1 x(x-x_1)\,dx = 0 \Rightarrow \ \frac{1}{3} - \frac{1}{2}x_1 = 0 \ \Rightarrow \ x_1 = \frac{2}{3}, \quad p(x) = x - \frac{2}{3}.$$

Следователно търсената квадратурна формула на Радо има вида

$$Q(f) = B_1 f(0) + A_1 f\Big(\frac{2}{3}\Big).$$

Алгебрическата степен на точност на Q е две, следователно тя трябва да е точна за $f(x) = 1$ и $f(x) = x$. От тук намираме коефициентите B_1 и A_1:

$$\left| \begin{array}{ll} \int\limits_0^1 dx = 1 & = B_1 + A_1 \\ \int\limits_0^1 x\,dx = \frac{1}{2} & = B_1.0 + A_1.\frac{2}{3} \end{array} \right. \Rightarrow A_1 = \frac{3}{4},\ B_1 = \frac{1}{4} \ \Rightarrow\ Q(f) = \frac{1}{4}f(0) + \frac{3}{4}f\Big(\frac{2}{3}\Big).$$

Съгласно представянето за грешката на квадратурната формула на Радо, имаме

$$\int\limits_0^1 f(x)\,dx - Q(f) = \frac{f'''(\xi)}{3!}\int\limits_0^1 x\Big(x - \frac{2}{3}\Big)^2 dx = \frac{f'''(\xi)}{216}.$$

Задача 3. Да се намери квадратурната формула на Лобато с три възела за интервала $[0,1]$ при тегло $\mu(x) = 1 - x$. Намерете представяне на грешката ѝ при предположение, че подинтегралната функция има непрекъснати производни до четвърти ред включително.

Решение. Съгласно Теорема 2 (случаят $m = 2,\ n = 1$) възелът x_1 на квадратурната формула на Лобато е нула на полинома от първа степен

$$p(x) = x - x_1,$$

ортогонален на π_0 в интервала $[0,1]$ при тегло $-\mu(x)\sigma(x) = (1-x)x(1-x) = x(1-x)^2$. За определянето му използваме условието за ортогоналност на $f(x) = 1$:

$$\int\limits_0^1 x(1-x)^2(x - x_1)\,dx = 0 \ \Rightarrow\ \frac{1}{30} - \frac{1}{12}x_1 = 0 \ \ x_1 = \frac{2}{5} \ \Rightarrow\ p(x) = x - \frac{2}{5}.$$

От тук намираме $x_1 = \frac{2}{5}$, следователно търсената квадратурна формула на Лобато има вида

$$Q(f) = B_1 f(0) + B_2 f(1) + A_1 f\Big(\frac{2}{5}\Big).$$

Алгебрическата степен на точност на Q е три, следователно тя трябва да е точна за $f(x) = 1$, $f(x) = x$ и $f(x) = x^2$. От тук намираме коефициентите $B_1,\ B_2$ и A_1:

$$\left| \begin{array}{ll} \int\limits_0^1 (1-x)\,dx = \frac{1}{2} & = B_1 + B_2 + A_1 \\ \int\limits_0^1 (1-x)x\,dx = \frac{1}{6} & = B_2 + A_1.\frac{2}{5} \\ \int\limits_0^1 (1-x)x^2\,dx = \frac{1}{12} & = B_2 + A_1.\frac{4}{25} \end{array} \right. \Rightarrow B_1 = \frac{1}{8},\ B_2 = \frac{1}{36},\ A_1 = \frac{25}{72}.$$

Така намираме

$$Q(f) = \frac{1}{8}f(0) + \frac{25}{72}f\Big(\frac{2}{5}\Big) + \frac{1}{36}f(1).$$

Съгласно представянето за грешката на квадратурната формула на Лобато, имаме

$$\int\limits_0^1 f(x)\,dx - Q(f) = \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}\int\limits_0^1 (1-x)(x-0)(x-1)\Big(x - \frac{2}{5}\Big)^2 dx = -\frac{f^{(4)}(\xi)}{7200}.$$