

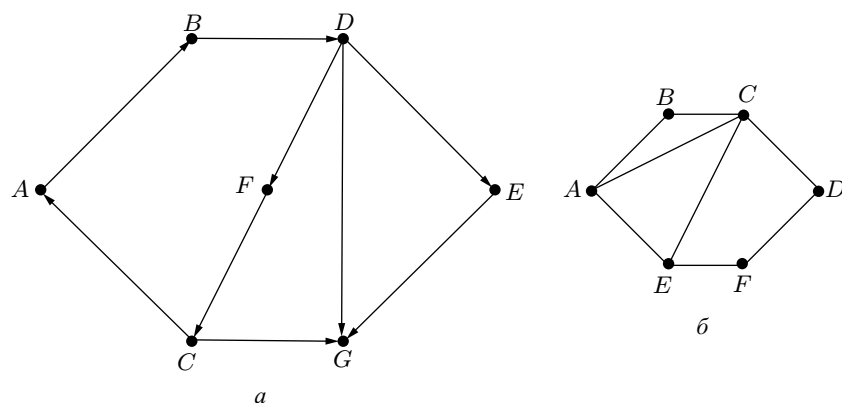
Мрежово планиране

Й. Митев*, В. Черногоров

7 януари 2010 г.

1. Ориентирани графи

Графът е основно математическо понятие, което се използва в мрежовото планиране. Под *граф* $G(X, E)$ се разбира множество от точки X и свързващи ги отсечки E . Прието е елементите на X да се наричат *върхове на графа*, а елементите на E — *ребра* (в случай, че графът е неориентиран) или *дъги* (ако графът е ориентиран). Един граф се нарича *ориентиран*, когато елементите на E имат посока, т. е. за всеки от тях са посочени началото и краят му. На фиг. 1а е показан ориентиран граф, като посоката на дъгите е означена със стрелка. На фиг. 1б графът е неориентиран — ребрата, свързващи отделните върхове, нямат определена посока.

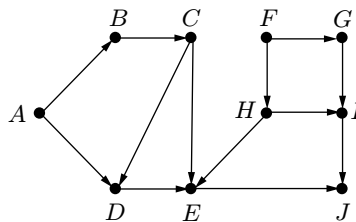


Фигура 1

*Първите три параграфа са извадка от учебника на доц. Митев *Математика за географи*, Университетско издателство „Св. Кл. Охридски“, София, 1995, ISBN 954-0579-7.

За целите на мрежовото планиране ще използваме само ориентирани графи и за това ще се ограничим с тяхното разглеждане.

Под *път*, свързващ два определени върха x_1 и x_2 в един граф, ще разбирате последователност от дъги, началото на първата от които е x_1 , а края на последната — x_2 , като при това началото на всяка следваща дъга съвпада с края на предишната. Например на фиг. 1а последователността от дъги (A, B) , (B, D) , (D, E) , (E, G) представлява път, свързващ върховете A и G . При това пътищата, свързващи два върха, могат да бъдат няколко. A и G се свързват и посредством пътищата (A, B) , (B, D) , (D, G) и (A, B) , (B, D) , (D, F) , (F, C) , (C, G) . Път, в който началният и крайният връх съвпадат, се нарича *цикъл*. Един от циклите на фиг. 1а е (A, B) , (B, D) , (D, F) , (F, C) , (C, A) . Ние ще разглеждаме графи, в които няма цикли. Те се наричат *ациклични*. Такъв е например графът на фиг. 2. Още едно условие, което ще искаме, е графът да бъде *свързан*, т. е. да не се разпада на два или повече подграфа, между които не съществуват дъги. По-точно, ако разгледаме графа като неориентиран, т. е. дъгите заменим с ненасочени ребра, то всеки два върха трябва да са свързани с поне една последователност от ребра.



Фигура 2

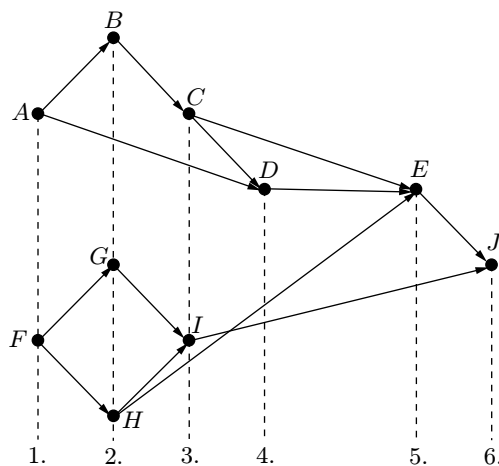
И така, ще се занимаваме със свързани ациклични ориентирани графи.

Даден граф може да бъде описан по различни начини, един от които е графичният, но той в повечето случаи се използва само като илюстрация. Друг начин е чрез *матрица на съседност* на графа, която го описва напълно еднозначно. Таблица 1 представлява *матрицата на съседност* на графа от фиг. 2. В действителност това е една квадратна таблица от нули и единици (в която за прегледност сме записали само единиците, а празните места съответстват на нулите) с брой редове и стълбове, равен на броя на върховете на графа. Наличието на единица в определен ред и стълб показва, че върхът, съответстващ на реда, е начало на дъга с край във върха, съответстващ на стълба. Очевидно попълването на матрицата на съседност на зададен графично граф е елементарно.

Таблица 1. Матрица на съседност

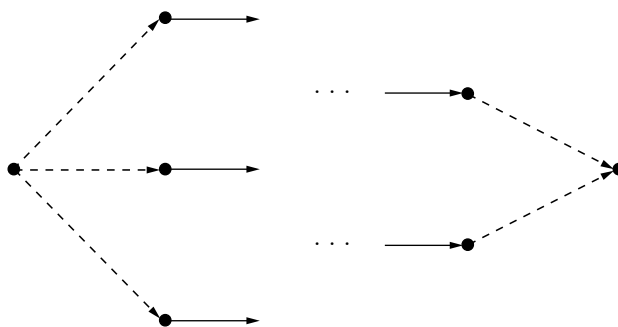
	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
A		1		1						
B			1							
C				1	1					
D					1					
E										1
F							1	1		
G									1	
H					1				1	
I										1
J										

Върховете на всеки ориентиран свързан граф без цикли могат да се разделят на групи, наречени *нива*. На дадено ниво принадлежат върховете, които не са свързани помежду си с дъги. Ако номерираме нивата, то в първото ниво влизат върхове, които не са краища на нито една дъга; във второто влизат тези, които са краища само на дъги, започващи от първо ниво и т.н. Изобщо ниво i съдържа върхове, които са краища на дъги, започващи само от нива с номер, по-малък от i . Последното ниво съдържа тези върхове, които не са начало на нито една дъга. Определянето на нивата в даден граф може да се направи лесно чрез използване на матрицата на съседност. Нека подредим по нива графа на фиг. 2, който е зададен и с матрицата на съседност от табл. 1. Сумираме елементите на матрицата по стълбове и отделяме тези стълбове, чиито суми са нули. В случая това са стълбовете, отговарящи на върховете A и F . Тези два върха образуват първото ниво. След това изключваме от по-нататъшно разглеждане редовете на A и F и сумираме пак стълбовете на матрицата на съседност. Този път нулеви суми имат стълбовете на B , G и H . Тези върхове образуват второто ниво. По същия начин изключваме техните редове и при третото сумиране на стълбовете получаваме третото ниво — върховете C и I . Четвъртото, петото и шестото (последно) ниво съдържат по един връх — съответно D , E и J . След подреждането на върховете нанасяме и свързващите ги дъги. Това правим като използваме или графичното изображение от фиг. 2, или матрицата на съседност (табл. 1). Подреденият по нива граф е показан на фиг. 3.



Фигура 3

Ако разгледаме по-внимателно графа от фиг. 3, забелязваме, че върховете му могат да се подредят по нива и по друг начин. Например върхът *I* може да бъде в 4-то и дори в 5-то ниво без да влезем в противоречие с дадената дефиниция. Наистина подреждането на върховете на даден граф по нива не е еднозначно. Обикновено то може да стане по няколко начина, но за нашите цели кой от възможните начини е реализиран, ще бъде без особено значение. За нас по-важно е *първото и последното ниво да съдържат по един връх*, което, например за графа от фиг. 3, не е изпълнено — първото ниво се състои от два върха. За да удовлетворим това изискване, можем да въвеждаме т. нар. *фиктивни върхове и дъги*, както е показано на фиг. 4.



Фигура 4

На всяка от дъгите на графа може да бъде съпоставено положително число (на фиктивните дъги се съпоставят нули). Тези числа се наричат *цени* или *тегла* на дъгите и в зависимост от конкретния случай изразяват време или количества от един или друг ресурс.

2. Мрежови графици

Всеки, който се е сблъсквал с проблемите, възникващи при проектирането, организацията и ръководството на комплексни, многоетапни, свързани с много изпълнители дейности, знае (а който не се е сблъсквал, се досеща) какви големи и неочаквани трудности възникват в такива случаи. Дори много опитен специалист не е в състояние да определи такъв прост на пръв поглед факт — каква ще бъде продължителността на цялата дейност при известни продължителности на отделните части, а за оптимизиране и дума не може да става.

Неоценим помощник в подобни положения се оказва мрежовото планиране. То представлява съвкупност от математически модели и методи за тяхното решаване, пригодени за управление на т. нар. „големи проекти“. Мрежовото планиране дотолкова е навлязло в практиката, че вече на негова база са създадени типови похвати за анализ и оптимизация с тясна специализация в строителството, транспорта, складовото стопанство и много други.

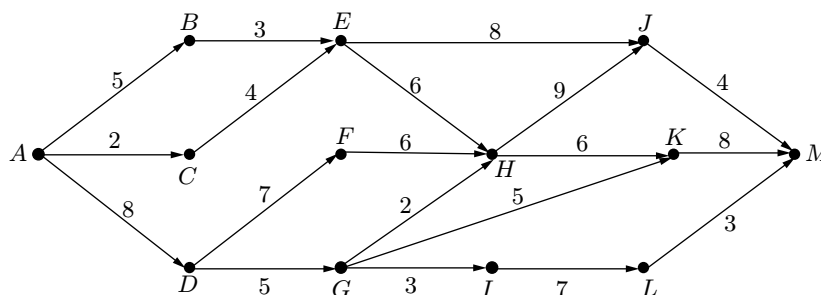
В основата на мрежовото планиране лежи понятието *мрежов график*, а то не е нищо друго освен ориентиран свързан ацикличен граф с тегла на дъгите и разпределени по нива върхове.

Примерите от строителството обикновено най-добре илюстрират същността на мрежовия график. Ето защо ние ще използваме именно такъв пример.

На дадена строителна фирма е поставена задача с наличните си трудови ресурси (хора) и техника да построи за възможно най-кратък срок един обект. Специалистите от фирмата знаят по нормативни документи, пък и от опит, колко време е необходимо за извършването на всяка отделна операция с работниците и механизацията, които са им на разположение. Те знаят много добре и последователността, определена от технологичните правила, в която да бъдат извършени отделните операции. Прието е елементите на тази последователност да се наричат *ограничения за предшествоване*. Това тяхно наименование се оправдава, например, от следното: операцията *полагане на бетон* може да започне едва след като операцията *направа на кофража* и *поставяне на арматурата* са завършили. От примера е очевидно, че тези ограничения трябва да се спазват безусловно.

Разполагайки с времената за изпълнение на отделните операции и ограниченията за предшествоване, строителните специалисти конструират един ориентиран граф, в който дъгите означават операциите, а върховете — начални и крайни моменти на започващите и завършващите операции. Цените на дъгите представляват времената за извършване на операциите. Естеството на проблема изключва възможността за поява на цикъл в графа, тъй че полученният граф е ацикличен. Изискването за свързаност, което може и да не бъде изпълнено, не е фатално. Ако полученният граф не е свързан, отделните му свързани подграфи се разглеждат отделно. Накрая върховете на графа се подреждат по нива и, ако е необходимо, се добавят фиктивни върхове и дъги (с тегла нула) така, че първото и последното ниво да съдържат по един връх.

Така полученният граф се нарича *мрежов график*. Да приемем, че показаният на фиг. 5 мрежов график е резултат от работата на строителните специалисти. В него теглата на дъгите означават продължителностите на отделните операции в дни.



Фигура 5

3. Метод на критичния път

След построяването на мрежовия график следва неговото анализиране. В разгледания в 2 случай първият и най-естествен въпрос е каква е общата продължителност на строежа — колко време е необходимо от настъпването на събитието *A* до настъпването на събитието *M*. Отговор на този въпрос, а след това и основа за оптимизирането (намаляването на продължителността) ни дава т. нар. *метод на критичния път*. Ще го илюстрираме върху мрежовия график от фиг. 5.

Въвеждаме понятието *най-ранен момент* за настъпване на едно събитие. Това е най-ранният момент, в който са завършени всички операции, предшестващи събитието. За най-ранен момент за настъпване на събитието

А можем да вземем $t_{\text{нр}}(A) = 0$, което не е задължително. След това започваме да пресмятаме най-ранните моменти за върховете от второ ниво:

$$t_{\text{нр}}(B) = t_{\text{нр}}(A) + 5 = 5,$$

$$t_{\text{нр}}(C) = t_{\text{нр}}(A) + 2 = 2,$$

$$t_{\text{нр}}(D) = t_{\text{нр}}(A) + 8 = 8.$$

Най-ранните моменти за върховете от трето ниво се пресмятат, след като вече са пресметнати за тези от второто (и от първото) ниво. Изобщо пресмятането на най-ранните моменти за върховете от кое да е ниво може да започне след като са известни най-ранните моменти за всички предишни нива. За третото ниво имаме

$$t_{\text{нр}}(E) = \max\{t_{\text{нр}}(B) + 3, t_{\text{нр}}(C) + 4\} = \max\{8, 6\} = 8,$$

$$t_{\text{нр}}(F) = t_{\text{нр}}(D) + 7 = 15,$$

$$t_{\text{нр}}(G) = t_{\text{нр}}(D) + 5 = 13.$$

Забелязваме, че $t_{\text{нр}}(E)$ бе пресметнато по-сложно. Понеже събитието E е край на две операции (B, E) и (C, E), то това събитие може (по дефиниция) да настъпи, когато завършат и двете операции, т. е. когато завърши по-късната.

Изобщо, ако за върха, означен с i , u_i означава множеството от върхове, които са начала на операции, завършващи в i , то общата формула за пресмятане на най-ранния момент е

$$t_{\text{нр}}(i) = \max_{j \in u_i} \{t_{\text{нр}}(j) + c_{ij}\}.$$

Използвайки формулата, пресмятаме и останалите най-ранни моменти на нашия мрежов график:

$$\begin{aligned} t_{\text{нр}}(H) &= \max\{t_{\text{нр}}(E) + 6, t_{\text{нр}}(F) + 6, t_{\text{нр}}(G) + 2\} \\ &= \max\{14, 21, 15\} = 21, \end{aligned}$$

$$t_{\text{нр}}(I) = t_{\text{нр}}(G) + 3 = 16,$$

$$t_{\text{нр}}(J) = \max\{t_{\text{нр}}(E) + 8, t_{\text{нр}}(H) + 9\} = \max\{16, 30\} = 30,$$

$$t_{\text{нр}}(K) = \max\{t_{\text{нр}}(H) + 6, t_{\text{нр}}(G) + 5\} = \max\{27, 18\} = 27,$$

$$t_{\text{нр}}(L) = t_{\text{нр}}(I) + 7 = 23,$$

$$\begin{aligned} t_{\text{нр}}(M) &= \max\{t_{\text{нр}}(J) + 4, t_{\text{нр}}(K) + 8, t_{\text{нр}}(L) + 3\} \\ &= \max\{34, 35, 26\} = 35. \end{aligned}$$

Получихме, че най-ранният момент за настъпване на събитието M е 35-ият ден. Следователно продължителността на цялата дейност е 35 дни и от

начина, по който я пресметнахме, е ясно, че тя не може да се намали при дадените продължителности на отделните операции.

Да въведем още една оценка на времето за всеки от върховете, наречена *най-късен момент* за настъпване на дадено събитие. Това ще рече най-късния момент, в който могат да започнат операциите с начала в този връх, без да се измени общото време за завършване на цялата дейност (в случая 35 дни). Ако с v_i означим множеството от върхове, които са краища на операции с начало във връх i , то общата формула за пресмятане на най-късния момент е

$$t_{\text{нк}}(i) = \min_{j \in v_i} \{t_{\text{нк}}(j) - c_{ij}\},$$

като за най-късен момент на върха от последното ниво приемем пресметнатия най-ранен. В нашия случай

$$t_{\text{нк}}(M) = t_{\text{нр}}(M) = 35.$$

Останалите най-късни моменти се пресмятат в обратен ред, т. е. за да ги пресметнем за върховете на дадено ниво, трябва вече да сме ги пресметнали за върховете от всички нива с по-горен номер.

За мрежовия график от фиг. 5 те са

$$\begin{aligned} t_{\text{нк}}(J) &= t_{\text{нк}}(M) - 4 = 31, \\ t_{\text{нк}}(K) &= t_{\text{нк}}(M) - 8 = 27, \\ t_{\text{нк}}(L) &= t_{\text{нк}}(M) - 3 = 32, \\ t_{\text{нк}}(H) &= \min\{t_{\text{нк}}(J) - 9, t_{\text{нк}}(K) - 6\} = \min\{22, 21\} = 21, \\ t_{\text{нк}}(I) &= t_{\text{нк}}(L) - 7 = 25, \\ t_{\text{нк}}(E) &= \min\{t_{\text{нк}}(J) - 8, t_{\text{нк}}(H) - 6\} = \min\{23, 15\} = 15, \\ t_{\text{нк}}(F) &= t_{\text{нк}}(H) - 6 = 15, \\ t_{\text{нк}}(G) &= \min\{t_{\text{нк}}(H) - 2, t_{\text{нк}}(K) - 5, t_{\text{нк}}(I) - 3\} \\ &= \min\{19, 22, 22\} = 19, \\ t_{\text{нк}}(B) &= t_{\text{нк}}(E) - 3 = 12, \\ t_{\text{нк}}(C) &= t_{\text{нк}}(E) - 4 = 11, \\ t_{\text{нк}}(D) &= \min\{t_{\text{нк}}(F) - 7, t_{\text{нк}}(G) - 5, t_{\text{нк}}(I) - 9\} \\ &= \min\{8, 14, 16\} = 8, \\ t_{\text{нк}}(A) &= \min\{t_{\text{нк}}(B) - 5, t_{\text{нк}}(C) - 2, t_{\text{нк}}(D) - 8\} \\ &= \min\{7, 9, 0\} = 0. \end{aligned}$$

Ако нанесем най-ранните и най-късните моменти за настъпване на отделните събития в табл. 2, то забелязваме, че за някои от тях $t_{\text{нр}}$ и $t_{\text{нк}}$ съв-

Таблица 2

Връх	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
$t_{\text{нр}}$	0	5	2	8	8	15	13	21	16	30	27	23	35
$t_{\text{нк}}$	0	12	11	8	15	15	19	21	25	31	27	32	35

падат. Това са събитията A, D, F, H, K, M . Операциите, които свързват тези събития, се наричат *критични*. Те образуват един път, свързващ началото A с края на мрежовия график M . Този път се нарича *критичен* за мрежовия график. Това е всъщност пътят с най-голяма дължина (с най-голяма сума на операциите, които съдържа), свързващ A и M . Неговата дължина съвпада с продължителността на цялата дейност. В нашия случай критичният път съдържа операциите (A, D) , (D, F) , (F, H) , (H, K) , (K, M) и сумата от продължителностите им е наистина 35. Оттук следва и обяснението на наименованието му: пътят и операциите от него се наричат критични, защото всяко удължаване на продължителността на коя да е от операциите води до увеличаване на времето за извършване на цялата дейност. С други думи, *не може да се забави нито една от критичните операции, без това да удължи крайния срок за завършване*.

В един мрежов график критичният път не е задължително да бъде единствен. Може да се случи няколко пътя, свързващи началния и крайния връх, да имат еднаква продължителност, равна на продължителността на цялата дейност, т. е. да бъдат критични. Такъв е, например, мрежовият график от зад. 5 на стр. 13.

Операциите, които не лежат на критичния път (или пътища), притежават т. нар. *резерви от време*. Тяхното изпълнение може да се забави в известни граници, без това да повлияе на крайния момент на завършване на цялата дейност. Използват се няколко резерва от време, всеки от които има определено съдържание:

а) *пълнен резерв* — пресмята се по формулата

$$R_{\text{п}}(i, j) = t_{\text{нк}}(j) - t_{\text{нр}}(i) - c_{ij}$$

и представлява *максималното време, с което можем да забавим операцията (i, j) , без да удължим крайния срок за завършване*. Ако продължителността на една операция се удължи с пълния ѝ резерв, то тя става критична, т. е. в графика се появява нов критичен път, който я съдържа. Липсата на пълнен резерв ($R_{\text{п}} = 0$) е условие за откриване на критичните операции в даден мрежов график;

б) *частен резерв от 1-ви вид* — пресмята се по формулата

$$R'_q(i, j) = t_{нк}(j) - t_{нк}(i) - c_{ij}$$

и представлява *максималното време, с което може да се удължи продължителността на операцията (i, j), без това да доведе до намаляване на пълните резерви на нито една предшестваща я операция, т. е. всяка от предшестващите я операции може да завърши в най-късния възможен момент;*

в) *частен резерв от 2-ри вид* — пресмята се по формулата

$$R''_q(i, j) = t_{нр}(j) - t_{нр}(i) - c_{ij}$$

и дава *максималното време за удължаване продължителността на операцията (i, j), без това да доведе до изменение на пълните резерви на всички операции, следващи (i, j);*

г) *независим резерв* — пресмята се по формулата

$$R_n(i, j) = \max\{0, t_{нр}(j) - t_{нк}(i) - c_{ij}\}$$

и представлява *времето, с което може да се увеличи продължителността на операцията (i, j), без това да повлияе на пълните резерви на нито една от останалите операции. От формулата виждаме, че независим резерв може и да не съществува, т. е. той да бъде нула.*

Табл. 3 съдържа резервите от време за операциите на мрежовия график от фиг. 5.

Таблица 3

Операция	R_{Π}	R'_q	R''_q	R_n	Операция	R_{Π}	R'_q	R''_q	R_n
(A,B)	7	7	0	0	(G,H)	6	0	6	0
(A,C)	9	9	0	0	(G,K)	9	3	9	3
(A,D)	0	0	0	0	(G,I)	9	3	1	0
(B,E)	7	0	0	0	(H,J)	1	1	0	0
(C,E)	9	0	2	0	(H,K)	0	0	0	0
(D,F)	0	0	0	0	(I,L)	8	0	0	0
(D,G)	6	6	0	0	(J,M)	1	0	1	0
(E,J)	15	8	14	7	(K,M)	0	0	0	0
(E,H)	7	0	7	0	(L,M)	8	0	8	0
(F,H)	0	0	0	0					

Резервите от време се използват за оптимизация върху мрежовия график. Един от начините е да се вземат ресурси (работна сила, техника) от операциите, които имат резерв от време, така че съответният резерв при неминималното удължаване на тези операции да не се надхвърли, и тези ресурси да се прехвърлят на някоя от критичните операции. Това ще доведе до намаляване на дължината на критичния път и оттам на продължителността на цялата дейност.

Резервите от време може да се използват и при нарушаване на изпълнението на критичните операции по време на работа за преразпределяне на ресурсите и спазване на крайния срок.

4. Използване на линейното оптимизиране за намиране на критичен път

Въпреки че описаният метод за намиране на критичен път е лесен за програмиране, методите на линейното оптимизиране също могат да бъдат използвани за определяне на дължината на критичния път. Нека x_j е времето за настъпване на събитието, което съответства на върха j . За всяка операция (i, j) знаем, че преди да настъпи събитието j , трябва да е било настъпило събитието i и операцията (i, j) да е завършила. Това означава, че за всяка дъга в мрежовия график $x_j \geq x_i + c_{ij}$. Целта е да минимизираме времето за завършване на проекта. Ако A е върхът от първо ниво, а M — върхът от последно ниво, използваме целевата функция $z = x_M - x_A$.

Да приложим този подход за определяне на дължината на критичния път за мрежовия график от фиг. 5. Съответната линейна задача е

$$\min z = x_M - x_A$$

при ограничения

$$\begin{array}{lll} x_B \geq x_A + 5, & x_C \geq x_A + 2, & x_D \geq x_A + 8, \\ x_E \geq x_B + 3, & x_E \geq x_C + 4, & x_F \geq x_D + 7, \\ x_G \geq x_D + 5, & x_H \geq x_E + 6, & x_H \geq x_F + 6, \\ x_H \geq x_G + 2, & x_I \geq x_G + 3, & x_K \geq x_G + 5, \\ x_K \geq x_H + 6, & x_J \geq x_E + 8, & x_J \geq x_H + 9, \\ x_L \geq x_I + 7, & x_M \geq x_J + 4, & x_M \geq x_K + 8, \\ x_M \geq x_L + 3, & \mathbf{x} \geq 0. & \end{array}$$

Едно оптимално решение на тази линейна задача, получено със Solver,

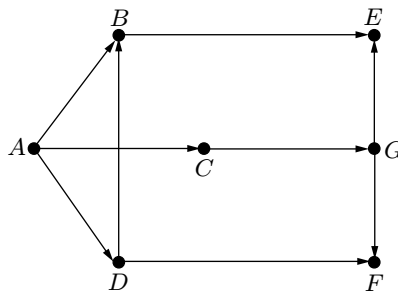
е $x_A = 0$, $x_B = 5$, $x_C = 4$, $x_D = 8$, $x_E = 8$, $x_F = 15$, $x_G = 13$, $x_H = 21$, $x_I = 25$, $x_J = 31$, $x_K = 27$, $x_L = 32$, $x_M = 35$.

Тази линейна задача има много алтернативни решения. Най-общо казано, стойността на x_i в кое да е оптимално решение може да приема стойност между $t_{\text{нр}}(i)$ и $t_{\text{нк}}(i)$. Всички оптимални решение на тази линейна задача обаче ще дават, че дължината на критичния път е 35 дни.

Критичният път за този мрежов график се състои от път от началния връх до крайния връх, в който всяка дъга съответства на ограничение с двойствена цена 1 при Sensitivity Report на Solver (-1 при LINDO): $A \rightarrow D \rightarrow F \rightarrow H \rightarrow K \rightarrow M$. Пак от тази справка се вижда, че горните граници на интервалите на устойчивост за десните страни на тези ограничения са $+\infty$. Това означава, че ако увеличим продължителността на съответната операция с Δ дни, с толкова ще се увеличи и продължителността на целия график (текущият базис остава оптимален).

ЗАДАЧИ

1. Подредете по нива върховете на графа



2. Ориентиран граф е зададен с матрицата си на съседност (табл. 4). Намерете всички възможни подреждания на графа по нива и направете съответните чертежи.

3. Изпълнението на даден проект е разделено на 14 етапа, означени с буквите от A до N, със следните правила за предшествоване ($X \rightarrow Y$ означава, че X може да започне след като Y е завършила):

$$\begin{array}{llll} B \rightarrow A & F \rightarrow E & I \rightarrow H & M \rightarrow I, J \\ D \rightarrow C & G \rightarrow D & J \rightarrow D, F & N \rightarrow E \\ E \rightarrow C & H \rightarrow B, G & K \rightarrow M, N & L \rightarrow I, J. \end{array}$$

Начертайте съответния мрежов график, като върховете означите с числа 1, 2, ..., и съставете съответната матрица на съседност.

Таблица 4

	A	B	C	D	E	F	G	H
A		1	1					
B			1		1			
C		1						
D					1	1		
E							1	1
F					1			1
G					1			
H								1

4. Намерете критичния път в мрежовия график от зад. 3, като знаете, че операциите имат следните продължителности:

$$A - 5, B - 2, C - 3, D - 8, E - 10, F - 4, G - 7, H - 3, \\ I - 2, J - 11, K - 8, L - 7, M - 5, L - 6.$$

5. Намерете критичните операции и резервите от време на операциите от мрежовия график, даден по-долу.

