

Задача с ограничения от тип „или–или“

В. Черногоров

6 януари 2011 г.

1. Формулировка на задачата

Машиностроителна компания използва една машина за изпълнение на три поръчки. Времето за изпълнение, срокът за предаване на всяка поръчка и глобата за неспазване на срока са дадени в табл. 1. Срокът за предаване на поръчките започва да тече от началната дата, т. е. от предполагаемото начало на изпълнение на първата поръчка. Да се определи такъв ред на изпълнение на поръчките, че сумарната глоба за неспазване на срока да бъде минимална.

Таблица 1. Данни за задачата

Поръчка	Време за изпълнение на поръчката (дни)	Срок за предаване на поръчката (дни)	Глоба за неспазване на срока (лв/ден)
1	5	25	19
2	20	22	12
3	15	35	34

2. Математически модел

Да определим променливата x_j като датата (измерена в дни от началната дата) за започване на поръчката j . Задачата има два типа ограничения:

- ограничения, които гарантират, че никои две поръчки няма да се изпълняват едновременно;
- ограничения за срока на предаване на поръчките.

Най-напред да разгледаме първия тип ограничения. Две поръчки i и j , чието време за изпълнение е p_i и p_j съответно, няма да се изпълняват едновременно, ако

- или $x_j \geq x_i + p_i$,
- или $x_i \geq x_j + p_j$

в зависимост от това дали изпълнението на поръчка i предшества изпълнението на поръчка j или обратното.

Тъй като всички добре построени математически модели имат *съвместими ограничения*, ще се опитаме да преобразуваме ограниченията от тип *или–или*, като въведем нова двоична променлива

$$y_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{ако поръчка } i \text{ предшества поръчка } j, \\ 0, & \text{ако поръчка } j \text{ предшества поръчка } i. \end{cases}$$

При достатъчно голямо M ограничение от типа *или–или* се преобразува в следните две съвместими ограничения

$$My_{ij} + (x_i - x_j) \geq p_j \text{ и } M(1 - y_{ij}) + (x_j - x_i) \geq p_i.$$

Посоченото преобразование гарантира, че само едно от двете ограничения може да бъде активно (да се изпълнява като равенство) в произволен момент от времето. Ако $y_{ij} = 0$, първото ограничение е активно, а второто — излишно (тъй като лявата му страна ще съдържа величината M , която е много по-голяма от p_i). Ако $y_{ij} = 1$, първото ограничение е излишно, а второто — активно.

Да разгледаме сега ограниченията за сроковете за предаване на поръчките. При дадена дата d_j за предаване на поръчка j да въведем свободна променлива s_j . Тогава съответното ограничение приема вида

$$x_j + p_j + s_j = d_j.$$

Ако $s_j \geq 0$, то поръчката се предава в срок, а ако $s_j < 0$, компанията плаща глоби, свързани с просрочването на поръчката. Като използваме стандартната смяна

$$s_j = s_j^+ - s_j^-, \quad s_j^+, s_j^- \geq 0,$$

преобразуваме ограничението във вида

$$x_j + s_j^+ - s_j^- = d_j - p_j.$$

Глобата за просрочените поръчки е пропорционална на s_j^- .

Окончателно математическият модел на дадената задача е

$$\min z = 19s_1^- + 12s_2^- + 34s_3^-$$

при ограничения

$$\begin{aligned}x_1 - x_2 + My_{12} &\geq 20, \\-x_1 + x_2 - My_{12} &\geq 5 - M, \\x_1 - x_3 + My_{13} &\geq 15, \\-x_1 + x_3 - My_{13} &\geq 5 - M, \\x_2 - x_3 + My_{23} &\geq 15, \\-x_2 + x_3 - My_{23} &\geq 20 - M, \\x_1 + s_1^+ - s_1^- &= 25 - 5, \\x_2 + s_2^+ - s_2^- &= 22 - 20, \\x_3 + s_3^+ - s_3^- &= 35 - 15, \\x_1, x_2, x_3, s_1^+, s_1^-, s_2^+, s_2^-, s_3^+, s_3^- &\geq 0, \\y_{12}, y_{13}, y_{23} &\in \{0, 1\}.\end{aligned}$$

Двоичните променливи y_{12} , y_{13} и y_{23} са въведени за преобразуване на ограниченията от тип *или–или* в съвместими ограничения. Получената задача е смесено целочислена задача на линейното оптимизиране.

За да решим задачата, избираме $M = 100$ — число, което е по-голямо от сумата на времената за изпълнение и на трите поръчки.

Оптималното решение е $x_1 = 20$, $x_2 = 0$ и $x_3 = 25$. Следователно оптималният ред за изпълнение на поръчките е $2 \rightarrow 1 \rightarrow 3$. В съответствие с това оптимално решение поръчка 2 се изпълнява за време $0 + 20 = 20$, поръчка 1 — за време $20 + 5 = 25$ и поръчка 3 за $25 + 15 = 40$ дни. Тогава просрочването на поръчка 3 е $40 - 35 = 5$ дни, за което глобата е $5 \times 34 = 170$ лв.