

Следоптимален анализ в линейното оптимизиране

В. Черногоров

15 декември 2011 г.

1. Увод

В разгледаните и решени досега линейни оптимизационни модели данните на задачите — векторите $\mathbf{c}$ и $\mathbf{b}$ и матрицата $\mathbf{A}$ — бяха постоянни (непроменящи се). В практиката обаче всеки модел е „моментална“ снимка на реална ситуация. Впоследствие може да се наложи изменение на някои негови данни. Основната задача на *следоптималния анализ* (известен още като *анализ на чувствителността*) в линейното оптимизиране е проследяване на изменението на оптималното решение на дадена линейна оптимизационна задача, ако след намирането му се налагат промени в данните.

За илюстриране на методите на следоптималния анализ ще използваме вече известния ни модел на *задачата за максимална печалба при ограничени ресурси*. Частен случай на такава задача беше първият пример, разгледан в този курс. Пълната ѝ формулировка може да бъде намерена **тук**.

2. Теоретични бележки

За конкретна итерация на симплекс метода всички данни в симплексната таблица (СТ) се получават от изходните данни $\mathbf{c}$, $\mathbf{A}$ и $\mathbf{b}$ и обратната матрица на текущия базис $\mathbf{B}^{-1}$, а именно

$$\mathbf{w}_j = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}_j, \quad \mathbf{x}_B = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}, \quad \bar{c}_j = c_j - \mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}_j, \quad z = \mathbf{c}_B^T \mathbf{x}_B = \mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}.$$

Като положим $\boldsymbol{\pi} = \mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1}$, виждаме, че $\bar{c}_j = c_j - \boldsymbol{\pi}\mathbf{A}_j$, т. е. относителната оценка на променливата x_j на всяка итерация на СМ е равна на разликата между дясната и лявата страна на съответното ограничение на двойствената задача.

От горните формули се вижда, че промени във вектора на целевата функция оказват влияние само върху вектора с относителните оценки $\bar{c}$ и някои негови координати могат да се окажат неоптимални. От друга страна промени във вектора с десните страни на ограниченията водят само до промени в x_B , които могат да доведат до това някои негови координати да станат отрицателни, т. е. недопустими.

3. Основни задачи на следоптималния анализ

След намиране на оптимално решение на една линейна задача е възможно да си зададем редица въпроси от вида „Какво би се случило с оптималното решение, ако

- бъде променена дясната страна b_i на едно ограничение?“
- бъде променен един коефициент c_j в целевата функция?“
- бъде променен един елемент a_{ij} на матрицата A ?“
- бъдат променени няколко целеви коефициенти?“
- бъдат променени няколко десни страни на ограниченията?“
- бъде добавено ново ограничение?“
- бъде добавено ново производство (т. е. нова променлива)?“
- бъдат добавени нови ограничения и нови променливи?“

На някои от тези въпроси може да бъде отговорено без да се решава задачата отново с променените данни. Затова е необходимо да се знае кои са те и как да се получи отговорът им, използвайки компютър. В повечето случаи принципите за получаване на отговорите са базирани на елементарни пресмятания с вектори и матрици. В практиката типична ситуация е задачата да бъде решена отново, ако се иска отговор на по-сложни въпроси, но вие трябва да знаете достатъчно, за да решите какво да предприемете във всеки конкретен случай.

Ето кои са въпросите, на които в повечето случаи може да се отговори без да се решава задачата отново:

- промяна на дясната страна b_i на едно ограничение;
- промяна на един коефициент c_j в целевата функция;

- промяна на десните страни b_i на няколко ограничения;
- промяна на няколко коефициента c_j в целевата функция.

4. Интервали на устойчивост

Интервалите на устойчивост ни позволяват да определим в какви граници може да се изменя един елемент от данните на задачата (един коефициент в целевата функция, дясната страна на едно ограничение или един елемент на матрицата A), така че да се запази намереният оптимален базис. MS Excel може да даде справка за интервалите на устойчивост (как става това е обяснено [тук \(стр. 8\)](#)), а резултатът е показан на [фиг. 1](#)).

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	Microsoft Excel 11.0 Sensitivity Report							
2	Worksheet: [prodmix.xls]Лист1							
3	Report Created: 29.10.2008 г. 16:51:13							
4								
5								
6	Adjustable Cells							
7				Final	Reduced	Objective	Allowable	Allowable
8	Cell	Name	Value	Cost	Coefficient	Increase	Decrease	
9	\$B\$13	Решение Боя за външно боядисване	3	0	5	1		3
10	\$C\$13	Решение Боя за вътрешно боядисване	1.5	0	4	6	0.666666667	
11								
12	Constraints							
13			Final	Shadow	Constraint	Allowable	Allowable	
14	Cell	Name	Value	Price	R.H. Side	Increase	Decrease	
15	\$D\$6	Суровина C1	24	0.75	24	12		4
16	\$D\$7	Суровина C2	6	0.5	6	0.666666667		2
17	\$D\$8	Огр. от търсене 1	-1.5	0	1	1E+30		2.5
18	\$D\$9	Огр. от търсене 2	1.5	0	2	1E+30		0.5

Фигура 1. Справка с анализ на чувствителността (Sensitivity Report)

Най-напред в секцията *Променливи (Adjustable Cells)* за всяка променлива са дадени:

- адреса на клетката (Cell), съдържаща стойността на променливата;
- името на клетката (Name), което се получава чрез последователно изписване на името на реда (най-вляво) и името на стълба (най-отгоре), в които се намира тази клетка;
- крайната стойност x_j (Final Value) на променливата, която е оптималната, в случай че задачата има крайно решение;
- относителната оценка (Reduced Cost) на тази променлива;

- коефициентът c_j в целевата функция (Objective Coefficient);
- допустимото увеличение δ_j^+ (Allowable Increase) на стойността на c_j , при което оптималният базис се запазва;
- допустимото намаление δ_j^- (Allowable Decrease) на стойността на c_j , при което оптималният базис се запазва.

Интервалът на устойчивост за коефициента c_j е $[c_j - \delta_j^-, c_j + \delta_j^+]$. В този интервал на изменение на c_j намереният оптимален базис се запазва. Оптималното решение е същото, а стойността на целевата функция се променя пропорционално на изменението на коефициента c_j .

По подобен начин в секцията *Ограничения (Constraints)* за всяко ограничение са дадени:

- адреса на клетката (Cell), съдържаща пресметнатата лява страна на ограничението;
- името на клетката (Name), което се получава чрез последователно изписване на името на реда (най-вляво) и името на стълба (най-отгоре), в които се намира тази клетка;
- крайната стойност (Final Value) на лявата страна на ограничението;
- двойствената цена (Shadow Price) на ограничението;
- дясната страна b_i (Constraint R.H. Side) на ограничението;
- допустимото увеличение δ_i^+ (Allowable Increase) на дясната страна b_i , при което намереният оптимален базис остава допустим;
- допустимото намаление δ_i^- (Allowable Decrease) на дясната страна b_i , при което намереният оптимален базис остава допустим.

Интервалът на устойчивост за тази дясна страна е $[b_i - \delta_i^-, b_i + \delta_i^+]$. В този интервал на изменение на b_i намереният оптимален базис остава допустим, а промяната в целевата функция е пропорционална на направената промяна в b_i и на двойствената променлива, съответна на това ограничение.

Според показаното на фиг. 1 интервалът на устойчивост за коефициента пред x_1 е $[2, 6]$, а за този пред x_2 е $[3\frac{1}{3}, 10]$. За десните страни на ограниченията съответните интервали са $[20, 36]$, $[4, 6\frac{2}{3}]$, $[-\frac{3}{2}, +\infty)$, $[\frac{3}{2}, +\infty)$ (числото $1\text{E}+30$ се тълкува като $+\infty$).

Понякога е възможно да се предвиди ефекта от едновременно направени промени в няколко стойности, като се приложи т.нар. *правило на стоте процента*.

- Това правило не важи, ако се променят едновременно коефициенти в целевата функция и десни страни на ограничения.
- Ако се променят само коефициенти в целевата функция, вижте какъв е интервалът на устойчивост за тези коефициенти.
- Разгледайте процентите на направените промени, като разделите абсолютната стойност на разликата между новата и старата стойност на δ_j^+ или δ_j^- в зависимост от това дали увеличавате или намалявате съответния коефициент.
- Съберете всички проценти. Ако получената сума не е повече от 100%, тогава намереният оптимален базис се запазва.
- Ако сумата на процентите надхвърля 100%, не е ясно дали намереният оптимален базис остава такъв.
- По същия начин се процедира и с едновременни промени в десните страни на няколко ограничения.

5. Два лесни случая

Дефиниция. Едно ограничение ще наричаме *активно* (*пасивно*), ако в оптималното решение то се изпълнява като равенство (строго неравенство). *Дефицитен* се нарича този ресурс, на който отговаря *активно* ограничение. В противен случай той се нарича *недефицитен*.

1. Промяна в дясната страна b_i на пасивно ограничение. В този случай допълнителната променлива s_i , която свежда ограничението до равенство, е базисна в оптималното решение с положителна стойност. Затова базисът, оптималното решение (освен стойността на s_i) и стойността на целевата функция се запазват, докато ограничението не стане *активно* (тогава $s_i = 0$ и е небазисна).

2. Промяна в коефициент на небазисна променлива x_j . Като вземем пред, че относителната оценка на тази променлива

$$\bar{c}_j = c_j - \mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1} \mathbf{A}_j \geq 0$$

удовлетворява критерия за оптималност при минимум, ако новата стойност на коефициента пред x_j в целевата функция е $c_j^\delta = c_j + \delta$, то от

$$\bar{c}_j^\delta = c_j + \delta - \mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1} \mathbf{A}_j = \bar{c}_j + \delta \geq 0$$

следва $-\bar{c}_j \leq \delta < +\infty$. Следователно оптималното решение се запазва, ако δ расте неограничено и не е по-малко от $-\bar{c}_j$.

ЗАДАЧИ ЗА УПРАЖНЕНИЯ

1. Пивоварна произвежда светло пиво и бира, като за производството използва зърно, хмел и малц. Налични са 40 lb зърно, 30 lb хмел и 40 lb малц. Един барел светло пиво се продава за \$40 и за производството му са необходими 1 lb зърно, 1 lb хмел и 2 lb малц. Един барел бира се продава за \$50 и за производството му са необходими 2 lb зърно, 1 lb хмел и 1 lb малц. Пивоварната може да продаде цялото произведено количество светло пиво и бира. За да максимизира общата печалба, пивоварната трябва да реши следната линейна оптимизационна задача:

$$\begin{aligned} \max z &= 40x_{\text{пиво}} + 50x_{\text{бира}}, \\ x_{\text{пиво}} + 2x_{\text{бира}} &\leq 40, \\ x_{\text{пиво}} + x_{\text{бира}} &\leq 30, \\ 2x_{\text{пиво}} + x_{\text{бира}} &\leq 40, \\ x_{\text{пиво}} &\geq 0, \quad x_{\text{бира}} \geq 0. \end{aligned}$$

Листът на Excel с данните на задачата и оптималното ѝ решение, както и справката с анализа на чувствителността, са показани на фиг. 2.

Забележка. Числата в реда Хмел на справката с анализа на чувствителността не са дадени нарочно, тъй като в едно от подусловията на задачата се иска те да бъдат попълнени.

За всяко от следващите подусловия отговорете на въпросите колкото е възможно по-пълно и подробно без да решавате задачата с Excel Solver, като използвате адресите на необходимите клетки.

Забележка. Всяко подусловие е независимо от останалите (всяка промяна на модела, направена в едно подусловие, не се отнася за никое от другите подусловия).

- Кое е оптималното решение и колко е печалбата?
- Да предположим, че печалбата от един барел светло пиво е станала \$60. Ще се промени ли оптималното решение и какво става с печалбата?

Следоптимален анализ в линейното оптимиране

	A	B	C	D	E
1	Модел на пивоварна				
2	Входни данни				
3		Светло пиво	Бира	Всичко	Десни страни на ограниченията
4	Целева функция	40	50	1200	
5	Зърно	1	2	40	40
6	Хмел	1	1	26.6667	30
7	Малц	2	1	40	40
8					
9	Изходни резултати				
10		Светло пиво	Бира	z	
11	Решение	13.33333333	13.33333333	1200	

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	Adjustable Cells							
2				Final	Reduced	Objective	Allowable	Allowable
3	Cell	Name		Value	Cost	Coefficient	Increase	Decrease
4	\$B\$11	Решение Светло пиво		13.333	0	40	60	15
5	\$C\$11	Решение Бира		13.333	0	50	30	30
6								
7	Constraints							
8				Final	Shadow	Constraint	Allowable	Allowable
9	Cell	Name		Value	Price	R.H. Side	Increase	Decrease
10	\$D\$5	Зърно Всичко		40	20	40	10	20
11	\$D\$6	Хмел Всичко						
12	\$D\$7	Малц Всичко		40	10	40	10	20

Фигура 2. Лист с данните и решението и справка с анализ на чувствителността

- в) Нека печалбата от един барел бира е станала \$85. Ще се промени ли оптималното решение?
- г) Да предположим, че фирмата е установила, че 10 lb от малца са мухлясали и трябва да бъдат изхвърлени. Ще се промени ли оптималното решение и какво се случва с печалбата?
- д) Да предположим, че фирмата може да купи допълнително 10 lb зърно, като заплати за тях допълнително \$200. Ще го направи ли? Обяснете.
- е) Попълнете липсващите числа в справката с анализа на чувствителността в реда Хмел, като използвате само листа с данните на задачата и полученото в него оптимално решение. Обяснете по какъв начин е възможно да бъде получено всяко от тези числа.
- ж) Нека количеството на зърното се е увеличило с 5 lb, а това на малца е намаляло с 10 lb. Ще се промени ли оптималният базис?

ОТГОВОРИ И РЕШЕНИЯ

1. а) Светло пиво и бира по $13\frac{1}{3}$ барела. Печалба \$1200. Клетки B11, C11, D11.

б) Оптималното решение се запазва, защото 60 е в интервала на устойчивост $[25, 100]$. Печалбата се увеличава с $20 \cdot 13\frac{1}{3} = \$266\frac{2}{3}$ до $\$1466\frac{2}{3}$.

в) Оптималното решение се променя, защото 85 не е в интервала на устойчивост $[20, 80]$.

г) Загубата на 10 lb малц е по-малко от допустимото намаляване 20. Оптималното решение се променя винаги, когато има промени в десните страни на ограниченията, но оптималният базис се запазва. Тогава може да се използва двойствената цена на малца (клетка E12). Стойността на целевата функция намалява с $10 \cdot 10 = \$100$ до \$1100.

д) Не. Печалбата е $10 \cdot 20 - 200 = \$0$.

е) Числата в реда Хмел се попълват по следния начин:

- Final Value = 26,667 от клетка D6;
- Shadow Price = 0, защото ограничението е пасивно;
- RHS = 30 от клетка E6;
- Allowable Increase = 1E+30, защото ограничението е пасивно;
- Allowable Decrease = 3,333 (разликата на E6 и D6).

ж) По правилото на 100% направените промени са $\frac{5}{10} + \frac{10}{20} = 100\%$. Оптималният базис остава допустим при направените промени.