

Задача с фиксирани такси

В. Черногоров

17 ноември 2009 г.

1. Формулировка на задачата

Три телефонни компании предложили на мистър Смит да се абонира за техните услуги за междуселищни разговори. Цените на услугите на компаниите (в долари) са дадени в табл. 1.

Таблица 1. Ценоразпис на телефонните компании

Компания	Месечна такса	За 1 мин. разговор
A	16	0,25
B	25	0,21
C	18	0,22

Телефонните разговори на мистър Смит обикновено са около 200 мин. на месец. Предполага се, че мистър Смит не плаща месечна такса, ако не използва дадена компания за междуселищни разговори, както и че мистър Смит може да разпределя разговорите си между трите компании, както намери за добре. Как мистър Смит трябва да използва трите компании, за да минимизира месечната си телефонна сметка?

2. Математически модел

Тази задача лесно може да бъде решена и без да се използват методите на целочисленото линейно оптимиране (ЦЛО). Въпреки това е твърде поучително да я формулираме именно като такава задача.

Нека

- x_j са минутите проведени разговори чрез компанията j , $j = A, B, C$;
- $y_j = 1$, ако $x_j > 0$, и $y_j = 0$ при $x_j = 0$, $j = A, B, C$.

За осигуряване на равенството $y_j = 1$ при положителна стойност на променливата x_j използваме ограничението $x_j \leq My_j$, $j = A, B, C$, където M е достатъчно голямо число, което не трябва да ограничава променливата x_j . Тъй като междуселищните разговори са около 200 мин. на месец, т.е. $x_j \leq 200$ за всички j , достатъчно е да положим $M = 200$.

Сега можем да формулираме следната задача:

$$\min z = 0,25x_A + 0,21x_B + 0,22x_C + 16y_A + 25y_B + 18y_C$$

при ограничения

$$x_A + x_B + x_C = 200,$$

$$x_A \leq 200y_A,$$

$$x_B \leq 200y_B,$$

$$x_C \leq 200y_C,$$

$$x_A, x_B, x_C \geq 0,$$

$$y_A, y_B, y_C \in \{0, 1\}.$$

Формулировката на задачата показва, че j -тата месечна такса за използване на дадена компания е част от целевата функция z само при условие, че $y_j = 1$, което по дефиниция може да бъде изпълнено само когато $x_j > 0$. Ако в оптималното решение x_j е равна на нула, то минимумът на функцията z (като се вземе предвид положителния коефициент пред y_j) може да се достигне само ако y_j е равна на нула.

Оптимално решение на дадената задача е $x_C = 200$, $y_C = 1$, а всички останали променливи са равни на нула. Това означава, че компанията C трябва да бъде избрана за водене на междуселищни разговори. Стойността на целевата функция е \$62.

Трябва да се подчертае, че информацията, която носи променливата y_C , е излишна, тъй като същият резултат следва от $x_C > 0$ ($= 200$). Наистина, основна причина за използването на променливите y_A , y_B и y_C е само наличието на месечна такса за телефона. Всъщност само тези двоични променливи преобразуват изходната нелинейна задача в частично целочислена и подаваща се на аналитично решаване.

ЗАДАЧИ ЗА УПРАЖНЕНИЯ

1. Хестингхаус трябва да осигури за нуждите на своите клиенти 12 000 кондензатора месечно. Хестингхаус може да поръча кондензаторите в три различни завода. Производственият капацитет, цената на един кондензатор и цената на поръчката за даден завод са дадени в таблица 2.

Таблица 2. Данни за задачата

Завод	Цена на поръчката (в хил. \$)	Цена за 1 брой кондензатор (в \$)	Производствен капацитет (броя)
1	80	20	6 000
2	40	25	7 000
3	30	30	6 000

Цената на поръчката се заплаща дори ако в съответния завод се поръча само един кондензатор.

Да се формулира и реши линейна оптимизационна задача, с чиято помощ Хестингхаус да минимизира месечните си разходи, необходими за задоволяване на търсенето на своите клиенти.

2. За нуждите на обучението на студентите си един щатски университет трябва да закупи 1100 РС от трима търговци. Първият търговец продава на \$500 за брой плюс \$5000 за доставката, вторият търговец продава на \$350 за брой плюс \$4000 за доставката, а третият продава на \$250 за брой плюс \$6000 за доставката. Първият търговец разполага с 500 броя, вторият — с 900, а третият — с 400.

Да се формулира и реши линейна оптимизационна задача, с чиято помощ университетът да минимизира разходите по закупуване на необходимите компютри.

ОТГОВОРИ И РЕШЕНИЯ

1. Хестингхаус поръчва по 6000 кондензатора в заводи 1 и 2 и общата цена е \$390 000.

2. Купува 700 компютъра от доставчик 2 и 400 компютъра от доставчик 3 на обща цена \$355 000.