

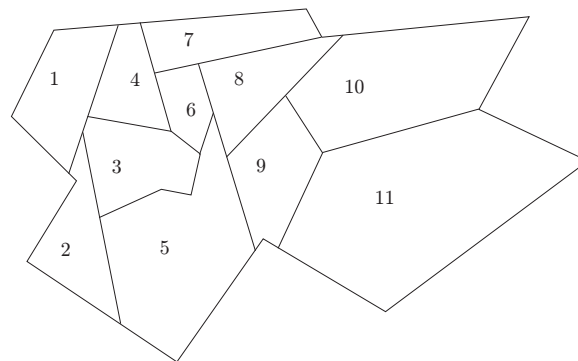
# Задача за покритие

В. Черногоров

3 декември 2008 г.

## 1. Формулировка на задачата

За да илюстрираме този модел, да разгледаме следната задача за определяне на местоположение. Град преразглежда разположението на противопожарните си станции. Градът се състои от квартали, както е показано на фиг. 1.



Фигура 1. Карта на града

Противопожарна станция може да бъде разположена в произволен квартал. Тя може да гаси пожари в квартала, където е разположена, както и във всеки съседен на него квартал. Да се минимизира броят на противопожарните станции.

## 2. Математически модел

Въвеждаме променливите  $x_j \in \{0, 1\}$ ,  $j = 1, \dots, 11$ , като  $x_j = 1$ , ако в квартала  $j$  е разположена противопожарна станция, и  $x_j = 0$  в противен случай. Така получаваме следната задача

$$\min z = \sum_{j=1}^{11} x_j$$

при ограничения

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &\geq 1, \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_5 &\geq 1, \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 &\geq 1, \\ x_1 + x_3 + x_4 + x_6 + x_7 &\geq 1, \\ x_2 + x_3 + x_5 + x_6 + x_8 + x_9 &\geq 1, \\ x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 &\geq 1, \\ x_4 + x_6 + x_7 + x_8 &\geq 1, \\ x_5 + x_6 + x_7 + x_8 + x_9 + x_{10} &\geq 1, \\ x_5 + x_8 + x_9 + x_{10} + x_{11} &\geq 1, \\ x_8 + x_9 + x_{10} + x_{11} &\geq 1, \\ x_9 + x_{10} + x_{11} &\geq 1, \\ x_j \in \{0, 1\}, \quad j = 1, \dots, 11. \end{aligned}$$

Първото ограничение означава, че трябва да има противопожарна станция в квартал 1 или в някой от съседните му квартали (2, 3, 4). Следващото ограничение е за квартал 2 и т. н. Да отбележим, че коефициентът  $a_{ij}$  е 1, ако кварталът  $i$  е съседен на квартала  $j$  или ако  $i = j$ , и 0 в противен случай. Стълбът  $A_j$  на матрицата на ограниченията  $A$  представлява множеството на кварталите, които могат да бъдат обслужени от противопожарна станция, разположена в квартал  $j$ . Трябва да се намери множество от такива подмножества  $j$ , които *покриват* множеството на всички квартали в смисъл, че всеки квартал се появява в множеството на обслужване на *поне* една противопожарна станция.

Едно оптимално решение е  $x_3 = x_8 = x_9 = 1$  и останалите са равни на 0.

Задачата за покритие се характеризира с двоични променливи, ограничения  $\geq$ , чиито десни страни са 1, а левите им страни са суми на някои от променливите. В общия случай целевата функция може да има произволни коефициенти, въпреки че в нашия случай тя е особено проста.