

# Задача за линейно разкрояване

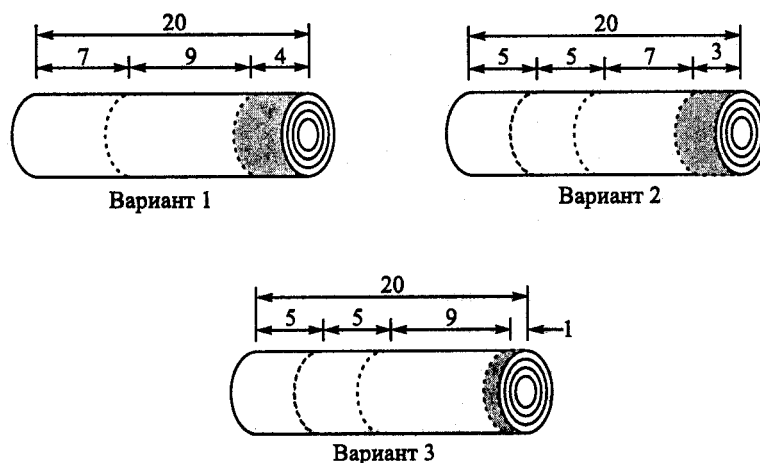
В. Черногоров

17 ноември 2009 г.

## 1. Класически вариант на задача за линейно разкрояване

### 1.1. Формулировка на задачата

Хартиена фабрика произвежда стандартни рулони хартия с ширина 20 фута. Специални поръчки на клиентите ѝ изискват разрязване на стандартните рулони. Една типова поръчка (а поръчките се менят всеки ден) например е следната: 150 рулона с ширина 5 фута, 200 рулона с ширина 7 фута и 300 рулона с ширина 9 фута. Фабриката изпълнява поръчките чрез разрязване на стандартните рулони със специални ножове на по-малки парчета. Съществуват няколко варианта за разкрояване на стандартен рулон, три от които са показани на фиг. 1 (другите варианти ще бъдат описани по-късно,



Фигура 1. Три варианта за разрязване на стандартните рулони

а засега ще се ограничим само с тези). За изпълнение на поръчката може да се използват различни комбинации от тези варианти. Например за спомената поръчка са възможни следните комбинации от вариантите 1, 2 и 3:

- разрязват се 300 стандартни рулона, като се използва вариант 1, и 75 рулона, като се използва вариант 2;
- разрязват се 200 стандартни рулона, като се използва вариант 1, и 100 рулона, като се използва вариант 3.

Коя от тези комбинации е по-добра? За да отговорим на този въпрос, трябва да пресметнем загубите от всяка от тях. Можем да оценим преимуществото на всяка една от тези комбинации, ако пресметнем сумарния отпадък, получен след прилагането ѝ. Тъй като парчетата от рулоните, които са отпадъци, имат различна дължина, трябва да пресметнем *обема* на тези отпадъци, а не просто тяхното количество. Ако предположим, че един стандартен рулон хартия има напречно сечение, равно на  $L$  квадратни фута, пресмятаме загубите за комбинациите 1 и 2:

$$\text{Комбинация 1: } 300 \times (4 \times L) + 75 \times (3 \times L) = 1425L \text{ куб. фута.}$$

$$\text{Комбинация 2: } 200 \times (4 \times L) + 100 \times (1 \times L) = 900L \text{ куб. фута.}$$

Ако броят на получените рулони с ширина 5, 7 или 9 фута след прилагането на някоя комбинация на разкрояване е по-голям от заявеното количество, то разликата между тези количества също се смята за отпадък. В първата комбинация при използването на вариант 1 се получават  $300 - 200 = 100$  излишни рулона с ширина 7 фута; вариант 2 добавя още 75 излишни рулона със същата ширина. Така допълнителните загуби са  $175 \times (7 \times L) = 1225L$  куб. фута. Комбинация 2 не води до излишни рулони с ширина 7 и 9 фута, но прилагането на вариант 3 води до  $200 - 150 = 50$  излишни рулона с ширина 5 фута, което прави  $50 \times (5 \times L) = 250L$  куб. фута допълнителни отпадъци. Накрая получаваме:

$$\text{Обем на отпадъците от комб. 1} = 1425L + 1225L = 2650L \text{ куб. фута.}$$

$$\text{Обем на отпадъците от комб. 2} = 900L + 250L = 1150L \text{ куб. фута.}$$

Очевидно комбинация 2 е по-добра, защото дава по-малко отпадъци.

За получаването на оптимално решение на дадената задача е необходимо да се определят всички възможни варианти за разкрояване на стандартните рулони и след това да се получат *всички възможни* комбинации на тези варианти. Макар и определянето на всички възможни варианти на разкрояване да не е сложно, разглеждането на всички възможни комбинации на тези

варианти вече е нетривиална задача. Тук е необходим систематичен подход при организирането на такова разглеждане. В дадения случай това ще стане с подходящ модел на линейното оптимизиране.

## 1.2. Математически модел

Трябва да се намери комбинация от *варианти за разкрояване* (променливи на задачата), с помощта на която *да се изпълни поръчката* (ограничения на задачата) и *общите отпадъци* (целева функция) да бъдат минимални.

Променливите трябва да се определят по такъв начин, че стойностите им да бъдат свързани с начините, по които могат да бъдат разкроени стандартните рулони хартия. Затова променливите на задачата се определят като *количеството стандартни рулони, разкроени с помощта на конкретните варианти*. Този начин на въвеждане на променливите изисква предварително да се опишат възможните варианти за разкрояване. Три от тези варианти вече бяха споменати по-горе. Останалите са показани в табл. 1.

Таблица 1. Варианти за разкрояване

| Ширина<br>(фута) | Варианти |   |   |   |   |   | Количество<br>рулони |
|------------------|----------|---|---|---|---|---|----------------------|
|                  | 1        | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |                      |
| 5                | 0        | 2 | 2 | 4 | 1 | 0 | 150                  |
| 7                | 1        | 1 | 0 | 0 | 2 | 0 | 200                  |
| 9                | 1        | 0 | 1 | 0 | 0 | 2 | 300                  |
| Отпадък (фута)   | 4        | 3 | 1 | 0 | 1 | 2 |                      |

Обикновено построяването на таблицата се извършва по следния начин:

- Взема се най-големият размер (в случая 9 фута) и рулонът (20 фута) се разрязва на максималния възможен брой парчета (2) с този размер; остават 2 фута, които са отпадък, понеже минималният размер, който е необходим, е 5 фута. Така се получава вариант 6 от табл. 1.
- След това се реже едно парче по-малко от най-големия размер (в случая само 1 парче); остават 11 фута, от които се реже максималният брой (1) от следващия по големина размер (7 фута); остават 4 фута отпадък (вариант 1 от табл. 1).
- Продължава се с едно парче от 9 фута, но вече не се реже от 7 фута (защото при предишното рязане е отрязано едно парче от 7 фута, а

целта сега е с единица по-малко, т.е. нула) и остатъкът от 11 фута ни дава 2 парчета по 5 фута и отпадък 1 фут (вариант 3 от таблица 1).

Продължава се без парчета от 9 фута, защото с едно парче от 9 фута са направени всички възможни варианти, и последователно се получават варианти 5, 2 и 4 от табл. 1.

Сега вече можем да определим променливите по следния начин:  $x_j$  е количеството стандартни рулони, разкроени по  $j$ -тия начин,  $j = 1, \dots, 6$ .

Ограничения на задачата се състоят в това получените рулони с ширина 5, 7 и 9 фута да бъдат достатъчни за изпълнението на поръчката. Като използваме вариантите от табл. 1, получаваме:

- количество на рулоните с ширина 5 фута  $= 2x_2 + 2x_3 + 4x_4 + x_5 \geq 150$ ;
- количество на рулоните с ширина 7 фута  $= x_1 + x_2 + 2x_5 \geq 200$ ;
- количество на рулоните с ширина 9 фута  $= x_1 + x_3 + 2x_6 \geq 300$ .

За построяване на целевата функция забелязваме, че общият обем на отпадъците може да се пресметне като разлика между обема на всички разрязани рулони и обема на рулоните, необходими за изпълнение на поръчката. Да запишем това по следния начин:

- обем на използваните стандартни рулони  $= 20L(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6)$ ,
- обем на поръчаните рулони  $= L(150 \times 5 + 200 \times 7 + 300 \times 9) = 4750L$ .

Тъй като обемът на рулоните, необходими за изпълнение на поръчката, и напречното сечение  $L$  са константи, то целевата функция може да се запише просто като сума на променливите:  $z = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6$ .

Окончателно получаваме следната линейна оптимизационна задача

$$\min z = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6$$

при ограничения

$$\begin{aligned} 2x_2 + 2x_3 + 4x_4 + x_5 &\geq 150, \\ x_1 + x_2 + 2x_5 &\geq 200, \\ x_1 + x_3 + 2x_6 &\geq 300, \\ x_j &\geq 0 \text{ и цели, } j = 1, \dots, 6. \end{aligned}$$

Оптимално решение на тази задача е  $\mathbf{x}^* = (4, 0, 0, 13, 98, 148)^T$ , получен като целочислено решение, а също така и  $\mathbf{x}^{**} = (0, 0, 0, 13, 100, 150)^T$ , получен чрез закръгляване на непрекъснатото решение. И в двата случая целевата функция е равна на 263.

## 2. Друг вариант на задача за линейно разкрояване

### 2.1. Формулировка

За производството на комплекти от по три детайла фирма разполага с 50 летви с дължина 6,5 m и 200 летви с дължина 4 m. Всеки комплект се изработва от два детайла с дължина 2 m и един детайл с дължина 1,25 m. Да се използват наличните материали така, че да се произведат най-много комплекти.

### 2.2. Математически модел

Преди да въведем променливите, да видим по колко начина могат да бъдат разкроени наличните суровини на необходимите за производството детайли. Информацията за това е показана в таблица 2. Виждаме, че съществуват седем различни начина за разкрояване на суровините. Затова въвеждаме

Таблица 2. Варианти за разрязване на летвите на необходимите детайли

| Суровини→ | Летви 6,5 m |   |   |   | Летви 4 m |   |   |
|-----------|-------------|---|---|---|-----------|---|---|
| Детайли ↓ | 1           | 2 | 3 | 4 | 5         | 6 | 7 |
| 2 m       | 3           | 2 | 1 | 0 | 2         | 1 | 0 |
| 1,25 m    | 0           | 2 | 3 | 5 | 0         | 1 | 3 |

променливите  $x_j$ ,  $j = 1, \dots, 7$ , като брой летви, разкроени по  $j$ -тия начин. Като вземем предвид, че един комплект се състои от два детайла с дължина 2 m и един детайл с дължина 1,25 m, то целевата функция е по-малкото от числата  $\frac{1}{2}(3x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_5 + x_6)$  и  $2x_2 + 3x_3 + 5x_4 + x_6 + 3x_7$ , т. е.

$$\min \left\{ \frac{1}{2}(3x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_5 + x_6), 2x_2 + 3x_3 + 5x_4 + x_6 + 3x_7 \right\} \rightarrow \max$$

при ограничения

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 50, \quad x_5 + x_6 + x_7 \leq 200, \quad x_j \geq 0 \text{ и цели, } j = 1, \dots, 7.$$

Така полученият модел не е линеен, защото целевата функция не е линейна. Сега ще покажем как можем да сведем нещата до линеен модел. Това става с въвеждането на нова променлива и нови ограничения. Нека новата променлива  $y$  е равна на горната целевата функция, т. е.

$$y = \min \left\{ \frac{1}{2}(3x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_5 + x_6), 2x_2 + 3x_3 + 5x_4 + x_6 + 3x_7 \right\}.$$

---

### Задача за линейно разкрояване

---

Тогава целевата функция на новата задача, чийто променливи са  $x_j$ ,  $j = 1, \dots, 7$ , и  $y$ , е  $\max y$ , където  $y \leq \frac{1}{2}(3x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_5 + x_6)$  и  $y \leq 2x_2 + 3x_3 + 5x_4 + x_6 + 3x_7$ . Като приведем тези нови ограничения към стандартен вид, окончателно получаваме линейната задача

$$\max y,$$

при ограничения

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 50,$$

$$x_5 + x_6 + x_7 \leq 200,$$

$$3x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_5 + x_6 - 2y \geq 0,$$

$$2x_2 + 3x_3 + 5x_4 + x_6 + 3x_7 - y \geq 0,$$

$$y, x_j \geq 0 \text{ и цели, } j = 1, \dots, 7.$$

Оптимално решение на тази задача е  $\mathbf{x}^* = (0, 13, 0, 37, 199, 0, 1)^T$  и стойността на целевата функция е 212 комплекта.

### ЗАДАЧИ ЗА УПРАЖНЕНИЯ

1. Рудодобивна компания има нужда от подпорни конструкции. За целта тя може да използва стандартни букови греди с дължина 5 m, от които след разкрояване трябва да се получат 110 детайла с дължина 210 cm, 80 детайла с дължина 230 cm и 70 детайла с дължина 180 cm.

Да се формулира и реши линейна задача, която да позволи на компанията да произведе необходимите детайли и общият отпадък да бъде минимален.

2. Фирма трябва да монтира конструкции, състоящи се от един детайл с дължина 200 cm, три детайла с дължина 160 cm и два детайла с дължина 40 cm, като за целта разполага с 380 метални пръта с дължина 370 cm.

Да се формулира и реши линейна задача, която да позволи на фирмата с наличните метални пръти да монтира максимален брой конструкции.

### ОТГОВОРИ И РЕШЕНИЯ

1. Оптимално решение, получено със Solver:  $\mathbf{x}^* = (40, 0, 0, 55, 0, 35)^T$ ,  $z^* = 130$ . Има и друго оптимално решение:  $\mathbf{x}^{**} = (0, 60, 20, 0, 50, 0)^T$ .

2. Решение, получено със Solver:  $\mathbf{x}^* = (180, 0, 180, 0, 20)^T$ ,  $z^* = 180$ .