

Нетрадиционни транспортни модели

В. Черногоров

18 ноември 2009 г.

1. Задача за управление на запасите

1.1. Формулировка на задачата

Фабрика произвежда раници за пътешественици. Търсене на тази продукция има главно през месеците от март до юни (т.е. четири месеца в годината). Фабриката оценява търсенето през тези месеци съответно на 100, 200, 180 и 300 раници. Тъй като производството не е ритмично, работниците не работят на пълен работен ден. През разглеждания четиримесечен период фабриката може да произведе съответно 50, 180, 280 и 270 раници. Производството и търсенето през различните месеци не съвпадат, затова търсенето през текущия месец може да бъде задоволено по следния начин:

1. чрез производството през текущия месец;
2. чрез излишък от произведени през предишни месеци раници;
3. чрез излишък от произведени през следващи месеци раници в сметката на неизпълнените поръчки.

В първия случай една раница струва 40,00 лв. Във втория случай възникват допълнителни разходи за складиране по 0,50 лв на раница за месец. В третия случай за просрочените поръчки се заплаща глоба от 2,00 лв на раница за месец. Как фабриката да задоволява търсенето през отделните месеци, така че разходите ѝ да бъдат минимални?

1.2. Математически модел

Описаната ситуация може да се моделира във вид на транспортна задача, като се използват съответствията между елементите на задачата за управление на запасите и тези на транспортната задача, посочени в табл. 1.

Таблица 1. Съответствие между елементите на задачата за управление на запасите и тези на транспортната задача

Модел за управление на запаси	Транспортен модел
1. Период на производство i	1. Начален пункт i
2. Период на реализация j	2. Краен пункт j
3. Обем на производството за периода i	3. Наличност в началния пункт i
4. Обем на реализацията на продукцията за периода j	4. Търсене в крайния пункт j
5. Стойност на единица продукция за периода от i до j (производство + складиране + глоби)	5. Стойност на превоза от пункта i до пункта j

Така получаваме транспортния модел от табл. 2, като стойността на „транспортирането“ на единица продукция от период i до период j се пресмята по формулата

$$c_{ij} = \begin{cases} \text{стойност на производството в периода } i, i = j, \\ \text{стойност на производството в периода } i + \\ \quad \text{стойност за складиране от } i \text{ до } j, i < j, \\ \text{стойност на производството в периода } i + \text{глоба от } i \text{ до } j, i > j. \end{cases}$$

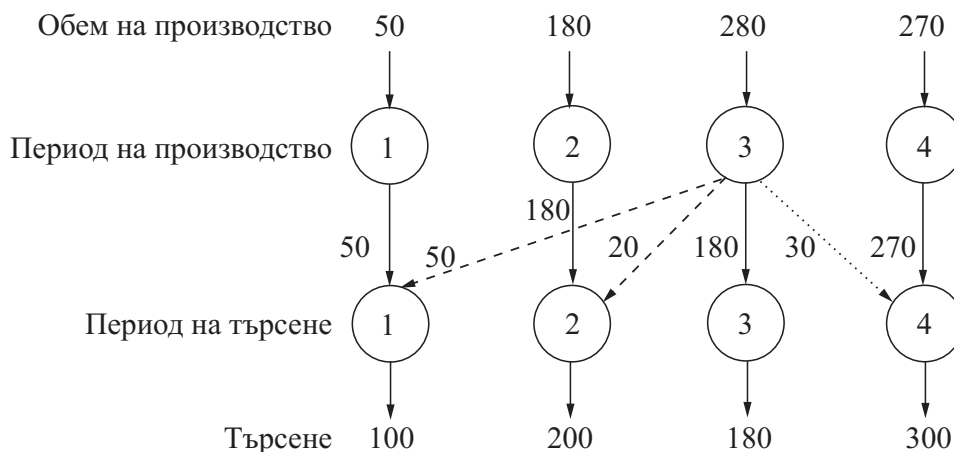
Например

$$\begin{aligned} c_{11} &= 40,00, \\ c_{24} &= 40,00 + (0,50 + 0,50) = 41,00, \\ c_{41} &= 40,00 + (2,00 + 2,00 + 2,00) = 46,00. \end{aligned}$$

Едно оптимално решение е представено на фиг. 1. С пунктирани линии е показан недостигът на продукцията, с линия от точки — производството

Таблица 2. Транспортен модел

	1	2	3	4	
1	40,00	40,50	41,00	41,50	50
2	42,00	40,00	40,50	41,00	180
3	44,00	42,00	40,00	40,50	280
4	46,00	44,00	42,00	40,00	270
	100	200	180	300	



Фигура 1. Едно оптимално решение на задачата за раниците

за бъдещ период и с непрекъснати линии — производството за задоволяване на търсенето през текущия период. Стойността на целевата функция е 31 455 лв.

2. Задача за разпределение на оборудването

2.1. Формулировка на задачата

Дървопреработвателен завод преработва различна дървесина (от мека борова до твърда дъбова) по утвърден седмичен производствен план. Според този план в зависимост от вида на дървесината в различните работни дни на седемдневната работна седмица са необходими различен брой триони (табл. 3).

Заводът може да се снабди с необходимите триони като:

- купува нови триони по 12 лв парчето;
- дава на нощно точене триони и заплаќи по 6 лв за един наточен трион (експресна поръчка);

Таблица 3. Дневна необходимост от триони

Ден	1(Пн)	2(Вт)	3(Ср)	4(Чт)	5(Пт)	6(Сб)	7(Нд)
Брой триони	24	12	14	20	18	14	22

- дава на двудневно точене триони и заплати по 3 лв за един наточен трион (обикновена поръчка).

Какъв план на действие да избере ръководството на завода, така че производствените му разходи за триони да бъдат минимални?

2.2. Математически модел

Задачата на завода може да бъде описана като транспортен модел с осем начални пункта и седем крайни пункта. Крайните пунктове съответстват на дните от седмицата. Началните пунктове се определят по следния начин. Първият начален пункт съответства на купуването на нови триони. Наличността в този пункт е равна на сумарното количество на използваните през седмицата триони, тъй като е възможна покупка на триони, която да задоволи цялата седмична необходимост на завода (124 триона). Началните пунктове с номера от 2 до 8 съответстват на седемте дни на работната седмица. Наличността във всеки от тези начални пунктове е равна на количеството триони, използвани през съответния работен ден (табл. 3). „Транспортните“ разходи в този модел са съответно 12, 6 и 3 лв в зависимост от това дали се купува нов трион или се получава след нощно или двудневно точене. Да отбележим, че използваните триони се предават за нощно точене в *края* на i -тия работен ден и могат да се използват със *започването* на $(i + 1)$ -ия или $(i + 2)$ -ия работен ден. При двудневното точене трионите се предават в *края* на i -ия работен ден и могат да се използват със *започването* на $(i + 3)$ -ия работен ден или през следващите го дни. Пълният транспортен модел за описаната ситуация е даден в табл. 4. Цените са в лева и са разположени на горния ред, а количеството на трионите в едно оптимално решение е в полученен шрифт на долния ред във всяка клетка на транспортната таблица. С M е означено голямо положително число, което има за цел да „забрани“ „транспорта“ към предишни дни от седмицата. Стълбът „Остатък“ съответства на фиктивен краен пункт. В него е показан броят на трионите, които не са дадени за точене в края на всеки работен ден.

Да обясним получения резултат, както е показан в табл. 5. В понеделник заводът купува 24 нови триона. В края на работния ден остават 24 използвани триона, от които 2 се дават за нощно точене, а 22 остават за двудневно точене, като 20 от тях се използват в четвъртък, а 2 — в петък. Във вторник се купуват 10 триона и 2 идват от експресно точене. В края на работния ден вторник всичките 12 триона се дават на нощно точене и се използват в сряда, когато се купуват и 2 нови триона. Останалите числа в посоченото оптимално решение се интерпретират аналогично.

Таблица 4. Транспортна таблица за дървопреработвателния завод

	1(Пн)	2(Вт)	3(Ср)	4(Чт)	5(Пт)	6(Сб)	7(Нд)	8(Ост.)	
1 (Нови)	12 24	12 10	12 2	12	12	12	12	0 88	124
2 Пн	<i>M</i>	6 2	6	3 20	3 2	3	3	0	24
3 Вт	<i>M</i>	<i>M</i>	6 12	6	3	3	3	0	12
4 Ср	<i>M</i>	<i>M</i>	<i>M</i>	6	6 14	3	3	0	14
5 Чт	<i>M</i>	<i>M</i>	<i>M</i>	<i>M</i>	6 2	6	3 18	0	20
6 Пт	<i>M</i>	<i>M</i>	<i>M</i>	<i>M</i>	<i>M</i>	6 14	6 4	0	18
7 Сб	<i>M</i>	<i>M</i>	<i>M</i>	<i>M</i>	<i>M</i>	<i>M</i>	6	0 14	14
8 Нд	<i>M</i>	<i>M</i>	<i>M</i>	<i>M</i>	<i>M</i>	<i>M</i>	<i>M</i>	0 22	22
	24	12	14	20	18	14	22	124	

Таблица 5. Оптимално решение на задачата за дървопреработвателния завод

Работен ден	Нови триони	Нощно точене	Двудневно точене	Остатък
Понеделник	24	2 (Вт)	20 (Чт) + 2 (Пт)	0
Вторник	10	12 (Ср)	0	0
Сряда	2	14 (Пт)	0	0
Четвъртък	0	2 (Пт)	18 (Нд)	0
Петък	0	14 (Сб) + 4 (Нд)	0	0
Събота	0	0	0	14
Неделя	0	0	0	22

Обща стойност 840 лв.

ЗАДАЧИ ЗА УПРАЖНЕНИЯ

1. *Paperco* преработва пулп от вестникарска хартия (В), негланцирана хартия (Н) или гланцирана хартия (Г) в пулп от рециклирана вестникарска хартия (РВ), рециклирана негланцирана хартия (РН) и рециклирана гланцирана хартия (РГ).

РВ хартия се получава от преработка на В или Н хартия. РГ хартия може да се получи от преработка на всеки тип хартия. РН хартия може да

се получи от преработка на Н или Г хартия. Процесът на получаване на

- РВ хартия похабява 20% от входящия пулп, оставяйки 80% за рециклирания пулп;
- РГ хартия похабява 10% от входящия пулп;
- РН хартия похабява 15% от входящия пулп.

Покупните цени и запасите от всеки вид хартия са дадени в таблица 6, а цените за преработка — в таблица 7.

Таблица 6. Покупни цени и запаси

	Покупна цена за тон пулп (\$)	Запас (t)
В	10	500
Г	9	300
Н	8	200

Таблица 7. Цени за преработка

	Цена за преработка на тон от входящия пулп (\$)
В използвана за РВ	3
В използвана за РГ	4
Г използвана за РГ	3
Г използвана за РН	5
Н използвана за РВ	4
Н използвана за РГ	6
Н използвана за РН	1

За да посрещне пазарното търсене, фирмата трябва да произведе поне 250 t РВ, поне 300 t РН и поне 150 t РГ.

Да се формулира и реши линейна задача, с чиято помощ фирмата да минимизира разходите си, като отговори на пазарното търсене.

2. Компания за кетъринг трябва да разполага със следните количества чисти покривки, които да бъдат налични в началото на всеки от следващите

четири дни: ден 1 — 15 покривки; ден 2 — 12 покривки; ден 3 — 18 покривки; ден 4 — 6 покривки.

Химическото чистене, което пере мръсните покривки, предлага бърза и обикновена услуга. Бързата услуга струва 10 цента на покривка и почистените по този начин покривки са на разположение още на следващия ден след последната им употреба. Бавната услуга струва 6 цента на покривка и покривките са на разположение един ден по-късно в сравнение с бързата услуга. Нови покривки се купуват на цена от 20 цента за покривка.

Да се формулира и реши линейна задача, която да позволи на компанията да посрещне нуждата от чисти покривки през следващите четири дни на минимална цена.

ОТГОВОРИ И РЕШЕНИЯ

1. Стойност на целевата функция \$10 042,89. Разпределението на закупен и произведен пулп е в таблица 8.

Таблица 8. Разпределение на закупен и произведен пулп

	Вестникарска	Гланцирана	Негланцирана
Рециклирана В	312,5	0	0
Рециклирана Г	19,608	147,059	0
Рециклирана Н	0	152,941	200

2. Минимална цена 666 цента. Първият ден се купуват 15 нови покривки, а след края на работния ден 9 се дават на бърза услуга и 6 на обикновена. За втория ден се купуват 3 нови покривки и 9 се прибират от бързата услуга, а след края на работния ден всичките 12 се дават на бърза услуга. За третия ден се прибират 12 покривки от бързата услуга от втория ден и 6 от обикновената услуга от първия ден, а след края на работния ден 6 се дават на бърза услуга и 12 не се перат. За четвъртия ден се прибират 6 от бързата услуга от третия ден и след края на работния ден нищо не се пере.