

Задача за смесване

В. Черногоров

21 октомври 2010 г.

Друга класическа задача, която води до линеен модел, е тази за смесване на различни продукти с цел получаване на нов продукт с определени характеристики или свойства.

1. Формулировка на задачата

Смеска за хранене на животни се изготвя чрез смесването на три съставки. Полученият продукт трябва да удовлетворява няколко ограничения за хранителното си съдържание. Възможните съставки, хранителното им съдържание (в килограми за 1 kg от съответната съставка) и единичната им цена са показани в таблица 1.

Таблица 1. Хранително съдържание и цена на съставките

Съставка	Калций (kg/kg)	Белтъчини (kg/kg)	Целулоза (kg/kg)	Единична цена (лв/kg)
Варовик	0,380	0,00	0,00	0,100
Царевица	0,001	0,09	0,02	0,305
Соя	0,002	0,50	0,08	0,900

Смеската трябва да удовлетворява следните ограничения:

- Калций — най-малко 0,8%, но не повече от 1,2%;
- Белтъчини — поне 22%;
- Целулоза — не повече от 5%.

Задачата е да се намери такъв състав на смеската, който да удовлетворява тези ограничения и да има минимална цена.

2. Математически модел

Променливи. Нека с x_1 , x_2 , x_3 означим частта на варовика, царевичата и соята съответно в 1 kg от смеската.

Целева функция. Тъй като всяка променлива е определена като част от 1 килограм, то целта ни е да минимизираме цената на един килограм от смеската

$$\min z = 0,100x_1 + 0,305x_2 + 0,900x_3.$$

Ограничения.

Общата маса на смеската е 1 kg: $x_1 + x_2 + x_3 = 1$

min съдържание на калций: $0,38x_1 + 0,001x_2 + 0,002x_3 \geq 0,008$

max съдържание на калций: $0,38x_1 + 0,001x_2 + 0,002x_3 \leq 0,012$

min съдържание на белтъчини: $0,09x_2 + 0,50x_3 \geq 0,22$

max съдържание на целулоза: $0,02x_2 + 0,08x_3 \leq 0,05$

Неотрицателност: $x_1, x_2, x_3 \geq 0$

Оптималното решение на задачата (с точност до 1 g) е в 1 kg от смеската да има

- 0,028 kg варовик,
- 0,649 kg царевича
- 0,323 kg соя
- и общата цена е 0,49 лв.

ЗАДАЧИ ЗА УПРАЖНЕНИЯ

1. Рафинерия произвежда три вида бензин Б1, Б2 и Б3 чрез смесване на три вида суров петрол П1, П2 и П3. Продажните цени за барел бензин и покупните цени за барел суров петрол са дадени в таблица 2. От всеки вид суров петрол рафинерията може да закупи не повече от 5000 барела дневно.

Трите вида бензин се различават по октаново число и съдържание на сяра. Суровият петрол, смесван за получаването на бензин Б1, трябва да има средно октаново число поне 10 и да съдържа не повече от 1% сяра. Суровият петрол, смесван за получаването на бензин Б2, трябва да има средно октаново число поне 8 и да съдържа не повече от 2% сяра. Суровият петрол, смесван за получаването на бензин Б3, трябва да има средно октаново число поне 6 и да съдържа не повече от 1% сяра. Октановото число и съдържанието на сяра във всеки от трите вида суров петрол е дадено в таблица 3.

Задача за смесване

Таблица 2. Цени на бензините и суровия петрол

Бензин	Продажна цена за барел (\$)	Суров петрол	Покупна цена за барел (\$)
Б1	70	П1	45
Б2	60	П2	35
Б3	50	П3	25

Таблица 3. Октанови числа и съдържание на сяра за суровия петрол

Суров петрол	Октаново число	Съдържание на сяра (%)
П1	12	0,5
П2	6	2,0
П3	8	3,0

Получаването на един барел бензин от един барел суров петрол струва \$4 и рафинерията може да произвежда не повече от 14 000 барела бензин дневно.

Постоянните клиенти на рафинерията се нуждаят от следните количества бензин: Б1 – 3000 барела дневно, Б2 – 2000 барела дневно, Б3 – 1000 барела дневно. Компанията счита за свое задължение да посрещне това търсене. За да повиши търсенето на своите продукти, рафинерията разчита и на реклама. Всеки долар, харчен дневно за реклама на даден вид бензин, повишава дневното търсене на този вид бензин с 10 барела. Например ако рафинерията реши да харчи дневно \$20 за реклама на Б2, то дневното търсене на бензин Б2 ще нарастне с $20 \times 10 = 200$ барела.

Да се формулира и реши линейна оптимизационна задача, с която рафинерията да максимизира дневната си печалба (печалба = приходи – разходи).

2. Фирма Металко желае да произведе нова сплав, която да съдържа 40% калай, 35% цинк и 25% олово. За целта тя разполага с пет сплави, чиито свойства са показани в таблица 4.

Да се формулира и реши линейна оптимизационна задача, с чиято помощ Металко да произведе новата сплав на минимална цена.

ОТГОВОРИ И РЕШЕНИЯ

1. Рафинерията трябва да реши две неща: първо, колко пари да похарчи за реклама на всеки вид бензин, и второ, как да смесва всеки вид бензин от наличните три вида суров петрол. Например рафинерията трябва да ре-

Задача за смесване

Таблица 4. Процентно съдържание на метали в сплавите

%	Сплав				
	1	2	3	4	5
Калай	60	25	45	20	50
Цинк	10	15	45	50	40
Олово	30	60	10	30	10
Цена (\$/lb)	22	20	25	24	27

ши какво количество от П1 трябва да използва за производството на Б1. Затова определяме променливите на задачата така: a_j = долари за реклама на бензин j дневно ($j = 1, 2, 3$), x_{ij} = барели суров петрол i , използван за производството на бензин j дневно ($i = 1, 2, 3; j = 1, 2, 3$). Например x_{21} е количеството барели от П2, използвани за производството на Б1 дневно.

Тези променливи са достатъчни за определяне на целевата функция и ограниченията, но преди да направим това да отбележим, че определянето на променливите означава, че

$$\begin{aligned}
 & x_{11} + x_{12} + x_{13} = \text{барели П1, използвани дневно} \\
 (1) \quad & x_{21} + x_{22} + x_{23} = \text{барели П2, използвани дневно} \\
 & x_{31} + x_{32} + x_{33} = \text{барели П3, използвани дневно} \\
 & x_{11} + x_{21} + x_{31} = \text{барели Б1, произвеждани дневно} \\
 (2) \quad & x_{12} + x_{22} + x_{32} = \text{барели Б2, произвеждани дневно} \\
 & x_{13} + x_{23} + x_{33} = \text{барели Б3, произвеждани дневно.}
 \end{aligned}$$

Производственият процес, който е описан, се развива в рамките на един ден. Затова количеството на произведения бензин j ($j = 1, 2, 3$) всеки ден трябва да бъде равен на дневното търсене. Ако произведеният бензин е в по-голямо количество, ще бъдат направени ненужни разходи за закупуване на суров петрол и за производство. Ако пък произведеният бензин е в по-малко количество, няма да бъдат задоволени нуждите на клиентите или ще бъдат направени излишни разходи за реклама.

Сега вече можем да определим целевата функция и ограниченията на задачата. Да започнем с целевата функция. От (2) дневните приходи от продажбата на бензин са равни на

$$70(x_{11} + x_{21} + x_{31}) + 60(x_{12} + x_{22} + x_{32}) + 50(x_{13} + x_{23} + x_{33}).$$

От (1) дневните разходи за закупуване на суров петрол са равни на

$$45(x_{11} + x_{12} + x_{13}) + 35(x_{21} + x_{22} + x_{23}) + 25(x_{31} + x_{32} + x_{33}).$$

Освен това дневните разходи за реклама са $a_1 + a_2 + a_3$, а дневните производствени разходи са $4(x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{31} + x_{32} + x_{33})$.
Тогава

Дн. печалба = дн. приходи от продажбата на бензин

– дн. разходи за закупуване на суров петрол

– дн. разходи за реклама – дн. разходи за производство

$$\begin{aligned} &= (70 - 45 - 4)x_{11} + (60 - 45 - 4)x_{12} + (50 - 45 - 4)x_{13} \\ &\quad + (70 - 35 - 4)x_{21} + (60 - 35 - 4)x_{22} + (50 - 35 - 4)x_{23} \\ &\quad + (70 - 25 - 4)x_{31} + (60 - 25 - 4)x_{32} + (50 - 25 - 4)x_{33} \\ &\quad - a_1 - a_2 - a_3 \end{aligned}$$

или

$$(3) \quad \max z = 21x_{11} + 11x_{12} + x_{13} + 31x_{21} + 21x_{22} + 11x_{23} + 41x_{31} + 31x_{32} + 21x_{33} - a_1 - a_2 - a_3.$$

Що се отнася до ограниченията, забелязваме, че трябва да бъдат удовлетворени следните 13 ограничения:

Ограничение 1 Дневното производство на Б1 трябва да бъде равно на дневното търсене.

Ограничение 2 Дневното производство на Б2 трябва да бъде равно на дневното търсене.

Ограничение 3 Дневното производство на Б3 трябва да бъде равно на дневното търсене.

Ограничение 4 Максимум 5000 барела П1 могат да бъдат закупени дневно.

Ограничение 5 Максимум 5000 барела П2 могат да бъдат закупени дневно.

Ограничение 6 Максимум 5000 барела П3 могат да бъдат закупени дневно.

Ограничение 7 Поради ограничения капацитет на рафинерията максимум 14 000 барела бензин могат да бъдат произведени дневно.

Ограничение 8 Смесеният суров петрол за производството на Б1 трябва да има средно октаново число 10.

Ограничение 9 Смесеният суров петрол за производството на Б2 трябва да има средно октаново число 8.

Ограничение 10 Смесеният суров петрол за производството на Б3 трябва да има средно октаново число 6.

Ограничение 11 Смесеният суров петрол за производството на Б1 трябва да съдържа максимум 1% сяра.

Ограничение 12 Смесеният суров петрол за производството на Б2 трябва да съдържа максимум 2% сяра.

Ограничение 13 Смесеният суров петрол за производството на Б3 трябва да съдържа максимум 1% сяра.

За да изразим ограничение 1 чрез променливите, да отбележим, че

Дн. търсене на Б1 = 3000 + търсенето на Б1, породено от реклама.

Второто събираемо в горната сума е равно на $10a_1$. Следователно дневното търсене на Б1 е $3000 + 10a_1$. Сега вече ограничение 1 може да бъде записано като

$$x_{11} + x_{21} + x_{31} = 3000 + 10a_1,$$

което се свежда до

$$(4) \quad x_{11} + x_{21} + x_{31} - 10a_1 = 3000.$$

По аналогичен начин ограничение 2 е

$$(5) \quad x_{12} + x_{22} + x_{32} - 10a_2 = 2000,$$

а ограничение 3 е

$$(6) \quad x_{13} + x_{23} + x_{33} - 10a_3 = 1000.$$

От (1) ограничения 4, 5 и 6 се свеждат до

$$(7) \quad x_{11} + x_{12} + x_{13} \leq 5000,$$

$$(8) \quad x_{21} + x_{22} + x_{23} \leq 5000,$$

$$(9) \quad x_{31} + x_{32} + x_{33} \leq 5000.$$

Тъй като общото количество на произведения бензин е равно на

$$B1 + B2 + B3 = (x_{11} + x_{21} + x_{31}) + (x_{12} + x_{22} + x_{32}) + (x_{13} + x_{23} + x_{33}),$$

ограничение 7 става

$$(10) \quad x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{13} + x_{23} + x_{33} \leq 14\,000.$$

За да изразим ограничения 8–10, трябва да определим средното октаново число на сместа от различни видове суров петрол. За целта предполагаме, че октановите числа на различните видове суров петрол се смесват линейно. Например при смесването на два барела П1, три барела П2 и един барел П3 средното октаново число на тази смес трябва да бъде

$$\frac{\text{Общо октаново число на сместа}}{\text{Брой на барелите в сместа}} = \frac{12 \cdot 2 + 6 \cdot 3 + 8 \cdot 1}{2 + 3 + 1} = \frac{50}{6} = 8\frac{1}{3}.$$

Като обобщим, можем да изразим ограничение 8 чрез

$$\frac{\text{Общо октаново число в Б1}}{\text{Б1 в сместа}} = \frac{12x_{11} + 6x_{21} + 8x_{31}}{x_{11} + x_{21} + x_{31}} \geq 10.$$

Тъй като полученото ограничение не е линейно, преобразуваме го в линейно, като умножим двете страни на неравенството със знаменателя на лявата страна. Получаваме следното неравенство

$$12x_{11} + 6x_{21} + 8x_{31} \geq 10(x_{11} + x_{21} + x_{31}),$$

което може да се напише като

$$(11) \quad x_{11} - 2x_{21} - x_{31} \geq 0.$$

Аналогично ограничение 9 дава

$$\frac{12x_{12} + 6x_{22} + 8x_{32}}{x_{12} + x_{22} + x_{32}} \geq 8.$$

Умножавайки двете страни на това неравенство с $x_{12} + x_{22} + x_{32}$ и опростявайки, получаваме

$$(12) \quad 2x_{12} - x_{22} \geq 0.$$

Тъй като всеки вид суров петрол има октаново число 6 или по-високо, каквито и количества от различните видове суров петрол да смесим, получения

Б3 ще има средно октаново число поне 6. Това означава, че произволни стойности на неотрицателните променливи ще удовлетворяват ограничение 10. За да проверим това, можем да представим ограничение 10 по обичайния начин

$$\frac{12x_{13} + 6x_{23} + 8x_{33}}{x_{13} + x_{23} + x_{33}} \geq 6.$$

След умножаване на двете страни на неравенството с $x_{13} + x_{23} + x_{33}$ и опростяване получаваме

$$(13) \quad 3x_{13} + x_{33} \geq 0.$$

Тъй като $x_{13} \geq 0$ и $x_{33} \geq 0$, то (13) автоматично ще бъде изпълнено и следователно не трябва да бъде включено в модела. Ограничение като (13), което е следствие от други ограничения в модела, се нарича *излишно* и не трябва да бъде включено във формулировката.

Ограничение 11 може да бъде написано като

$$\frac{\text{Общо количество сяр в сместа за Б1}}{\text{Брой на барелите в сместа за Б1}} \leq 0,01.$$

Използвайки процентите сяр във всеки вид суров петрол, виждаме, че

$$\begin{aligned} \text{Общо кол. сяр в Б1} &= \text{сяра в П1, използван за Б1} \\ &\quad + \text{сяра в П2, използван за Б1} \\ &\quad + \text{сяра в П3, използван за Б1} \\ &= 0,005x_{11} + 0,02x_{21} + 0,03x_{31}. \end{aligned}$$

Сега вече ограничение 11 може да бъде записано като

$$\frac{0,005x_{11} + 0,02x_{21} + 0,03x_{31}}{x_{11} + x_{21} + x_{31}} \leq 0,01.$$

Отново получаваме нелинейно ограничение, което линеаризираме по обичайния начин

$$(14) \quad -0,005x_{11} + 0,01x_{21} + 0,02x_{31} \leq 0.$$

Аналогично ограничение 12 е

$$\frac{0,005x_{12} + 0,02x_{22} + 0,03x_{32}}{x_{12} + x_{22} + x_{32}} \leq 0,02,$$

което е еквивалентно на

$$(15) \quad -0,015x_{12} + 0,01x_{32} \leq 0.$$

Накрая ограничение 13 е еквивалентно на

$$\frac{0,005x_{13} + 0,02x_{23} + 0,03x_{33}}{x_{13} + x_{23} + x_{33}} \leq 0,01,$$

откъдето

$$(16) \quad -0,005x_{13} + 0,01x_{23} + 0,02x_{33} \leq 0.$$

Комбинирайки (3)–(16), като изключим излишното ограничение (13), и добавяйки естествените ограничения $x_{ij} \geq 0$, $a_j \geq 0$, $i, j = 1, 2, 3$, получаваме необходимата линейна оптимизационна задача.

Намереното от Solver оптимално решение е:

$$\begin{array}{lll} z = 287\,750, & & \\ x_{11} = 2088,89, & x_{12} = 2111,11, & x_{13} = 800, \\ x_{21} = 777,78, & x_{22} = 4222,22, & x_{23} = 0, \\ x_{31} = 133,33, & x_{32} = 3166,67, & x_{33} = 200, \\ a_1 = 0, & a_2 = 750, & a_3 = 0. \end{array}$$

Като се прегледа справката Sensitivity Report, се вижда, че относителната оценка на променливата x_{23} е равна на нула. Затова задачата има и друго оптимално решение:

$$\begin{array}{lll} z = 287\,750, & & \\ x_{11} = 2222,22, & x_{12} = 2111,11, & x_{13} = 666,67, \\ x_{21} = 444,44, & x_{22} = 4222,22, & x_{23} = 333,34, \\ x_{31} = 333,33, & x_{32} = 3166,67, & x_{33} = 0, \\ a_1 = 0, & a_2 = 750, & a_3 = 0. \end{array}$$

Според второто оптимално решение рафинерията трябва да произведе:

- $x_{11} + x_{21} + x_{31} = 3000$ барела Б1, като смесва 2222,22 барела П1, 444,44 барела П2 и 333,33 барела П3;
- $x_{12} + x_{22} + x_{32} = 9500$ барела Б2, като смесва 2111,11 барела П1, 4222,22 барела П2 и 3166,67 барела П3;
- $x_{13} + x_{23} + x_{33} = 1000$ барела Б3, като смесва 666,67 барела П1 и 333,34 барела П2.

Рафинерията трябва да похарчи и \$750 за реклама на Б2 и печалбата ѝ ще бъде \$287 750.

Въпреки че Б1 се явява най-доходен, рафинерията стимулира (чрез реклама) търсенето на Б2, а не на Б1. Причината за това е, че при даденото качество (по отношение на октановото число и съдържанието на сяра) на наличния суров петрол е трудно да бъде произвеждан Б1. Следователно рафинерията ще печели повече от по-голямо производство на Б2, отколкото от производството на допълнително количество от Б1.

2. Сплав 1 0,043478 lb, сплав 2 0,282609 lb, сплав 3 0,673913 lb, цена на новата сплав \$23,46 за 1 lb.