

Задача за назначения

В. Черногоров

27 октомври 2009 г.

1. Формулировка на задачата

Трите деца Джон, Карън и Тери на мистър Смит искат да изкарат малко пари за екскурзия. Мистър Смит е избрал три вида работи, които децата могат да изпълнят срещу определено заплащане: косене на ливадата, чистене на гаража и измиване на колата. За да избегне ненужни спорове между децата, той попитал тайно всяко дете колко иска за всеки вид работа. Резултатите от допитването (в долари) са представени в таблицата:

		Косене на ливадата (1)	Чистене на гаража (2)	Миене на колата (3)
Джон	(1)	15	10	9
Карън	(2)	9	15	10
Тери	(3)	10	12	8

Като се основава на тази информация, как мистър Смит да разпредели работата между децата, така че разходите му да бъдат минимални?

2. Математически модел

Нека променливите на задачата са x_{ij} , $i = 1, 2, 3$, $j = 1, 2, 3$, като $x_{ij} = 1$, ако i -тото дете получава j -тата работата, и $x_{ij} = 0$ в противен случай. Ясно е, че всяко дете може да извърши само една работа и всяка работа може да

бъде извършена само от едно дете. Тогава математическият модел е следният

$$\begin{aligned} \min z &= \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 c_{ij}x_{ij}, \text{ където } \mathbf{c} = \begin{pmatrix} 15 & 10 & 9 \\ 9 & 15 & 10 \\ 10 & 12 & 8 \end{pmatrix}, \\ \sum_{j=1}^3 x_{ij} &= 1, \quad i = 1, 2, 3, \\ \sum_{i=1}^3 x_{ij} &= 1, \quad j = 1, 2, 3, \\ x_{ij} &= \begin{cases} 1, & \text{ако } i\text{-тото дете получава } j\text{-тата работа,} \\ 0, & \text{в противен случай.} \end{cases} \end{aligned}$$

Като се има предвид свойството на транспортната задача, че ако количествата a_i и заявките b_j са цели числа, тя има целочислено оптимално решение, то горният математически модел се превръща в следната класическа транспортна задача

$$\begin{aligned} \min z &= \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 c_{ij}x_{ij}, \\ \sum_{j=1}^3 x_{ij} &= 1, \quad i = 1, 2, 3, \\ \sum_{i=1}^3 x_{ij} &= 1, \quad j = 1, 2, 3, \\ x_{ij} &\geq 0, \quad i = 1, 2, 3, \quad j = 1, 2, 3. \end{aligned}$$

Оптималното решение на задачата е Джон да чисти гаража, Карън да коси ливадата и Тери да мие колата. Тогава мистър Смит ще се раздели с 27 долара.

ЗАДАЧИ ЗА УПРАЖНЕНИЯ

1. Да се определи оптимално разпределение на три багера от различен тип между три обекта, ако горивото за извършване на изкопните работи от i -тия багер на j -тия обект, $i, j = 1, 2, 3$, се дава с таблицата

Задача за назначения

	Обект		
Багер	I	II	III
1	9	14	7
2	8	6	9
3	12	11	14

2. Компания разполага с три нови машини от различен тип. Налице са четири завода на компанията, които могат да получат тези машини. Всеки завод може да получи само една машина и всяка машина може да бъде разположена само в един завод. Очакваната печалба от поставянето на дадена машина в даден завод се дава с таблицата

	Завод			
Машина	I	II	III	IV
1	13	16	12	11
2	15	0	13	20
3	5	7	10	6

Как да се разположат машините, така че общата печалба да бъде максимална.

ОТГОВОРИ И РЕШЕНИЯ

1. Нека x_{ij} , $i, j = 1, 2, 3$, са логически променливи, като $x_{ij} = 1$, ако i -тият багер работи на j -тия обект, и $x_{ij} = 0$ в противен случай. Тогава $\min z = 9x_{11} + 14x_{12} + 7x_{13} + 8x_{21} + 6x_{22} + 9x_{23} + 12x_{31} + 11x_{32} + 14x_{33}$ при ограничения $x_{i1} + x_{i2} + x_{i3} = 1$, $i = 1, 2, 3$, $x_{1j} + x_{2j} + x_{3j} = 1$, $j = 1, 2, 3$, $x_{ij} \geq 0$ и цели. Назначение: $1 \rightarrow \text{III}$, $2 \rightarrow \text{II}$, $3 \rightarrow \text{I}$, $z_{\min} = 25$.

2. Подобно на транспортната задача и тук можем да решаваме само балансирана задача за назначения. За целта добавяме фиктивна машина (с номер 4), като цените за назначаване на тази машина на произволен завод са равни на нула. В този случай критерият на задачата е максимум. Назначение: $1 \rightarrow \text{II}$, $2 \rightarrow \text{IV}$, $3 \rightarrow \text{III}$, $z_{\max} = 46$.