

Задача за диета (дажба)

В. Черногоров

21 октомври 2010 г.

1. Вариант 1

1.1. Формулировка на задачата

Дневната дажба за хранене на група животни може да се изготви от сено (не повече от 50 kg) и силаж (не повече от 85 kg). Дажбата трябва да съдържа: а) не по-малко от 30 крѐмни единици¹; б) не по-малко от 1 kg белтъци; в) не по-малко от 100 g калций; г) не по-малко от 80 g фосфор. Съдържанието на тези хранителни вещества (в g) в 1 kg сено или силаж и съответната цена (в лв) са дадени в таблица 1.

Таблица 1. Съдържание на хранителните вещества и цена

	Кр. ед.	Белтъчини	Калций	Фосфор	Цена
Сено	10	40	1,25	2	0,24
Силаж	8	10	2,50	1	0,16

Да се определи най-евтината дажба, осигуряваща пълноценно хранене на животните.

1.2. Математически модел

Да предположим, че дневната дажба се състои от x_1 kg сено и x_2 kg силаж. Тогава целевата функция е

$$\min z = 0,24x_1 + 0,16x_2.$$

¹Термин от животновъдството.

Задача за диета (дажба)

Ограниченията на задачата са

$$\begin{aligned}10x_1 + 8x_2 &\geq 30, \\40x_1 + 10x_2 &\geq 1000, \\1,25x_1 + 2,50x_2 &\geq 100, \\2x_1 + x_2 &\geq 80, \\0 \leq x_1 \leq 50, 0 \leq x_2 \leq 85.\end{aligned}$$

Изрично трябва да подчертаем, че левите страни на ограниченията се измерват в g и затова в дясната страна на второто ограничение стои числото 1000 (g = 1 kg).

Оптималната дневна дажба включва по $26\frac{2}{3}$ kg сено и силаж. Цената ѝ е $10\frac{2}{3}$ лв.

2. Вариант 2

2.1. Формулировка на задачата

Фармацевтична фирма дневно произвежда не по-малко от 800 kg от някаква хранителна добавка, която е смес от царевично и соево брашно, чийто състав е представен в таблица 2.

Таблица 2. Съдържание на хранителните вещества и цена

Брашно	Белтък	Целулоза	Стойност
	(в kg на kg брашно)		(в лв за kg)
Царевично	0,09	0,02	0,30
Соево	0,60	0,06	0,90

Диетолозите препоръчват в хранителната добавка да има не по-малко от 30% белтък и не повече от 5% целулоза. Фармацевтичната фирма иска да изготви рецептура за хранителната добавка, която да има минимална цена и да удовлетворява препоръките на диетолозите.

2.2. Математически модел

Тъй като хранителната добавка съдържа две съставки (царевично и соево брашно), и тази задача е двумерна. Нека x_1 kg е количеството царевично

Задача за диета (дажба)

брашно, а x_2 kg е количеството соево брашно, които се използват в дневното производство на хранителната добавка. Целевата функция е

$$\min z = 0,3x_1 + 0,9x_2.$$

Ограниченията на задачата са

$$\begin{aligned}x_1 + x_2 &\geq 800, \\ \frac{0,09x_1 + 0,6x_2}{x_1 + x_2} &\geq 0,3, \\ \frac{0,02x_1 + 0,06x_2}{x_1 + x_2} &\leq 0,05, \\ x_1, x_2 &\geq 0.\end{aligned}$$

Този модел се свежда до линеен чрез умножаване на второто и третото ограничение със знаменателя на лявата страна ($x_1 + x_2 > 0$). Освен това е прието променливите да участват само в лявата страна на ограниченията, докато в дясната страна са само константи. Затова правим привеждане и за удобство уеднаквяваме знака на ограниченията. Окончателно моделът има следния вид:

$$\begin{aligned}\min z &= 0,3x_1 + 0,9x_2 \\ x_1 + x_2 &\geq 800, \\ -0,21x_1 + 0,30x_2 &\geq 0, \\ 0,03x_1 - 0,01x_2 &\geq 0, \\ x_1, x_2 &\geq 0.\end{aligned}$$

Оптималното решение на задачата е смеската да съдържа 470,588 kg царевично брашно, 329,412 kg соево брашно и общата цена е 437,65 лв.

ЗАДАЧИ ЗА УПРАЖНЕНИЯ

1. Ферма за отглеждане на крави може да закупи три вида сурова храна от търговец на едро. Диетологът на фермата има изисквания за съдържанието на мазнини, белтъци, калций и желязо в дневната дажба. Всяка крава се нуждае от поне 10 единици (ед.) калций, не повече от 7,5 ед. мазнини, поне 12 ед. желязо и поне 15 ед. белтъци дневно. В таблица 3 е показано количеството на мазнини, белтъци, калций и желязо в килограм сурова храна, както и цената му в зависимост от качеството. Дневната дажба за хранене на кравите се получава чрез смесване на трите типа сурова храна. Фермата иска

Задача за диета (дажба)

Таблица 3. Съставки на дажбата (единици за килограм)

	Първо качество	Второ качество	Трето качество
Калций	0,7	0,8	0,0
Желязо	0,9	0,8	0,8
Белтъци	0,8	1,5	0,9
Мазнини	0,5	0,6	0,4
Цена (лв)	0,25	0,10	0,08

да храни кравите в съответствие с препоръките на диетолога, като харчи за това възможно най-малко средства.

2. Фред ръководи семейна животновъдна ферма. Като добавка към произвежданите храни Фред гледа и прасета за продан. Сега той иска да определи количествата на наличните храни (царевица, костно брашно и люцерна), които трябва да бъдат давани на всяко прасе. Тъй като прасетата могат да ядат произволна смес от тези храни, целта е да се състави дажба, която да удовлетворява определени хранителни норми и да струва най-евтино. Броят на единиците от всяка храна, които се съдържат в един килограм от нея, дневните хранителни норми и цените са дадени в таблица 4.

Таблица 4. Данни за задачата

Хранителни съставки	Царевица	Костно брашно	Люцерна	Минимални дневни норми
Въглехидрати	90	20	40	200
Белтъчини	30	80	60	180
Витамини	10	20	60	150
Цена (ф)	84	72	60	

Да се формулира и реши линейна оптимизационна задача, с чиято помощ Фред да определи най-евтината дажба на прасетата.

ОТГОВОРИ И РЕШЕНИЯ

1. Първо качество 8 kg, второ качество 5,5 kg, трето качество 0,5 kg на обща стойност 2,59 лв.

2. Царевица 1,143 кг и люцерна 2,429 кг на цена €241,7.