

Задача за максимална печалба при ограничени ресурси

В. Черногоров

10 октомври 2010 г.

1. Формулировка на задачата

Малка фабрика произвежда два вида бои — за външно и за вътрешно боядисване. За производството на боите се използват два вида суровини — С1 и С2. Основните данни на задачата са дадени в следната таблица:

	Разход на суровините за 1 t боя [t]		Максимален дневен запас [t]
	за външно боядисване	за вътрешно боядисване	
Суровина С1	6	4	24
Суровина С2	1	2	6
Доход (в хил. лв) от 1 t боя	5	4	

Отделът за маркетинг е поставил две допълнителни условия:

- Дневното производство на боя за вътрешно боядисване да не превишава дневното производство на боя за външно боядисване с повече от 1 t.
- Дневното производство на боя за вътрешно боядисване да бъде ограничено до 2 t.

Какво количество боя от всеки вид трябва да се произвежда, така че доходът от реализацията на продукцията да бъде максимален?

2. Математически модел

Всяка задача на изследване на операциите включва три основни елемента.

1. **Променливи**, които следва да бъдат определени.
2. **Целева функция**, която трябва да бъде оптимизирана (минимизирана или максимизирана).
3. **Ограничения**, които променливите трябва да удовлетворяват.

Нека фабриката произвежда x_1 t боя за външно боядисване и x_2 t боя за вътрешно боядисване дневно. Тогава получаваме следната оптимизационна задача:

$$\max z = 5x_1 + 4x_2$$

при ограничения

$$6x_1 + 4x_2 \leq 24,$$

$$x_1 + 2x_2 \leq 6,$$

$$-x_1 + x_2 \leq 1,$$

$$x_2 \leq 2,$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$$

Оптималното решение на задачата е 3 t боя за външно боядисване и 1,5 t боя за вътрешно боядисване. Общата печалба е 21 хил. лв.

3. Терминология

Получената задача принадлежи на класа *линейни оптимизационни задачи* или, казано по друг начин, е *задача на линейното оптимиране*, тъй като променливите участват линейно (полиноми от първа степен) както в целевата функция, така и в ограниченията.

Всеки (двумерен) вектор, чиито координати удовлетворяват ограниченията на задачата, се нарича *допустима точка* (или *допустим вектор*, *допустимо решение*, *план*) на задачата. Пример за допустима точка е (3, 1), т. е. $x_1 = 3$ и $x_2 = 1$. Тогава стойността на целевата функция е $z = 19$ хил. лв. Множеството от всички допустими точки се нарича *допустимо множество* (а също така *множество от условия*, *множество от ограничения*, *множество от планове*). Онзи елемент (онези елементи) на допустимото множество, за който (които) целевата функция достига оптималната си стойност, се нарича(т) *оптимално(и) решение(я)* на задачата.

Броят на променливите и броят на ограниченията се наричат *размери* на задачата. В случая имаме двумерна линейна оптимизационна задача с четири ограничения (обикновено ограниченията за неотрицателност на променливите не се броят, но задължително участват във формулировката на модела).

Нека векторите $\mathbf{c}$ и $\mathbf{x}$ са определени по следния начин: $\mathbf{c} = \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \end{bmatrix}$, $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ (всички вектори считаме, че са вектор-стълбове), т. е. координатите на $\mathbf{c}$ са доходите от 1 т боя от съответния вид, а координатите на $\mathbf{x}$ са променливите на задачата. Тогава целевата функция е скаларното произведение на векторите $\mathbf{c}$ и $\mathbf{x}$, което записваме в матричен вид по следния начин

$$z = \mathbf{c}^T \mathbf{x} = [5, 4] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 5x_1 + 4x_2.$$

Ако с $\mathbf{A}$ означим матрицата $\begin{bmatrix} 6 & 4 \\ 1 & 2 \\ -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, а $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 24 \\ 6 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ е векторът от десните страни

на ограниченията, тогава ограниченията на задачата могат да бъдат записани като

$$\begin{bmatrix} 6 & 4 \\ 1 & 2 \\ -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} 24 \\ 6 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{или} \quad \mathbf{Ax} \leq \mathbf{b}, \quad \mathbf{x} \geq \mathbf{0}.$$

($\mathbf{u} \geq \mathbf{v}$, където $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$, означава $u_i \geq v_i$, $i = 1, \dots, n$.)

4. Обща формулировка на задачата

Фирма произвежда n вида продукция с помощта на m вида суровини, всяка от които е в ограничено количество b_i ($i = 1, \dots, m$). Известно е количеството a_{ij} от i -тия вид суровина ($i = 1, \dots, m$), което се изразходва за производството на единица от j -тия вид продукция ($j = 1, \dots, n$). Ако c_j е доходът от единица продукция от j -тия вид ($j = 1, \dots, n$), да се определи такъв план на производство, че общият доход от произведената продукция да бъде максимален.

В този случай променливите на задачата са $x_1, \dots, x_n$, целевата функция е

$$\max z = \sum_{j=1}^n c_j x_j,$$

и ограниченията са

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i, \quad i = 1, \dots, m,$$
$$x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, n.$$

Матричният запис на тази задача отново е $\max \mathbf{c}^T \mathbf{x}, \mathbf{Ax} \leq \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}$, но $\mathbf{A}$ е матрица $m \times n$, $\mathbf{c}, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$.

ЗАДАЧИ ЗА УПРАЖНЕНИЯ

1. В модела на фабриката за бои да се формулират нови ограничения, като се имат предвид следните условия:

а) Дневното количество на произведената боя за вътрешно боядисване трябва да надхвърля дневното количество на произведената боя за външно боядисване с не по-малко от 1 t.

б) Дневният разход на суровината С2 трябва да бъде не по-малко от 3 t и не повече от 6 t.

в) Дневното количество на произведената боя за вътрешно боядисване не може да бъде по-малко от дневното количество на произведената боя за външно боядисване.

г) Минималното общо дневно количество на произведените бои от двата вида е 3 t.

д) Отношението на дневното количество на произведената боя за вътрешно боядисване и на общото дневно количество на произведените бои от двата вида не трябва да бъде по-голямо от 0,5.

2. За модела на фабриката за бои да се намери *оптимално допустимо решение* на модела между следните вектори (предполага се, че то присъства по-долу):

а) $x_1 = 1, x_2 = 4$; б) $x_1 = 2, x_2 = 2$; в) $x_1 = 3, x_2 = 1,5$;

г) $x_1 = 2, x_2 = 1$; д) $x_1 = 2, x_2 = -1$.

3. За допустимото решение $x_1 = 2, x_2 = 2$ в модела на фабриката за бои да се определи:

а) количеството на използваната суровина С1;

б) количеството на използваната суровина С2.

4. В завод за производство на чипове четирима техници (А, В, С и D) изработват три вида изделия (изделия 1, 2 и 3). Заводът може да продаде за един месец най-много 80 единици от изделие 1, 50 единици от изделие 2 и 50 единици от изделие 3. Техник А може да изработва само изделия 1 и 3, техник В — само изделия 1 и 2, техник С — само изделие 3, а техник D — само изделие 2. Времето (в часове), необходимо на всеки техник за производството на единица от съответното изделие, както и печалбата от единица изделие са дадени в таблица 1.

Таблица 1. Време за изработване на изделията и печалба от едно изделие

Изделие	Техник А	Техник В	Техник С	Техник D	Печалба (лв)
1	2	2,5	—	—	6
2	—	3	—	3,5	7
3	3	—	4	—	10

Всеки техник може да работи не повече от 120 часа на месец. При какъв план на производство заводът ще получи максимална печалба? Променливите на задачата не се предполага да бъдат целочислени.

5. Завод за производство на компютърна периферия изработва мишки, клавиатури и джойстици. В таблица 2 са показани доходът, разходите на труд и машинното време, необходими за изработването на едно изделие, както и месечното търсене на изделията.

Таблица 2. Доход, разходи на труд и машинно време и месечно търсене на изделията

	Мишки	Клавиатури	Джойстици
Доход от едно изделие (лв)	8	11	9
Разход на труд за изделие (ч)	0,2	0,3	0,24
Машинно време за изделие (ч)	0,04	0,055	0,04
Месечно търсене	15 000	25 000	11 000

Всеки месец заводът разполага със 13 000 часа труд и 3000 часа машинно време. Как заводът може да получи максимална печалба? Променливите на задачата не се предполага да бъдат целочислени.

6. Бижутерът Пешо изработва диамантени гривни, огърлици и обеци. Пешо може да работи най-много 160 часа за месец. Той разполага с 800 унции брилянти. Доходът, времето за изработка и количеството унции диаманти, необходими за изработването на едно бижу, са дадени в таблица 3.

Задача за максимална печалба при ограничени ресурси

Таблица 3. Доход, време за изработка и унции диаманти за изработването на едно бижу

	Гривна	Огърлица	Обеци
Доход от едно бижу (лв)	300	200	100
Разход на труд за бижу (ч)	0,35	0,15	0,05
Разход на диаманти за бижу (oz)	1,2	0,75	0,5

Как Пешо да получи максимален доход, ако търсенето на бижутата е неограничено? Променливите на задачата не се предполага да бъдат целочислени.

7. Пивоварна произвежда светло пиво и бира, като за производството използва зърно, хмел и малц. Налични са 40 lb зърно, 30 lb хмел и 40 lb малц. Един барел светло пиво се продава за \$40 и за производството му са необходими 1 lb зърно, 1 lb хмел и 2 lb малц. Един барел бира се продава за \$50 и за производството му са необходими 2 lb зърно, 1 lb хмел и 1 lb малц. Пивоварната може да продаде цялото произведено количество светло пиво и бира. Да се формулира линейна оптимизационна задача, с чиято помощ пивоварната да максимизира печалбата си.

ОТГОВОРИ И РЕШЕНИЯ

1. а) $-x_1 + x_2 \geq 1$; б) $3 \leq x_1 + 2x_2 \leq 6$; в) $-x_1 + x_2 \geq 0$; г) $x_1 + x_2 \geq 3$;
д) $\frac{x_2}{x_1 + x_2} \leq \frac{1}{2}$. Така записано, това ограничение не е линейно. Тъй като $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$, можем да предполагаме, че $x_1 + x_2 > 0$. Умножаваме двете страни на неравенството с $2(x_1 + x_2)$ и след направеното приведение получаваме $-x_1 + x_2 \leq 0$.

2. а) и д) не са допустими. От останалите три вектора стойността на целевата функция е най-голяма за в). Оптималното решение е $x_1 = 3$, $x_2 = 1,5$ и $z_{\max} = 21$.

3. а) 20; б) 6.

4. Техник А: Продукт 1 — 30, Продукт 3 — 20. Техник В: Продукт 1 — 48. Техник С: Продукт 3 — 30. Техник D: Продукт 2 — $34\frac{2}{7}$. Печалба 1208 лв.

5. Мишки 15 000, клавиатури $24\,533\frac{1}{3}$, джойстици 11 000, $488\,866\frac{2}{3}$ лв печалба.

Задача за максимална печалба при ограничени ресурси

6. $1066\frac{2}{3}$ огърлици за $213\,333\frac{1}{3}$ лв.

7. Светло пиво и бира по $13\frac{1}{3}$ барела с обща печалба \$1200.