

Следоптимален анализ в линейното оптимизиране

В. Черногоров

27 април 2011 г.

1. Увод

В разгледаните и решени досега линейни оптимизационни модели данните на задачите — векторите $\mathbf{c}$ и $\mathbf{b}$ и матрицата $\mathbf{A}$ — бяха постоянни (непроменящи се). В практиката обаче всеки модел е „моментална“ снимка на реална ситуация. Впоследствие може да се наложи изменение на някои негови данни. Основната задача на *следоптималния анализ* (известен още като *анализ на чувствителността*) в линейното оптимизиране е проследяване на изменението на оптималното решение на дадена линейна оптимизационна задача, ако след намирането му се налагат промени в данните.

За илюстриране на методите на следоптималния анализ ще използваме вече известния ни модел на *задачата за максимална печалба при ограничени ресурси*. Частен случай на такава задача беше първият пример, разгледан в този курс. Пълната ѝ формулировка може да бъде намерена **тук**.

2. Теоретични бележки

За конкретна итерация на симплекс метода всички данни в симплексната таблица (СТ) се получават от изходните данни $\mathbf{c}$, $\mathbf{A}$ и $\mathbf{b}$ и обратната матрица на текущия базис $\mathbf{B}^{-1}$, а именно

$$\mathbf{w}_j = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}_j, \quad \mathbf{x}_\mathbf{B} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}, \quad \bar{c}_j = c_j - \mathbf{c}_\mathbf{B}^T \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}_j, \quad z = \mathbf{c}_\mathbf{B}^T \mathbf{x}_\mathbf{B} = \mathbf{c}_\mathbf{B}^T \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}.$$

Като положим $\boldsymbol{\pi} = \mathbf{c}_\mathbf{B}^T \mathbf{B}^{-1}$, виждаме, че $\bar{c}_j = c_j - \boldsymbol{\pi}\mathbf{A}_j$, т. е. относителната оценка на променливата x_j на всяка итерация на СМ е равна на разликата между дясната и лявата страна на съответното ограничение на двойствената задача.

От горните формули се вижда, че промени във вектора на целевата функция оказват влияние само върху вектора с относителните оценки $\bar{c}$ и някои негови координати могат да се окажат неоптимални. От друга страна промени във вектора с десните страни на ограниченията водят само до промени в x_B , които могат да доведат до това някои негови координати да станат отрицателни, т. е. недопустими.

3. Основни задачи на следоптималния анализ

След намиране на оптимално решение на една линейна задача е възможно да си зададем редица въпроси от вида „Какво би се случило с оптималното решение, ако

- бъде променена дясната страна b_i на едно ограничение?“
- бъде променен един коефициент c_j в целевата функция?“
- бъде променен един елемент a_{ij} на матрицата A ?“
- бъдат променени няколко целеви коефициенти?“
- бъдат променени няколко десни страни на ограниченията?“
- бъде добавено ново ограничение?“
- бъде добавено ново производство (т. е. нова променлива)?“
- бъдат добавени нови ограничения и нови променливи?“

На някои от тези въпроси може да бъде отговорено без да се решава задачата отново с променените данни. Затова е необходимо да се знае кои са те и как да се получи отговорът им, използвайки компютър. В повечето случаи принципите за получаване на отговорите са базирани на елементарни пресмятания с вектори и матрици. В практиката типична ситуация е задачата да бъде решена отново, ако се иска отговор на по-сложни въпроси, но вие трябва да знаете достатъчно, за да решите какво да предприемете във всеки конкретен случай.

Ето кои са въпросите, на които в повечето случаи може да се отговори без да се решава задачата отново:

- промяна на дясната страна b_i на едно ограничение;
- промяна на един коефициент c_j в целевата функция;

- промяна на десните страни b_i на няколко ограничения;
- промяна на няколко коефициента c_j в целевата функция.

4. Интервали на устойчивост

Интервалите на устойчивост ни позволяват да определим в какви граници може да се изменя един елемент от данните на задачата (един коефициент в целевата функция, дясната страна на едно ограничение или един елемент на матрицата **A**), така че да се запази намереният оптимален базис. MS Excel може да даде справка за интервалите на устойчивост (как става това е обяснено [тук \(стр. 8\)](#)), а резултатът е показан на [фиг. 1](#)).

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	Microsoft Excel 11.0 Sensitivity Report							
2	Worksheet: [prodmix.xls]Лист1							
3	Report Created: 29.10.2008 г. 16:51:13							
4								
5								
6	Adjustable Cells							
7				Final	Reduced	Objective	Allowable	Allowable
8	Cell	Name	Value	Cost	Coefficient	Increase	Decrease	
9	\$B\$13	Решение Боя за външно боядисване	3	0	5	1		3
10	\$C\$13	Решение Боя за вътрешно боядисване	1.5	0	4	6	0.666666667	
11								
12	Constraints							
13			Final	Shadow	Constraint	Allowable	Allowable	
14	Cell	Name	Value	Price	R.H. Side	Increase	Decrease	
15	\$D\$6	Суровина C1	24	0.75	24	12		4
16	\$D\$7	Суровина C2	6	0.5	6	0.666666667		2
17	\$D\$8	Огр. от търсене 1	-1.5	0	1	1E+30		2.5
18	\$D\$9	Огр. от търсене 2	1.5	0	2	1E+30		0.5

Фигура 1. Справка с анализ на чувствителността (Sensitivity Report)

Най-напред в секцията *Променливи (Adjustable Cells)* за всяка променлива са дадени:

- адреса на клетката (Cell), съдържаща стойността на променливата;
- името на клетката (Name), което се получава чрез последователно изписване на името на реда (най-вляво) и името на стълба (най-отгоре), в които се намира тази клетка;
- крайната стойност x_j (Final Value) на променливата, която е оптималната, в случай че задачата има крайно решение;
- относителната оценка (Reduced Cost) на тази променлива;

- коефициентът c_j в целевата функция (Objective Coefficient);
- допустимото увеличение δ_j^+ (Allowable Increase) на стойността на c_j , при което оптималният базис се запазва;
- допустимото намаление δ_j^- (Allowable Decrease) на стойността на c_j , при което оптималният базис се запазва.

Интервалът на устойчивост за коефициента c_j е $[c_j - \delta_j^-, c_j + \delta_j^+]$. В този интервал на изменение на c_j намереният оптимален базис се запазва. Оптималното решение е същото, а стойността на целевата функция се променя пропорционално на изменението на коефициента c_j .

По подобен начин в секцията *Ограничения (Constraints)* за всяко ограничение са дадени:

- адреса на клетката (Cell), съдържаща пресметнатата лява страна на ограничението;
- името на клетката (Name), което се получава чрез последователно изписване на името на реда (най-вляво) и името на стълба (най-отгоре), в които се намира тази клетка;
- крайната стойност (Final Value) на лявата страна на ограничението;
- двойствената цена (Shadow Price) на ограничението;
- дясната страна b_i (Constraint R.H. Side) на ограничението;
- допустимото увеличение δ_i^+ (Allowable Increase) на дясната страна b_i , при което намереният оптимален базис остава допустим;
- допустимото намаление δ_i^- (Allowable Decrease) на дясната страна b_i , при което намереният оптимален базис остава допустим.

Интервалът на устойчивост за тази дясна страна е $[b_i - \delta_i^-, b_i + \delta_i^+]$. В този интервал на изменение на b_i намереният оптимален базис остава допустим, а промяната в целевата функция е пропорционална на направената промяна в b_i и на двойствената променлива, съответна на това ограничение.

Според показаното на фиг. 1 интервалът на устойчивост за коефициента пред x_1 е $[2, 6]$, а за този пред x_2 е $[3\frac{1}{3}, 10]$. За десните страни на ограниченията съответните интервали са $[20, 36]$, $[4, 6\frac{2}{3}]$, $[-\frac{3}{2}, +\infty)$, $[\frac{3}{2}, +\infty)$ (числото $1\text{E}+30$ се тълкува като $+\infty$).

Понякога е възможно да се предвиди ефекта от едновременно направени промени в няколко стойности, като се приложи т.нар. *правило на стоте процента*.

- Това правило не важи, ако се променят едновременно коефициенти в целевата функция и десни страни на ограничения.
- Ако се променят само коефициенти в целевата функция, вижте какъв е интервалът на устойчивост за тези коефициенти.
- Разгледайте процентите на направените промени, като разделите абсолютната стойност на разликата между новата и старата стойност на δ_i^+ или δ_i^- в зависимост от това дали увеличавате или намалявате съответния коефициент.
- Съберете всички проценти. Ако получената сума не е повече от 100%, тогава намереният оптимален базис се запазва.
- Ако сумата на процентите надхвърля 100%, не е ясно дали намереният оптимален базис остава такъв.
- По същия начин се процедира и с едновременни промени в десните страни на няколко ограничения.

5. Два лесни случая

Дефиниция. Едно ограничение ще наричаме *активно* (*пасивно*), ако в оптималното решение то се изпълнява като равенство (строго неравенство). *Дефицитен* се нарича този ресурс, на който отговаря *активно* ограничение. В противен случай той се нарича *недефицитен*.

1. Промяна в дясната страна b_i на пасивно ограничение. В този случай допълнителната променлива s_i , която свежда ограничението до равенство, е базисна в оптималното решение с положителна стойност. Затова базисът, оптималното решение (освен стойността на s_i) и стойността на целевата функция се запазват, докато ограничението не стане *активно* (тогава $s_i = 0$ и е небазисна).

2. Промяна в коефициент на небазисна променлива x_j . Като вземем пред, че относителната оценка на тази променлива

$$\bar{c}_j = c_j - \mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1} \mathbf{A}_j \geq 0$$

удовлетворява критерия за оптималност при минимум, ако новата стойност на коефициента пред x_j в целевата функция е $c_j^\delta = c_j + \delta$, то от

$$\bar{c}_j^\delta = c_j + \delta - \mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1} \mathbf{A}_j = \bar{c}_j + \delta \geq 0$$

следва $-\bar{c}_j \leq \delta < +\infty$. Следователно оптималното решение се запазва, ако δ расте неограничено и не е по-малко от $-\bar{c}_j$.

ЗАДАЧИ ЗА УПРАЖНЕНИЯ

1. Пивоварна произвежда светло пиво и бира, като за производството използва зърно, хмел и малц. Налични са 40 lb зърно, 30 lb хмел и 40 lb малц. Един барел светло пиво се продава за \$40 и за производството му са необходими 1 lb зърно, 1 lb хмел и 2 lb малц. Един барел бира се продава за \$50 и за производството му са необходими 2 lb зърно, 1 lb хмел и 1 lb малц. Пивоварната може да продаде цялото произведено количество светло пиво и бира. За да максимизира общата печалба, пивоварната трябва да реши следната линейна оптимизационна задача:

$$\begin{aligned} \max z &= 40x_{\text{пиво}} + 50x_{\text{бира}}, \\ x_{\text{пиво}} + 2x_{\text{бира}} &\leq 40, \\ x_{\text{пиво}} + x_{\text{бира}} &\leq 30, \\ 2x_{\text{пиво}} + x_{\text{бира}} &\leq 40, \\ x_{\text{пиво}} &\geq 0, \quad x_{\text{бира}} \geq 0. \end{aligned}$$

Листът на Excel с данните на задачата и оптималното ѝ решение, както и справката с анализа на чувствителността, са показани на фиг. 2.

Забележка. Числата в реда Хмел на справката с анализа на чувствителността не са дадени нарочно, тъй като в едно от подусловията на задачата се иска те да бъдат попълнени.

За всяко от следващите подусловия отговорете на въпросите колкото е възможно по-пълно и подробно без да решавате задачата с Excel Solver, като използвате адресите на необходимите клетки.

Забележка. Всяко подусловие е независимо от останалите (всяка промяна на модела, направена в едно подусловие, не се отнася за никое от другите подусловия).

- а) Кое е оптималното решение и колко е печалбата?
- б) Да предположим, че печалбата от един барел светло пиво е станала \$60. Ще се промени ли оптималното решение и какво става с печалбата?

Следоптимален анализ в линейното оптимиране

	A	B	C	D	E
1	Модел на пивоварна				
2	Входни данни				
3		Светло пиво	Бира	Всичко	Десни страни на ограниченията
4	Целева функция	40	50	1200	
5	Зърно	1	2	40	40
6	Хмел	1	1	26.6667	30
7	Малц	2	1	40	40
8					
9	Изходни резултати				
10		Светло пиво	Бира	z	
11	Решение	13.33333333	13.33333333	1200	

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	Adjustable Cells							
2				Final	Reduced	Objective	Allowable	Allowable
3	Cell	Name		Value	Cost	Coefficient	Increase	Decrease
4	\$B\$11	Решение Светло пиво		13.333	0	40	60	15
5	\$C\$11	Решение Бира		13.333	0	50	30	30
6								
7	Constraints							
8				Final	Shadow	Constraint	Allowable	Allowable
9	Cell	Name		Value	Price	R.H. Side	Increase	Decrease
10	\$D\$5	Зърно Всичко		40	20	40	10	20
11	\$D\$6	Хмел Всичко						
12	\$D\$7	Малц Всичко		40	10	40	10	20

Фигура 2. Лист с данните и решението и справка с анализ на чувствителността

- в) Нека печалбата от един барел бира е станала \$85. Ще се промени ли оптималното решение?
- г) Да предположим, че фирмата е установила, че 10 lb от малца са мухлясали и трябва да бъдат изхвърлени. Ще се промени ли оптималното решение и какво се случва с печалбата.
- д) Да предположим, че фирмата може да купи допълнително 10 lb зърно, като заплати за тях допълнително \$200. Ще го направи ли? Обяснете.
- е) Попълнете липсващите числа в справката с анализа на чувствителността в реда Хмел, като използвате само листа с данните на задачата и полученото в него оптимално решение. Обяснете по какъв начин е възможно да бъде получено всяко от тези числа.
- ж) Нека количеството на зърното се е увеличило с 5 lb, а това на малца е намаляло с 10 lb. Ще се промени ли оптималният базис?

ОТГОВОРИ И РЕШЕНИЯ

1. а) Светло пиво и бира по $13\frac{1}{3}$ барела. Печалба \$1200. Клетки B11, C11, D11.

б) Оптималното решение се запазва, защото 60 е в интервала на устойчивост $[25, 100]$. Печалбата се увеличава с $20 \cdot 13\frac{1}{3} = \$266\frac{2}{3}$ до $\$1466\frac{2}{3}$.

в) Оптималното решение се променя, защото 85 не е в интервала на устойчивост $[20, 80]$.

г) Загубата на 10 lb малц е по-малко от допустимото намаляване 20. Оптималното решение се променя винаги, когато има промени в десните страни на ограниченията, но оптималният базис се запазва. Тогава може да се използва двойствената цена на малца (клетка E12). Стойността на целевата функция намалява с $10 \cdot 10 = \$100$ до \$1100.

д) Не. Печалбата е $10 \cdot 20 - 200 = \$0$.

е) Числата в реда Хмел се попълват по следния начин:

- Final Value = 26,667 от клетка D6;
- Shadow Price = 0, защото ограничението е пасивно;
- RHS = 30 от клетка E6;
- Allowable Increase = 1E+30, защото ограничението е пасивно;
- Allowable Decrease = 3,333 (разликата на E6 и D6).

ж) По правилото на 100% направените промени са $\frac{5}{10} + \frac{10}{20} = 100\%$. Оптималният базис остава допустим при направените промени.