Ръководство за решаване на задачи по математическо оптимиране

София • 1989

Ръководството съдържа задачи от основните дялове на математическото оптимиране, както и математически модели на икономико-производствени и други задачи. В началото на всеки дял са изложени необходимите за решаването на задачите определения и теореми и подробно решени примери. Дадени са отговори, упътвания или решения на почти всички задачи.

Предназначено е за студентите от Факултета по математика и информатика при Софийския университет, но може да се ползва и за самостоятелна работа от студенти от други факултети, аспиранти, икономисти, инженери и други специалисти, които работят в областта на математическото оптимиране.

Одобрено за печат от Министерството на науката, културата и просвета-та с решение № 131–00–194 от 1.XII.1988 г.

Съдържание

Предговор

Ръководството за решаване на задачи по математическо оптимиране е написано въз основа на програмата за курса по математическо оптимиране за студентите от Факултета по математика и информатика при Софийския университет и обобщава дългогодишния опит на лекторите и ръководителите на упражнения по тази дисциплина. Застъпени са основните дялове на математическото оптимиране: линейно (гл. 3), квадратично (гл. 8), хиперболично (гл. 7), целочислено (гл. 6), матрични игри (гл. 5). Разгледани са някои специални класове оптимизационни задачи (гл. 9), възникнали в сектор *Изследване на операциите* към *Института по математика с Изчислителен център при БАН* при моделирането на конкретни практически проблеми. За тяхното решаване са предложени оригинални, ефективни алгоритми.

Всяка глава на ръководството започва с основните определения и теореми, необходими за решаването на задачите в нея, и включва голям брой подробно решени примери. Това дава възможност то да бъде използвано и за самостоятелна подготовка. Математическите модели на икономико-производствени и други системи от последната глава ще допринесат за изясняване голямото значение на оптимизационните задачи за практиката (оттук и за осмисляне интереса на специалистите към математическото оптимиране). Приложението[1] към трета глава представлява кратко ръководство за използване на най-разпространения у нас програмен продукт (за машините от ЕС) за решаване на линейни оптимизационни задачи и ще помогне на интересуващите се от решаването на конкретни практически задачи на линейното оптимиране.

Поради ограничения обем на ръководството не са застъпени числени методи за решаване на по-общи нелинейни задачи за безусловна и условна оптимизация. Проблемите, свързани с тези методи, са главно теоретични (сходимост, скорост на сходимост и др.) и се разглеждат в курсовете по математическо оптимиране. По същата причина не са поместени материали за запознаване на читателя с възможности за използване на съвременна изчислителна техника за решаване на други оптимизационни задачи освен линейните (в приложението към трета глава). Този пропуск може да бъде попълнен в следващо издание на ръководството.

За удобство при съставянето на ръководството е възприето: номерацията на определения, теореми формули (цитирани в текста), примери и таблици е самостоятелна по глави, номерацията на задачите е самостоятелна за всеки параграф, а тази на фигурите е обща за цялото ръководство. За означаване на

[1]Не е дигитизирано.

вектори (както и на компонентите им, снабдени с долни индекси) са използвани малки латински букви, а на скалари — малки гръцки букви. Нулевият вектор е означен с числото нула[2], като от контекста се подразбира за кой от двата обекта става дума. За празното множество е използван символът $\emptyset$.

Отделните глави подготвиха, както следва: *първа глава* — Асен Дончев и Огнян Кунчев, *втора глава* — Влада Кючукова, *трета глава* — Румена Калтинска, *четвърта глава* — Петър Миланов и Влада Кючукова, *пета глава* — Здравка Карамитева, *шеста глава* — Йордан Митев, *седма глава* — Здравка Карамитева, *осма глава* — Влада Кючукова, *девета глава* — Георги Христов, *десета глава* — Влада Кючукова. *Приложението* подготви Николай Киров.

Изказваме искрена благодарност на всички свои колеги, които помогнаха при съставянето на ръководството. Особено благодарни сме на Евгени Белогай и Татяна Пархоменко, аспиранти в сектор *Изследване на операциите* към *Института по математика с Изчислителен център при БАН*, за търпението, с което набраха текста и формулите на персоналния компютър Правец-16.

При подготовката на текста са използвани текстоформатиращата програма ФОРМАТЕКСТ [1.6], графичният шрифтов филтър LETTRIX и матричен принтер STAR SR-15.

Авторите

[2]В това издание получерна, както и всички вектори.

Глава 1

Нелинейно оптимиране

Нека са дадени подмножество X на евклидовото пространство $\mathbb{R}^n$ и функция f, дефинирана в X, със стойности реални числа. Общата задача на математическото оптимиране се формулира по следния начин: Да се намери такава точка $\mathbf{x}^*$ от множеството X, че за всяко $\mathbf{x} \in X$ да е изпълнено $f(\mathbf{x}^*) \le f(\mathbf{x})$.

Едно от кратките записвания на тази формулировка е

$$f(\mathbf{x}) \to \min, \quad \mathbf{x} \in X. \tag{1}$$

Задачата за максимум $f(\mathbf{x}) \to \max$, $\mathbf{x} \in X$, е еквивалентна на задачата за минимум $(-f(\mathbf{x})) \to \min$, $\mathbf{x} \in X$. Задачите за минимум и максимум се наричат задачи за екстремум или екстремални задачи.

В тази глава ще разглеждаме задачи, в които множеството X се задава с краен брой равенства и неравенства

$$X = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : g_i(\mathbf{x}) \le 0,\ i = 1, \dots, m,\ h_j(\mathbf{x}) = 0,\ j = 1, \dots, s\}, \tag{2}$$

където g_i, $i = 1, \dots, m$, и h_j, $j = 1, \dots, s$, са функции, дефинирани в $\mathbb{R}^n$, със стойности в $\mathbb{R}$. Ще предполагаме, че функциите f, g_i и h_j имат дадени аналитични свойства (непрекъснатост, диференцуемост), но не са непременно от определен вид (линейни, квадратични и т. н.). За да различим този кръг задачи от останалите по-специфични класове, говорим за задачи на *нелинейното оптимиране*.

По-нататък в изложението ще използваме и други форми на записване на задача (1), например $\min\{f(\mathbf{x}) : \mathbf{x} \in X\}$. Ако X е от вида (2), понякога ще използваме следното записване:

$$f(\mathbf{x}) \to \min \tag{3}$$

при условия

$$\begin{aligned}
&g_i(\mathbf{x}) \le 0, \quad i = 1, \dots, m,\\
&h_j(\mathbf{x}) = 0, \quad j = 1, \dots, s,\\
&x \in \mathbb{R}^n.
\end{aligned}$$

Ще припомним някои класически теореми от анализа.

Теорема 1 (Вайерщрас)**.** Нека X е непразно компактно подмножество на $\mathbb{R}^n$ и функцията f е полунепрекъсната отдолу във всяка точка $\mathbf{x} \in X$. Тогава $f(\mathbf{x})$ достига минимума си в X.

Следствие 1. Нека X е непразно затворено подмножество на $\mathbb{R}^n$, f е полунепрекъсната отдолу в X функция и освен това за всяка редица $\{\mathbf{x}_k\}$, $\mathbf{x}_k \in X$, $k = 1, 2, \dots$, за която $\lim\limits_{k\to+\infty} \|\mathbf{x}_k\| = +\infty$, е изпълнено $\lim\limits_{k\to+\infty} f(\mathbf{x}_k) = +\infty$. Тогава задачата (1) има решение.

Теорема 2 (Ферма)**.** Нека $\mathbf{x}^*$ е точка на локален минимум на f в $\mathbb{R}^n$ и нека f е диференцуема в точката $\mathbf{x}^*$. Тогава $f'(\mathbf{x}^*) = \mathbf{0}$, където с $f'(\mathbf{x}^*) = (f'_{x_1}(\mathbf{x}^*), \dots, f'_{x_n}(\mathbf{x}^*))$ означаваме производната (градиента) на f в точката $\mathbf{x}^*$.

Теоремата на Ферма е *необходимо условие* за локален екстремум. *Достатъчно условие* се дава от следната

Теорема 3. Нека f е два пъти непрекъснато диференцуема в околност на точката $\mathbf{x}^*$ и освен това

1. $f'(\mathbf{x}^*) = \mathbf{0}$;
2. матрицата от вторите производни $f''(\mathbf{x}^*) = \left\| \dfrac{\partial^2 f(\mathbf{x}^*)}{\partial x_i \partial x_j} \right\|_{(n\times n)}$ е положително дефинитна.

Тогава $\mathbf{x}^*$ е точка на локален минимум на f в $\mathbb{R}^n$.

Необходимо условие за локален екстремум за задачата с ограничения равенства се дава от

Теорема 4 (Лагранж)**.** Нека $\mathbf{x}^*$ е точка на локален минимум за функцията f при условия $h_i(\mathbf{x}) = 0$, $i = 1, \dots, s$, функциите f и h_i са диференцуеми в околност на точката $\mathbf{x}^*$ и производните им са непрекъснати в тази околност. Тогава съществуват реални числа μ_0, $\lambda_1, \dots, \lambda_s$, не едновременно равни на нула, такива че $\mu_0 \ge 0$,

$$\mu_0 f'(\mathbf{x}^*) + \sum_{i=1}^{s} \lambda_i h_i'(\mathbf{x}^*) = \mathbf{0}.$$

Числата μ_0, λ_i, $i = 1, \ldots, s$, се наричат *множители на Лагранж*, а теорема 4 е известна като *принцип на Лагранж*.

Ако векторите $h_i'(\mathbf{x}^*)$, $i = 1, \ldots, s$, са линейно независими, то $\mu_0 \neq 0$. Ще отбележим, че векторът $(\mu_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_s)$ може да бъде избран с точност до ненулев реален множител. Следователно, ако $\mu_0 \neq 0$, можем да приемем $\mu_0 = 1$.

Обобщение на теоремата на Лагранж за задачи с ограничения равенства и неравенства се дава от

Теорема 5. Нека $\mathbf{x}^*$ е точка на локален минимум за функцията f при условия $g_i(\mathbf{x}) \leq 0$, $i = 1, \ldots, m$, $h_j(\mathbf{x}) = 0$, $j = 1, \ldots, s$, функциите g_i и h_j са диференцуеми в околност на $\mathbf{x}^*$ и производните им са непрекъснати в тази околност. Тогава съществуват реални числа $\mu_0, \mu_1, \ldots, \mu_m$, $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$, не едновременно равни на нула, такива че са изпълнени условията

1) $\mu_0 f'(\mathbf{x}^*) + \sum\limits_{i=1}^{m} \mu_i g_i'(\mathbf{x}^*) + \sum\limits_{j=1}^{s} \lambda_j h_j'(\mathbf{x}^*) = \mathbf{0}$,

2) $\mu_i g_i(\mathbf{x}^*) = 0$, $i = 1, \ldots, m$,

3) $\mu_i \geq 0$, $i = 0, \ldots, m$.

Да означим $I(\mathbf{x}^*) = \{i \in \{1, \ldots, m\},\ g_i(\mathbf{x}^*) = 0\}$. Ако векторите $g_i'(\mathbf{x}^*)$, $i \in I(\mathbf{x}^*)$, $h_j'(\mathbf{x}^*)$, $j = 1, \ldots, s$, са линейно независими, може да се приеме $\mu_0 = 1$.

Разглеждаме общата задача на нелинейното оптимиране (1) с ограничения (2). Функцията

$$L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\lambda}) = f(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^{m} \mu_i g_i(\mathbf{x}) + \sum_{j=1}^{s} \lambda_j h_j(\mathbf{x})$$

се нарича *функция на Лагранж*. Векторът $(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\mu}^*, \boldsymbol{\lambda}^*)$ се нарича *седлова точка* на функцията на Лагранж, когато

$$L(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\lambda}) \leq L(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\mu}^*, \boldsymbol{\lambda}^*) \leq L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\mu}^*, \boldsymbol{\lambda}^*)$$

за всяко $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \ldots, \mu_m) \in \mathbb{R}^m$, $\mu_i \geq 0$, $i = 1, \ldots, m$, $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \ldots, \lambda_s) \in \mathbb{R}^s$.

Теорема 6. Нека $(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\mu}^*, \boldsymbol{\lambda}^*)$ е седлова точка на функцията на Лагранж. Тогава $\mathbf{x}^*$ е решение на задача (1).

Пример 1. Решете задачата

$$f(x, y) = x^2 + y^2 \to \min, \quad (x, y) \in X = \{(x, y) : x^6 + y^6 = 1\}.$$

Решение. Множеството X е компактно (докажете), а f е непрекъсната функция. Следователно задачата има поне едно решение. Всяко решение ще удовлетворява принципа на Лагранж (теорема 4). Следователно, ако (x, y) е решение, то съществуват μ_0, λ_1, такива че

$$\left|\begin{array}{l} 2\mu_0 x + 6\lambda_1 x^5 = 0 \\ 2\mu_0 y + 6\lambda_1 y^5 = 0. \end{array}\right.$$

Ако $\mu_0 = 0$, тъй като $\lambda_1 \neq 0$, получаваме $x = y = 0$, което е невъзможно. Следователно $\mu_0 \neq 0$ и можем да приемем, че $\mu_0 = 1$. И така получаваме системата

$$\left|\begin{array}{l} x + 3\lambda_1 x^5 = 0 \\ y + 3\lambda_1 y^5 = 0 \end{array}\right. \iff \left|\begin{array}{l} x(1 + 3\lambda_1 x^4) = 0 \\ y(1 + 3\lambda_1 y^4) = 0, \end{array}\right.$$

която има следните решения:

1) $x = 0,\ y = \pm 1,\ \lambda_1 = -\frac{1}{3}$;

2) $x = \pm 1,\ y = 0,\ \lambda_1 = -\frac{1}{3}$;

3) $x = \pm 1/\sqrt[6]{2},\ y = \pm 1/\sqrt[6]{2},\ \lambda_1 = -\frac{1}{3}\sqrt[3]{4}$.

Във всяка друга точка на X равенството в теоремата на Лагранж не е изпълнено. Следователно поне една от горните точки е точка на минимум. Остава да намерим стойностите на f в тези точки. Получаваме, че точките 1) и 2) са решения на задачата (останалите точки са точки на максимум).

Пример 2. Решете задачата

$$f(x, y) = x^2 + y^3 \to \min, \quad (x, y) \in X,$$

където

а) $X = \{(x, y) : x^2 + y \leq 1\}$,

б) $X = \{(x, y) : x^2 + y \leq 1,\ -y \leq 1\}$.

Решение. а) Множеството X не е ограничено, следователно не можем да приложим теоремата на Вайерщрас. Да се опитаме да намерим „подозрителни“ точки, които удовлетворяват условията на теорема 5:

$$\begin{array}{ll} \mu_0 2x + \mu_1 2x = 0, & \mu_0 3y^2 + \mu_1 = 0, \\ \mu_1(x^2 + y - 1) = 0, & \mu_1 \geq 0. \end{array}$$

Ако $\mu_0 = 0$, то от второто равенство следва $\mu_1 = 0$, което противоречи на твърдението $(\mu_0, \mu_1) \neq (0, 0)$. Нека $\mu_0 = 1$. Тогава $\mu_1 = -3y^2 \leq 0$. Следователно $\mu_1 = 0$ и получаваме $(x, y) = (0, 0)$. Тази точка обаче не е точка на локален минимум, тъй като $f(0, -\varepsilon) < f(0, 0)$ за всяко $\varepsilon > 0$.

Всъщност f е неограничена отдолу в X, тъй като $\lim\limits_{\lambda \to +\infty} f(0, -\lambda) = -\infty$.

б) За разлика от предишния случай множеството X е компактно. Следователно, тъй като f е непрекъсната функция, задачата има решение. Прилагаме теорема 5 и получаваме условията:

$$1) \begin{cases} 2\mu_0 x + 2\mu_1 x = 0 \\ 3\mu_0 y^2 + \mu_1 - \mu_2 = 0. \end{cases} \qquad 2) \begin{cases} \mu_1(x^2 + y - 1) = 0 \\ \mu_2(-y - 1) = 0. \end{cases} \qquad 3)\ \mu_1 \geq 0,\ \mu_2 \geq 0.$$

Разглеждаме първо случая $\mu_0 = 0$. От 1) следва $\mu_1 x = 0$, $\mu_1 = \mu_2$. Възможно е само $\mu_1 \neq 0$. Но тогава $x = 0$ и системата 2) става противоречива. Следователно $\mu_0 \neq 0$.

Нека $\mu_0 = 1$. От 1) и 3) следва $1 + \mu_1 \neq 0$. Следователно $x = 0$ и

$$3y^2 + \mu_1 - \mu_2 = 0, \qquad \mu_1(y - 1) = 0, \qquad \mu_2(y + 1) = 0.$$

Ако $\mu_2 \neq 0$, то $y = -1$. Следователно $\mu_1 = 0$, $3 - \mu_2 = 0$ и множителите на Лагранж са $\mu_0 = 1$, $\mu_1 = 0$, $\mu_2 = 3$.

Ако $\mu_1 \neq 0$, то $y = 1$, $\mu_2 = 0$, $3 + \mu_1 = 0$, което противоречи на 3).

И така, минимум се достига в точката $(0, -1)$ и $f(0, -1) = -1$.

Пример 3. Решете задачата

$$f(x, y) = y \to \min, \quad (x, y) \in X, \quad X = \{(x, y) : x^4 - y^5 = 0\}.$$

Решение. От условието $y = \sqrt[5]{x^4} \geq 0$ следва, че $f(x, y)$ е ограничена отдолу в X, при това $f(x, y) \geq 0$ за всяко $(x, y) \in X$. Очевидно решението е $(x^*, y^*) = (0, 0)$. Условието в теоремата на Лагранж има вида

$$4\lambda_1 x^3 = 0, \qquad \mu_0 - 5\lambda_1 y^4 = 0.$$

Множителите на Лагранж са $(0, \lambda_1)$, λ_1 — произволно реално число, различно от нула.

Пример 4. От цилиндрите, вписани в кълбо с единичен радиус, намерете цилиндъра с максимален обем.

Решение. Да означим с x височината на цилиндъра, $0 \leq x \leq 2$. Обемът на цилиндъра ще бъде

$$f(x) = \pi x \left(1 - \frac{x^2}{4}\right).$$

Очевидно задачата има решение x^*. Да предположим, че $0 < x^* < 2$. Тогава можем да считаме, че ограниченията са несъществени и прилагаме теоремата на Ферма. Всяка „подозрителна“ точка ще удовлетворява

$$f'(x) = \pi\left(1 - \frac{x^2}{4}\right) - \pi\frac{x^2}{2} = 0.$$

Това уравнение има единствено решение $x^* = \frac{2}{\sqrt{3}}$. За да докажем, че то е решение на задачата, ще използваме теорема 6. Съставяме функцията на Лагранж

$$L(x, \mu_1, \mu_2) = f(x) + \mu_1(-x) + \mu_2(x - 2).$$

Точката $\mu_1 = 0$, $\mu_2 = 0$, $x^* = \frac{2}{\sqrt{3}}$ е седлова точка на функцията на Лагранж (проверете). Следователно x^* е решение.

Пример 5. Решете задачата

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{c_i}{x_i} \to \min, \qquad \mathbf{x} \in X = \left\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^{n} a_i x_i = b,\ x_i \geq 0\right\},$$

където a_i, b и $c_i > 0$, $i = 1, \ldots, n$.

Решение. Задачата има решение (защо?). Всяка точка $\mathbf{x}^*$ на локален минимум ще удовлетворява условията на теорема 5. Тогава

$$-\mu_0\frac{c_i}{x_i^2} - \mu_i + \lambda a_i = 0, \qquad \mu_i x_i = 0, \qquad \mu_i \geq 0, \qquad i = 1, \ldots, n.$$

Нека $\mu_0 = 0$. Тогава $\mu_i = \lambda a_i$ и $\lambda \neq 0$. От равенствата $\frac{1}{\lambda}\sum_{i=1}^{n} \mu_i x_i = b$ и $\mu_i x_i = 0$ следва $b = 0$ — противоречие. Да положим $\mu_0 = 1$. Тогава $x_i > 0$ и $\mu_i = 0$. Следователно $x_i = \sqrt{\frac{c_i}{\lambda a_i}}$, откъдето $\lambda = \frac{1}{b^2}\left(\sum_{i=1}^{n} \sqrt{a_i c_i}\right)^2$ и накрая $x_i^* = \frac{b}{\sum_{i=1}^{n} \sqrt{a_i c_i}} \sqrt{\frac{c_i}{a_i}}$ и $f(\mathbf{x}^*) = \frac{1}{b}\left(\sum_{i=1}^{n} \sqrt{a_i c_i}\right)^2$.

Оставяме на читателя сам да провери, че получената точка е решение.

Задачи

1. Покажете (с пример), че:

а) условието $f'(\mathbf{x}^*) = 0$ не е достатъчно, за да бъде $\mathbf{x}^*$ точка на локален екстремум на f в $\mathbb{R}^n$;

б) условието $f'(\mathbf{x}^*) = 0$ и $f''(\mathbf{x}^*)$ да е положително дефинитна не е необходимо, за да бъде $\mathbf{x}^*$ точка на локален екстремум на f в $\mathbb{R}^n$.

2. Съставете задача, за която се удовлетворяват условията на теоремата на Лагранж с $\mu_0 = 0$.

3. Да се намерят локалните и глобалните екстремуми на следните функции при съответните условия:

3.1. $xy + \dfrac{50}{x} + \dfrac{20}{y} \to \text{extr};$

3.2. $x^2 - y^2 - 4x + 6y \to \text{extr};$

3.3. $x^2 + y^2 \to \text{extr}$ при ограничение $3x + 4y = 1;$

3.4. $xy^2z^3 \to \text{extr}$ при ограничение $x + y + z = 1;$

3.5. $xyz \to \text{extr}$ при ограничение $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1;$

3.6. $x^2 + y^2 \to \min$ при ограничение $x^4 + y^4 = 1;$

3.7. $e^{xy} \to \text{extr}$ при ограничение $x + y = 1.$

4. Докажете, че минималната стойност на функцията $f(\mathbf{x}) = \langle \mathbf{x}, \mathbf{A}\mathbf{x} \rangle$ в единичната сфера $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \|\mathbf{x}\| = 1\}$, където $\mathbf{A}$ е симетрична матрица, е най-малката собствена стойност на $\mathbf{A}$.

5. Намерете екстремумите в следните задачи:

5.1. $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 \to \text{extr},\ \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^4 \leq 1;$

5.2. $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^4 \to \text{extr},\ \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 \leq 1.$

6. Намерете правоъгълен триъгълник с най-голямо лице, ако сумата от дължините на катетите му е дадено число d.

7. Впишете в кръг триъгълник с максимална сума от квадратите на страните.

8. Намерете стойностите на x_1, x_2 (и x_3), които са решения на следните задачи:

8.1. $\displaystyle\int_{-1}^{1} (t^2 + x_1 t + x_2)^2 \, dt \to \inf;$

8.2. $\displaystyle\int_{-1}^{1} (t^3 + x_1 t^2 + x_2 t + x_3)^2 \, dt \to \inf.$

Подинтегралните функции с коефициенти, при които се достига инфимумът, се наричат *полиноми на Льожандър* от втора и трета степен съответно.

9. Разглеждаме общата задача на нелинейното оптимиране (1) с ограничения: $X = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : g_i(\mathbf{x}) \leq 0\}$. Нека $L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\mu})$ е съответната функция на Лагранж и нека $\psi(\boldsymbol{\mu}) = \inf\{L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\mu}) : \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n\}$. Докажете, че за всяка точка $\mathbf{x} \in X$ и за всяко $\boldsymbol{\mu} \geq 0$ е изпълнено $f(\mathbf{x}) \geq \psi(\boldsymbol{\mu})$.

10. Ако $X = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{x} = \mathbf{A}\mathbf{y},\ \mathbf{y} \in \mathbb{R}^m,\ \mathbf{y} \geq 0\}$, където $\mathbf{A}$ е матрица $m \times n$ и $f(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x}\|$, докажете, че задачата $\min\{f(\mathbf{x}) : \mathbf{x} \in X\}$ има решение.

Отговори и решения

3.1. Локален минимум в $(5,2)$; $\min = -\infty$; $\max = \infty$.

3.2. $\max = \infty$; $\min = -\infty$, няма локален екстремум.

3.3. Глобален минимум в $(\frac{3}{25}, \frac{4}{25})$; $\min = \frac{1}{25}$; $\max = \infty$.

3.4. Локален максимум в $(\frac{1}{6}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2})$ и $(t, 0, 1-t)$ за $t > 1$, $t < 0$; локален минимум в $(t, 0, 1-t)$ за $0 < t < 1$; $\min = -\infty$; $\max = \infty$.

3.5. Ако $\sigma = -\frac{1}{\sqrt{3}}$,

- глобален минимум в $(-\sigma, -\sigma, -\sigma)$, $(\sigma, \sigma, -\sigma)$, $(\sigma, -\sigma, \sigma)$, $(-\sigma, \sigma, \sigma)$;
- глобален максимум в (σ, σ, σ), $(\sigma, -\sigma, -\sigma)$, $(-\sigma, \sigma, -\sigma)$ и $(-\sigma, -\sigma, \sigma)$;
- $\max = -\min = \frac{\sigma}{3}$.

3.6. Глобален минимум в $(\pm 1, 0)$, $(0, \pm 1)$; $\min = 1$.

3.7. Глобален максимум в $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$; $\max = e^{\frac{1}{4}}$, $\inf = 0$ (не се достига).

5.1. Глобален минимум в $(0, \dots, 0)$, $\min = 0$;
глобален максимум в $(\pm n^{-\frac{1}{4}}, \dots, \pm n^{-\frac{1}{4}})$, $\max = \sqrt{n}$.

5.2. Глобален минимум в $(0, \dots, 0)$, $\min = 0$;
глобален максимум в $(\pm 1, 0, \dots, 0)$, $\dots$, $(0, \dots, \pm 1)$, $\max = 1$.

8.1. $t^2 - \frac{1}{3}$.

8.2. $t^3 - \frac{3}{5}t$.

10. Упътване. Покажете, че X е затворено множество.

Глава 2

Изпъкнало оптимиране

Определение 1. Множеството $X \subset \mathbb{R}^n$ се нарича *изпъкнало*, ако от $\mathbf{x}_1 \in X$, $\mathbf{x}_2 \in X$, следва $\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}_1 + (1-\lambda)\mathbf{x}_2 \in X$, където $\lambda \in [0,1]$.

Определение 2. Точката $\mathbf{x} \in X \subset \mathbb{R}^n$ се нарича *крайна* (*екстремна*) точка на X, ако не съществуват две различни точки $\mathbf{x}_1 \in X$, $\mathbf{x}_2 \in X$ и число $\lambda \in (0,1)$, такива че $\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}_1 + (1-\lambda)\mathbf{x}_2$.

Казваме, че линейната комбинация $\lambda_1\mathbf{x}_1 + \cdots + \lambda_k\mathbf{x}_k$ на точките $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_k$ е *изпъкнала*, ако за числата $\lambda_i \geq 0$, $i = 1, \ldots, k$, е изпълнено $\lambda_1 + \cdots + \lambda_k = 1$.

Твърдение. Изпъкналото множество X съдържа всяка изпъкнала комбинация на краен брой свои точки (вж. задача 4).

Теорема 1 (Минковски—Крейн—Милман)**.** Ако X е изпъкнало компактно множество, то всяка точка на X може да се представи като изпъкнала комбинация на крайните точки на X.

Забележка. За съществуването на поне една крайна точка на X вж. задача 7.

Определение 3. Функцията $f(\mathbf{x})$, дефинирана в изпъкналото множество $X \subset \mathbb{R}^n$ и със стойности в $\mathbb{R}$, се нарича *изпъкнала*, ако за произволни точки $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$ от X при $\lambda \in (0,1)$ е в сила неравенството

$$f(\lambda\mathbf{x}_1 + (1-\lambda)\mathbf{x}_2) \leq \lambda f(\mathbf{x}_1) + (1-\lambda)f(\mathbf{x}_2).$$

Функцията се нарича *строго изпъкнала*, ако за произволни $\mathbf{x}_1 \neq \mathbf{x}_2$ горното неравенство се изпълнява строго.

Функцията $f(\mathbf{x})$ се нарича *вдлъбната* (*строго вдлъбната*), ако $-f(\mathbf{x})$ е изпъкнала (строго изпъкнала).

Изпъкналите функции имат редица свойства, които им отреждат важно място в теорията на екстремалните задачи. Ще приведем някои теореми.

Теорема 2. Нека функцията f е изпъкнала в $\mathbb{R}^n$ и диференцуема в точката $\mathbf{x}^*$. Тогава следните условия са еквивалентни:

1) $f(\mathbf{x}^*) = \min\{f(\mathbf{x}) : \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n\}$;

2) $f'(\mathbf{x}^*) = 0$.

С други думи, при допълнителното изискване за изпъкналост теоремата на Ферма дава необходимо и достатъчно условие за минимум (сравнете с теорема 2, гл. 1).

Теорема 3. Ако функцията f е изпъкнала в изпъкналото множество X, то всяка точка на локален минимум е и точка на глобален минимум на f в X. Множеството от точките на локален минимум е изпъкнало. Ако функцията е строго изпъкнала и достига инфимума си в X, точката на минимум е единствена в X.

Често се използват следните свойства, всяко от които е еквивалентно със свойството изпъкналост на f в $\mathbb{R}^n$ (при предположение, че всички срещащи се производни съществуват и са непрекъснати):

1°. $f(\mathbf{x}_2) - f(\mathbf{x}_1) \geq \langle f'(\mathbf{x}_1), \mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1 \rangle$ за всеки $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2 \in \mathbb{R}^n$.

2°. Функцията $\varphi(\lambda) = f(\mathbf{x} + \lambda\mathbf{t})$ е изпъкнала по $\lambda \in \mathbb{R}$ за произволни фиксирани $\mathbf{x}$, $\mathbf{t} \in \mathbb{R}^n$.

3°. Функцията $\psi(\lambda) = \langle f'(\mathbf{x} + \lambda\mathbf{t}), \mathbf{t} \rangle$ е ненамаляваща по $\lambda \in \mathbb{R}$ за произволни фиксирани $\mathbf{x}$, $\mathbf{t} \in \mathbb{R}^n$.

4°. Матрицата $f''(\mathbf{x})$ е положително полудефинитна (вж. гл. 8, § 1) за всяко $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$.

Ако $X \subset \mathbb{R}^n$ е изпъкнало множество, $\dim X = n$ и $f(\mathbf{x})$ е непрекъсната в X и диференцуема в произволна вътрешна точка на X, в сила са аналогични еквивалентни свойства на $f(\mathbf{x})$ в X.

Общата задача на *изпъкналото оптимиране* има следния вид

$$\min\{f(\mathbf{x}) : \mathbf{x} \in X\}, \tag{1}$$

където X е подмножество на $\mathbb{R}^n$, зададено със системата уравнения и неравенства

$$X = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : g_i(\mathbf{x}) \leq 0,\ i \in I_1,\ h_i(\mathbf{x}) = 0,\ i \in I_2,\ x_j \geq 0,\ j \in J_1\}.$$

I_1 и I_2 са подмножества на $I = \{1, \dots, m\}$, $I_1 \cup I_2 = I$, $I_1 \cap I_2 = \emptyset$, $J_1 \subset J = \{1, \dots, n\}$ и функциите $f(\mathbf{x})$, $g_i(\mathbf{x})$, $i \in I_1$ са *изпъкнали*, а $h_i(x)$, $i \in I_2$ —

афинни ($h_i(\mathbf{x}) = \langle \mathbf{a}_i, \mathbf{x} \rangle - b_i$, $\mathbf{a}_i \in \mathbb{R}^n$, $b_i \in \mathbb{R}$). Допуска се, разбира се, някои от функциите $g_i(\mathbf{x})$, $i \in I_1$, да бъдат също афинни. Лесно се проверява, че множеството X е изпъкнало (вж. задачи 10 и 12).

Ще казваме, че за задача (1) е изпълнено *условието на Слейтър*, ако съществува точка $\overline{\mathbf{x}} \in X$, такава че $g_i(\overline{\mathbf{x}}) < 0$ за всяко $i \in I_1$, за което функцията $g_i(\mathbf{x})$ не е афинна. (Ако всички функции g_i, $i \in I_1$, са афинни, това условие е тривиално изпълнено.)

Въвеждаме *функцията на Лагранж* за задача (1)

$$L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}) = f(\mathbf{x}) + \sum_{i \in I_1} \lambda_i g_i(\mathbf{x}) + \sum_{i \in I_2} \lambda_i h_i(\mathbf{x}).$$

С $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \dots, \lambda_m)$ означаваме вектора с компоненти множителите на Лагранж. Както в глава 1 ще казваме, че точката $(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\lambda}^*)$ е *седлова точка на функцията на Лагранж* в областта

$$\Lambda = \{(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}) \in \mathbb{R}^{n+m} : x_j \geq 0,\ j \in J_1,\ \lambda_i \geq 0,\ i \in I_1\},$$

ако за всяка точка $(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}) \in \Lambda$ са изпълнени неравенствата

$$L(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\lambda}) \leq L(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\lambda}^*) \leq L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}^*).$$

Теорема 4 (Кун и Такър)**.** Нека в задача (1) е изпълнено условието на Слейтър. Тогава следните две твърдения са еквивалентни:

1) Точката $\mathbf{x}^*$ е решение (точка на минимум) на задача (1).

2) Съществува вектор $\boldsymbol{\lambda}^* \in \mathbb{R}^m$, $\lambda_i^* \geq 0$, $i \in I_1$, такъв че $(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\lambda}^*)$ е седлова точка на функцията на Лагранж.

Теорема 5 (локални условия на Кун и Такър)**.** Нека в задача (1) функциите f, g_i, $i \in I_1$, са диференцуеми и е изпълнено условието на Слейтър. Тогава следните две твърдения са еквивалентни:

1) Точката $\mathbf{x}^*$ е решение на задача (1).

2) Съществува вектор $\boldsymbol{\lambda}^* \in \mathbb{R}^m$, такъв че $(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\lambda}^*)$ удовлетворява условията:

$$\begin{array}{llll}
L'_{x_j}(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\lambda}^*) \geq 0, & j \in J_1; & L'_{\lambda_i}(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\lambda}^*) \leq 0, & i \in I_1; \\
x_j^* L'_{x_j}(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\lambda}^*) = 0, & j \in J_1; & \lambda_i^* L'_{\lambda_i}(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\lambda}^*) = 0, & i \in I_1; \\
x_j^* \geq 0, & j \in J_1; & \lambda_i^* \geq 0, & i \in I_1; \\
L'_{x_j}(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\lambda}^*) = 0, & j \in J \setminus J_1; & L'_{\lambda_i}(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\lambda}^*) = 0, & i \in I_2.
\end{array}$$

Пример 1. Да се намери минимумът на функцията x^2-4x+5 в интервала $[0, 5]$.

Решение. Тази проста задача можем да разглеждаме като задача на изпъкналото оптимиране

$$\min\{x^2 - 4x + 5 : x - 5 \leq 0,\ x \geq 0\}.$$

Функцията на Лагранж е $L(x, \lambda) = x^2 - 4x + 5 + \lambda(x - 5)$.

Системата от условия на Кун и Такър е

$$\begin{array}{ll} 2x - 4 + \lambda \geq 0, & x - 5 \leq 0, \\ x(2x - 4 + \lambda) = 0, & \lambda(x - 5) = 0, \\ x \geq 0, & \lambda \geq 0. \end{array}$$

Всички двойки (x, λ), които удовлетворяват уравненията в горната система, са три:

1) $x = 0$, $\lambda = 0$: тази двойка не удовлетворява неравенството $2x - 4 + \lambda \geq 0$;

2) $x = 2$, $\lambda = 0$: тази двойка удовлетворява всички неравенства;

3) $x = 5$, $\lambda = -6$: тази двойка не удовлетворява неравенството $\lambda \geq 0$.

И така, единствено двойката $x = 2$, $\lambda = 0$ удовлетворява условията на Кун и Такър. Решение на задачата е $x = 2$.

Ще приведем още една еквивалентна формулировка на теорема 5, която често се използва като „работен“ критерий за оптималност.

Теорема 6. При предположенията от теорема 5 точката $\mathbf{x}^* \in X$ е решение на задача (1) тогава и само тогава, когато съществуват числа $u_i^* \geq 0$, $i \in I_1(\mathbf{x}^*)$, u_i^*, $i \in I_2$, $v_j^* \geq 0$, $j \in J_1(\mathbf{x}^*)$, такива че

$$-f'(\mathbf{x}^*) = \sum_{i \in I_1(\mathbf{x}^*)} u_i^* g_i'(\mathbf{x}^*) + \sum_{i \in I_2} u_i^* \mathbf{a}_i + \sum_{j \in J_1(\mathbf{x}^*)} v_j^*(-\mathbf{e}^j),$$

където $I_1(\mathbf{x}^*) = \{i \in I_1 : g_i(\mathbf{x}^*) = 0\}$, $J_1(\mathbf{x}^*) = \{j \in J_1 : x_j^* = 0\}$, $\mathbf{e}_j = (\underbrace{0, \ldots, 0, 1}_{j}, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^n$.

Ограниченията, който се удовлетворяват като равенства в точката $\mathbf{x} \in X$, наричаме *активни* в тази точка.

Пример 2. Дадена е задачата

$$\min\{2x_1^2 + 4x_2^2 - 2x_1x_2 + 4(2 - \sqrt{5})x_1 + 5(\sqrt{5} - 2)x_2\}$$

при условия

$$\begin{aligned}
&x_1^2 + x_2^2 \le 4 && (g_1(x) = x_1^2 + x_2^2 - 4),\\
&x_1^2 - x_2 \le 0 && (g_2(x) = x_1^2 - x_2),\\
&x_1 + x_2 \ge 1 && (g_3(x) = -x_1 - x_2 + 1),\\
&x_1 \ge 0.
\end{aligned}$$

Да се изследват за оптималност точките $\mathbf{x}_1 = (0, 2)$ и $\mathbf{x}_2 = \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}, \frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)$.

Решение. Лесно се проверява, че това е задача на изпъкналото оптимиране. Условието на Слейтър е изпълнено — например точката $\bar{\mathbf{x}} = (0, 1)$ удовлетворява всички ограничения, а първите две — като строги неравенства. Условията на теорема 6 са изпълнени. Непосредствено се проверява, че $\mathbf{x}_1$ и $\mathbf{x}_2$ удовлетворяват ограниченията. В $\mathbf{x}_1$ активни са ограниченията $g_1(\mathbf{x}) \le 0$ и $x_1 \ge 0$. Пресмятаме $-f'(\mathbf{x}_1) = (4\sqrt{5} - 4, -5\sqrt{5} - 6)$, $g_1'(\mathbf{x}_1) = (0, 4)$. За проверка на оптималността на $\mathbf{x}_1$ търсим числа $u_1 \ge 0$ и $v_1 \ge 0$, такива че

$$\begin{pmatrix} 4\sqrt{5} - 4 \\ -5\sqrt{5} - 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix} u_1 + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} v_1,$$

т. е. търсим решение на системата

$$\left|\begin{aligned}
4\sqrt{5} - 4 &= -v_1\\
-5\sqrt{5} - 6 &= 4u_1\\
u_1 \ge 0,\ v_1 &\ge 0,
\end{aligned}\right.$$

която е несъвместима. Следователно $\mathbf{x}_1$ не е точка на минимум. Аналогично проверката за оптималност на $\mathbf{x}_2$ (в $\mathbf{x}_2$ активни са ограниченията $g_2(\mathbf{x}) \le 0$ и $g_3(\mathbf{x}) \le 0$) води до системата

$$\left|\begin{aligned}
\sqrt{5} - 3 &= (\sqrt{5} - 1)u_2 - u_3\\
-3 &= -u_2 - u_3\\
u_2 \ge 0,\ u_3 &\ge 0,
\end{aligned}\right.$$

която има решение $u_2 = 1$, $u_3 = 2$. Следователно $\mathbf{x}_2$ е решение на задачата.

Задачи

1. Покажете, че кълбото B с център $\mathbf{x}_0$ и радиус r е изпъкнало множество.

Забележка. В ръководството използваме евклидовото разстояние между две точки $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n)$ и $\mathbf{b} = (b_1, \dots, b_n)$ в $\mathbb{R}^n$: $\|\mathbf{b} - \mathbf{a}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (b_i - a_i)^2}$.

2. Нека $\mathbf{x} \neq \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$. Покажете, че множеството

$$G = \{\mathbf{z} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{z} = \lambda \mathbf{x} + (1 - \lambda)\mathbf{y},\ \lambda \in \mathbb{R}\}$$

е изпъкнало (G е правата, минаваща през $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$).

3. Нека за произволни точки $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ от множеството $X \subset \mathbb{R}^n$ точката $\mathbf{z} = \frac{1}{2}(\mathbf{x} + \mathbf{y})$ принадлежи на X.

3.1. Изпъкнало ли е множеството X?

3.2. Изпъкнало ли е множеството X при предположение, че е затворено?

4. Покажете, че множеството $X \subset \mathbb{R}^n$ е изпъкнало тогава и само тогава, когато съдържа всяка изпъкнала комбинация на краен брой свои точки.

5. Докажете, че точката $\overline{\mathbf{x}}$ е крайна за изпъкналото множество X тогава и само тогава, когато множеството $X \setminus \{\overline{\mathbf{x}}\}$ е изпъкнало.

6. Нека $X \subset \mathbb{R}^n$ е изпъкнало множество и $\overline{\mathbf{x}} \in X$ е най-отдалечената (вж. забележката към задача 1) точка в X от точката $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ ($\mathbf{y}$ може и да не принадлежи на X). Докажете, че $\overline{\mathbf{x}}$ е крайна точка на X.

7. Докажете, че всяко непразно изпъкнало компактно множество $X \subset \mathbb{R}^n$ има поне една крайна точка.

8. Докажете, че всяко изпъкнало компактно множество X, имащо поне две различни точки, има поне две различни крайни точки.

9. Докажете, че сечението на произволен брой изпъкнали множества е изпъкнало множество.

10. Проверете изпъкнало ли е множеството

$$X = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : f_i(\mathbf{x}) \leq 0,\ i = 1, \dots, m\},$$

ако f_i, $i = 1, \dots, m$, са изпъкнали функции.

11. Нека $f : X \to \mathbb{R}$. Множеството $M(\alpha) = \{\mathbf{x} \in X : f(\mathbf{x}) \leq \alpha\}$ се нарича *множество на Лебег* за функцията f.

11.1. Докажете, че ако f е изпъкнала функция, то $M(\alpha)$ са изпъкнали множества за всяко $\alpha \in \mathbb{R}$.

11.2. Посочете пример на неизпъкнала функция, за която съответните множества на Лебег са изпъкнали.

12. Нека са дадени множествата от индекси $I = \{1, \dots, m\}$, $I_1 \subset I$, $I_2 \subset I$, $I_1 \cup I_2 = I$, $I_1 \cap I_2 = \emptyset$, $J \subset \{1, \dots, n\}$, и фамилия реални функции $f_i(\mathbf{x})$, $i \in I$, дефинирани в $\mathbb{R}^n$, изпъкнали за $i \in I_1$ и афинни за $i \in I_2$.

12.1. Проверете изпъкнало ли е множеството

$$X_1 = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : f_i(\mathbf{x}) \le 0,\ i \in I_1,\ f_i(\mathbf{x}) = 0,\ i \in I_2,\ x_j \ge 0,\ j \in J\}.$$

12.2. Проверете изпъкнало ли е множеството $X_2 = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : f(\mathbf{x}) = 0\} \cap X_1$, където f е строго изпъкнала функция в $\mathbb{R}^n$.

13. Нека множество X е зададено както в задача 12.1, $f(\mathbf{x})$ е вдлъбната функция в X и точката $\mathbf{x}^* \in X$ е такава, че за произволно $\mathbf{x} \in X$ е изпълнено $f(\mathbf{x}^*) \ge f(\mathbf{x})$.

Дефинираме множествата $A \subset \mathbb{R}^{n+m+1}$ и $B \subset \mathbb{R}^{n+m+1}$ по следния начин: $\mathbf{a} = (a_0, a_1, \dots, a_{m+n}) \in A$, ако съществува $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, такова че $a_0 \le f(\mathbf{x})$, $a_i \le -f_i(\mathbf{x})$ за $i \in I_1$, $a_i = -f(\mathbf{x})$ за $i \in I_2$, $a_{m+j} \le x_j$ за $j \in J$; $\mathbf{b} = (b_0, b_1, \dots, b_{m+n}) \in B$, ако $b_0 > f(\mathbf{x})$, $b_i \ge 0$ за $i \in I_1$, $b_i = 0$ за $i \in I_2$, $b_{m+j} \le 0$ за $j \in J$. Докажете, че A и B са непразни непресичащи се изпъкнали множества.

14. Докажете, че всяка крайна точка на сечението на изпъкнало множество X с хиперравнина $H = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \langle \mathbf{a}, \mathbf{x} \rangle = \alpha\}$, опорна към X в точката $\bar{\mathbf{x}}$, е крайна точка на X.

Забележка. Хиперравнината $\langle \mathbf{a}, \mathbf{x} \rangle = \alpha$ се нарича *опорна* за изпъкнало множество X в контурната точка $\bar{\mathbf{x}}$, ако $\langle \mathbf{a}, \bar{\mathbf{x}} \rangle = \alpha$ и $\langle \mathbf{a}, \mathbf{x} \rangle \le \alpha$ за всяко $\mathbf{x} \in X$. Известна е следната теорема: *През произволна контурна точка $\bar{\mathbf{x}}$ на изпъкнало затворено множество X може да се прекара равнина H, опорна за X в точката $\bar{\mathbf{x}}$.* Припомняме, че *контурна* (или *гранична*) точка на множеството X е точка, във всяка околност на която има както точки, принадлежащи на X, така и точки, непринадлежащи на X.

15. Нека $f_i(\mathbf{x}) = \langle \mathbf{c}_i, \mathbf{x} \rangle + d_i$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $i \in I = \{1, \dots, m\}$, $\mathbf{c}_i \in \mathbb{R}^n$, $d_i \in \mathbb{R}$ и $\varphi(\mathbf{x}) = \sup_{i \in I}\{f_i(\mathbf{x})\}$, $\psi(\mathbf{x}) = \inf_{i \in I}\{f_i(\mathbf{x})\}$.

15.1. Покажете, че множествата $A = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \varphi(\mathbf{x}) < \infty\}$ и $B = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \psi(\mathbf{x}) > -\infty\}$ са изпъкнали.

15.2. Покажете, че функцията φ е изпъкнала в A и функцията ψ е вдлъбната в B.

16 (Неравенство на Йенсен)**.** Покажете, че $f(\mathbf{x})$ е изпъкнала функция в изпъкналото множество $X \subset \mathbb{R}^n$ тогава и само тогава, когато за произволно

$k \geq 2$ и произволни $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k \in X$ е изпълнено

$$f\left(\sum_{i=1}^{k} \lambda_i \mathbf{x}_i\right) \leq \sum_{i=1}^{k} \lambda_i f(\mathbf{x}_i), \quad \text{където} \quad \sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1,\ \lambda_i \geq 0,\ i = 1, \dots, k.$$

17. Покажете, че $f(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, е афинна функция тогава и само тогава, когато е едновременно изпъкнала и вдлъбната.

18. Нека $f_i(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, са изпъкнали функции, $\alpha_i \geq 0$, $i = 1, \dots, k$. Покажете, че функцията $f(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i f_i(\mathbf{x})$ е изпъкнала.

19. Докажете, че всеки локален минимум на изпъкнала функция в изпъкнало множество е и глобален.

20. Докажете, че ако функциите $f_i(\mathbf{x})$, $i = 1, \dots, n$, са изпъкнали, то функцията $\varphi(\mathbf{x}) = \max_i \{f_i(\mathbf{x})\}$ е изпъкнала.

21. Нека функцията $f(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$, е изпъкнала по $\mathbf{x}$ за всяко фиксирано $\mathbf{y} \in Y \subset \mathbb{R}^m$. Да се докаже, че функцията $\varphi(\mathbf{x}) = \sup_{\mathbf{y} \in Y} f(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ е изпъкнала.

22. Нека $f(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, е изпъкнала функция, а $\mathbf{A}$ е матрица с размери $m \times n$. Разглеждаме функцията $h(\mathbf{y}) = \inf_X \{f(\mathbf{x}) : \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{y}\}$. Да се докаже, че $h(\mathbf{y})$ е изпъкнала.

23. Докажете, че ако $f(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, е изпъкнала непрекъснато диференцуема функция, то:

23.1. Ако $\langle f'(\mathbf{x}), \mathbf{t} \rangle > 0$ ($\mathbf{t} \in \mathbb{R}^n$), то $f(\mathbf{x} + \lambda \mathbf{t}) > f(\mathbf{x})$ за всяко $\lambda > 0$.

23.2. Ако $\langle f'(\mathbf{x}), \mathbf{t} \rangle < 0$, то съществува число λ_0, такова че $f(\mathbf{x} + \lambda \mathbf{t}) < f(\mathbf{x})$ за $\lambda \in (0, \lambda_0)$.

24. Докажете, че ако $f(\mathbf{x})$ е непрекъсната в изпъкнало множество $X \subset \mathbb{R}^n$ и $f\left(\frac{\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2}{2}\right) \leq \frac{1}{2}(f(\mathbf{x}_1) + f(\mathbf{x}_2))$ за всеки две точки $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in X$, то $f(\mathbf{x})$ е изпъкнала в X.

25. Нека $f(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, е изпъкнала функция и $X \neq \emptyset$ е изпъкнало множество в $\mathbb{R}^n$. Да се докаже, че $\mathbf{x}^*$ е точно тогава точка на минимум на $f(\mathbf{x})$ в X, когато $\langle f'(\mathbf{x}^*), \mathbf{x} - \mathbf{x}^* \rangle \geq 0$ за всяко $\mathbf{x} \in X$.

26. Нека $\mathbf{x}^*$ е решение на задачата за минимизация на изпъкнала непрекъснато диференцуема функция $f(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, в изпъкнало множество $X \subset \mathbb{R}^n$. Да се докаже, че множеството от всички решения се състои от тези точки $\mathbf{x} \in X$, за които $\langle \mathbf{x} - \mathbf{x}^*, f'(\mathbf{x}^*) \rangle = 0$, $f'(\mathbf{x}) = f'(\mathbf{x}^*)$.

27. Нека $\mathbf{x}^*$ е решение на задачата за максимум на изпъкнала функция $f(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, в изпъкнало компактно многостенно множество X. Докажете, че съществува крайна точка $\overline{\mathbf{x}} \in X$, в която $f(\overline{\mathbf{x}}) = f(\mathbf{x}^*)$.

28. Нека в задачата на изпъкналото оптимиране

$$\min_{\mathbf{x}\in X} f(\mathbf{x}),$$
$$X := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : g_i(\mathbf{x}) \le 0,\ i = 1, \dots, s,\ h_i(\mathbf{x}) = 0,\ i = s+1, \dots, m\},$$

където $f(\mathbf{x})$, $g_i(\mathbf{x})$, $i = 1, \dots, s$, са изпъкнали, а $h_i(\mathbf{x})$, $i = s+1, \dots, m$, са афинни, за всяко $i \in \{1, \dots, s\}$ съществува точка $\overline{\mathbf{x}}_i \in X$, такава че $g_i(\overline{\mathbf{x}}_i) < 0$. Да се покаже, че за задачата е изпълнено условието на Слейтър.

29. Докажете теорема 6, използвайки теорема 5.

30. Дайте „геометрично" тълкуване на теорема 6.

31. Покажете, че за решението на задачата

$$\min\{f(x) = -x : x \in \mathbb{R},\ ax^2 \le 0\},$$

където a е положителна константа, не са изпълнени необходимите условия на теорема 6. Изяснете защо.

32. Покажете, че за задачата $\max\{f(x) = x^2 : -1 \le x \le 2\}$ точките $x^* = 2$ и $x^{**} = -1$ удовлетворяват достатъчните условия на теорема 6. При все това x^{**} не е решение на задачата. Изяснете защо.

33. При какви условия задачата $\max\{f(\mathbf{x}) = \langle \mathbf{c}, \mathbf{x} \rangle : \mathbf{x} \in X\}$, където $X = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}\}$, има решение ($\mathbf{A}$ е матрица $m \times n$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$, $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$)?

34. Изведете условие, при което произволна точка $\mathbf{x}$ от X, $X = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b},\ \mathbf{x} \ge 0\}$, е решение на задачата $\max\{f(\mathbf{x}) = \langle \mathbf{c}, \mathbf{x} \rangle : \mathbf{x} \in X\}$ ($\mathbf{A}$ е матрица $m \times n$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$, $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$).

35. Докажете, че задачата $\min\{f(\mathbf{x}) = \langle \mathbf{c}, \mathbf{x} \rangle + \langle \mathbf{D}\mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle : \mathbf{x} \in X\}$, където $X \subset \mathbb{R}^n$ е непразно затворено изпъкнало множество, а $\mathbf{D}$ е симетрична положително дефинитна матрица $m \times n$, има винаги решение.

36. Нека в задачата $\min\{f(\mathbf{x}) : \mathbf{x} \in X\}$, където X е изпъкнало подмножество на $\mathbb{R}^n$, а $f(\mathbf{x})$ е изпъкнала функция в X, съществуват точка $\mathbf{z}$ и направление $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$, такива че $\mathbf{z} + \lambda\mathbf{y} \in X$ и $f(\mathbf{z}) > f(\mathbf{z} + \lambda\mathbf{y})$ за всяко $\lambda > 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Покажете дали това условие е необходимо и достатъчно за неограниченост (отдолу) на $f(\mathbf{x})$ в X.

37. Решете задачите:

37.1. $\min\{(x_1 - 2)^2 + (x_2 - 4)^2 : x_1 + x_2 \le 4\}$.

37.2. $\min\left\{\left(x_1 - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(x_2 + \frac{1}{2}\right)^2 : 4x_1 + 2x_2 \le 0,\ x_1 + x_2 = 1,\ x_2 \ge 0\right\}$.

37.3. $\max\{10x_1 + 4x_2 - x_1^2 - x_2^2 : x_1 + x_2 \le 5,\ 7x_1 + 2x_2 \ge 14,\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0\}$.

37.4. $\min\{(x_1-3)^2+(x_2-5)^2 : x_1^2+x_2^2 \le 10,\ x_2-2x_1=5\}$.

37.5. $\min\left\{\left(x_1-\frac{3}{2}\right)^2+(x_2-5)^2 : -x_1+x_2 \le 2,\ 2x_1+3x_2 \le 11,\ x_1,x_2 \ge 0\right\}$.

38. Нека $\mathbf{A}$ е матрица $m \times n$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$. Разглеждаме задачата $\|\mathbf{Ax}-\mathbf{b}\|^2 \to \min$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. Намерете необходимите условия за оптималност на точката $\mathbf{x}^*$. Кога тези условия са достатъчни? Кога имаме единственост на решението?

39. Нека $\mathbf{A}$ е матрица $m \times n$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$. Докажете теоремата на Фаркаш: Разрешима е една и само една от следните две системи:

$$1)\ \mathbf{Ax}=\mathbf{b},\quad \mathbf{x} \ge 0; \qquad 2)\ \mathbf{Ay} \le 0,\quad \langle \mathbf{b},\mathbf{y}\rangle > 0.$$

Упътване. Разгледайте подходяща оптимизационна задача и приложете условията на Кун—Такър.

40. Разглеждаме задачата $\min\{\langle \mathbf{Ax},\mathbf{x}\rangle + \langle \mathbf{b},\mathbf{x}\rangle : \mathbf{x} \in X\}$, където X е изпъкнало и затворено множество, $\mathbf{A}$ е симетрична положително дефинитна матрица $n \times n$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$. Докажете, че решението $\mathbf{x}^*(\mathbf{b})$ удовлетворява условието на Липшиц като функция на параметъра $\mathbf{b}$. Дайте пример, в който $\mathbf{x}^*(\mathbf{b})$ не е диференцуема функция.

41. Разглеждаме общата задача на изпъкналото оптимиране (1). Нека $\psi(\lambda) = \inf\{L(\mathbf{x},\lambda) : x_j \ge 0,\ j \in J_1\}$ ($L(\mathbf{x},\lambda)$ е функцията на Лагранж за задача (1)). Докажете, че ако $\mathbf{x}^*$ е решение на задача (1), то съществува вектор $\boldsymbol{\lambda}^*$, $\lambda_i^* \ge 0$, $i \in I_1$, такъв че

$$f(\mathbf{x}^*) = \psi(\boldsymbol{\lambda}^*) = \max\{\psi(\lambda) : \lambda_i \ge 0,\ i \in I_1\}.$$

Забележка. Задачата $\max\{\psi(\lambda),\ \lambda_i \ge 0,\ i \in I_1\}$ се нарича *двойствена на задача* (1). Твърдението, което формулирахме, може да се изкаже така: ако $\mathbf{x}^*$ е решение на (правата) задача (1), то съществува решение на двойствената задача. При това оптималните стойности на целевите функции на правата и двойствената задача съвпадат.

42. Нека X и Y са непразни изпъкнали компактни множества в $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{R}^m$ съответно и функцията $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ е изпъкнала по $\mathbf{x}$ при фиксирано $\mathbf{y}$ и вдлъбната по $\mathbf{y}$ при фиксирано $\mathbf{x}$.

42.1. Покажете, че $\min\limits_{\mathbf{x}\in X}\max\limits_{\mathbf{y}\in Y} f(\mathbf{x},\mathbf{y}) \ge \max\limits_{\mathbf{y}\in Y}\min\limits_{\mathbf{x}\in X} f(\mathbf{x},\mathbf{y})$. Необходимо ли е предположението за изпъкналост?

42.2. Покажете, че $g(\mathbf{x}) = \max\limits_{\mathbf{y}\in Y} f(\mathbf{x},\mathbf{y})$ е изпъкнала функция, а $\psi(\mathbf{x}) = \max\limits_{\mathbf{x}\in X} f(\mathbf{x},\mathbf{y})$ е вдлъбната функция.

42.3. Докажете, че $\min_{\mathbf{x}\in X}\max_{\mathbf{y}\in Y} f(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \max_{\mathbf{y}\in Y}\min_{\mathbf{x}\in X} f(\mathbf{x},\mathbf{y})$.

43. Нека X е компактно множество в $\mathbb{R}^n$, а f и g_i, $i = 1,\dots,m$, са непрекъснати функции, дефинирани в $\mathbb{R}^n$. Докажете, че функцията

$$\psi(\lambda) = \min\left\{ f(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(\mathbf{x}) : \mathbf{x}\in X \right\}, \quad \lambda_i \in \mathbb{R}, \quad i = 1,\dots,m,$$

е вдлъбната в $\mathbb{R}^m$.

44. Разглеждаме задачата $\max\{-x + y : x + y^2 \le 0,\ x \ge 0\}$. Има ли функцията на Лагранж за тази задача седлова точка? Намерете решението на двойствената задача (вж. забележката към задача 41).

45. Намерете решението на следната задача

$$\max\{2x + 3y + z : x + y + z \le 1,\ x \ge 0,\ y \ge 0,\ z \ge 0\}.$$

Намерете явния вид на двойствената задача (вж. забележката към задача 41) и нейното решение.

46. Нека $\mathbf{H}$ е симетрична положително дефинитна матрица $n \times n$, $\mathbf{A}$ е матрица $m \times n$, $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$. Разглеждаме двете задачи

$$\text{I. } \min\left\{\tfrac{1}{2}\langle \mathbf{Hx},\mathbf{x}\rangle + \langle \mathbf{c},\mathbf{x}\rangle : \mathbf{Ax} \le \mathbf{b}\right\}, \ \text{II. } \min\left\{\tfrac{1}{2}\langle \mathbf{Gv},\mathbf{v}\rangle + \langle \mathbf{h},\mathbf{v}\rangle : \mathbf{v} \ge 0\right\},$$

където $\mathbf{G} = \mathbf{AH}^{-1}\mathbf{A}$, $\mathbf{h} = \mathbf{AH}^{-1}\mathbf{c} + \mathbf{b}$. Да се намерят връзките между условията на Кун—Такър за задачи I и II.

Отговори и решения

1. Нека $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$, $\mathbf{x} \in B$, $\mathbf{y} \in B$. Ще покажем, че за всяко $\lambda \in [0, 1]$ за точката $\mathbf{x}_\lambda = \lambda\mathbf{x} + (1 - \lambda)\mathbf{y}$ е изпълнено $\mathbf{x}_\lambda \in B$. Имаме

$$\begin{aligned}\|\mathbf{x}_\lambda - \mathbf{x}_0\| &= \|\lambda\mathbf{x} + (1-\lambda)\mathbf{y} - \mathbf{x}_0\| = \|\lambda(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) + (1-\lambda)(\mathbf{y} - \mathbf{x}_0)\| \\ &\leq \|\lambda(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)\| + \|(1-\lambda)(\mathbf{y} - \mathbf{x}_0)\| \\ &= \lambda\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| + (1-\lambda)\|\mathbf{y} - \mathbf{x}_0\| \leq \lambda r + (1-\lambda)r = r,\end{aligned}$$

т. е. $\mathbf{x}_\lambda \in B$. За първото неравенство е използвано неравенството на Коши—Буняковски, а за второто — $\mathbf{x} \in B$, $\mathbf{y} \in B$.

2. Изпъкналостта на G следва от равенството

$$\begin{aligned}&\mu[\alpha\mathbf{x} + (1-\alpha)\mathbf{y}] + (1-\mu)[\beta\mathbf{x} + (1-\beta)\mathbf{y}] \\ &\qquad = [(1-\mu)\beta + \mu\alpha]\mathbf{x} + [1 - ((1-\mu)\beta + \mu\alpha)]\mathbf{y},\end{aligned}$$

$\mu \in [0, 1]$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $\beta \in \mathbb{R}$.

3.1. В общия случай — не; например за множеството от рационалните точки върху реалната права условието е изпълнено, но това множество не е изпъкнало.

3.2. Да (докажете).

6. Да предположим, че $\bar{\mathbf{x}}$ не е крайна точка на X. Тогава $\bar{\mathbf{x}}$ може да се представи във вида $\bar{\mathbf{x}} = \frac{1}{2}(\mathbf{v} + \mathbf{w})$, където $\mathbf{v} \in X$, $\mathbf{w} \in X$, $\mathbf{v} \neq \mathbf{w}$. За разстоянието между $\mathbf{y}$ и $\bar{\mathbf{x}}$ имаме

$$\|\mathbf{y} - \bar{\mathbf{x}}\| = \left\|\mathbf{y} - \tfrac{1}{2}(\mathbf{v} + \mathbf{w})\right\| \leq \tfrac{1}{2}\left(\|\mathbf{y} - \mathbf{v}\| + \|\mathbf{y} - \mathbf{w}\|\right) \leq \|\mathbf{y} - \bar{\mathbf{x}}\|.$$

За първото неравенство е използвано неравенството на Коши—Буняковски, а за второто, че $\|\mathbf{y} - \mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{y} - \bar{\mathbf{x}}\|$, $\|\mathbf{y} - \mathbf{w}\| \leq \|\mathbf{y} - \bar{\mathbf{x}}\|$. Получената оценка показва, че двете неравенства трябва да се изпълняват като равенства. За това е необходимо векторите $\mathbf{y} - \mathbf{v}$ и $\mathbf{y} - \mathbf{w}$ да бъдат колинеарни, т. е. $\mathbf{y} - \mathbf{v} = \lambda(\mathbf{y} - \mathbf{w})$ и още $\|\mathbf{y} - \mathbf{w}\| = \|\mathbf{y} - \bar{\mathbf{x}}\|$. Оттук следва $\mathbf{v} = \mathbf{w}$, което противоречи на предположението. Следователно $\bar{\mathbf{x}}$ е крайна.

7. Да вземем произволна точка $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$. Точката $\bar{\mathbf{x}} \in X$, такава че $\max_{\mathbf{x} \in X} \|\mathbf{y} - \mathbf{x}\| = \|\mathbf{y} - \bar{\mathbf{x}}\|$, е крайна (вж. задача 6).

8. X има поне една крайна точка $\overline{\mathbf{x}}$ (вж. задача 7). Най-отдалечената от $\overline{\mathbf{x}}$ точка в X е крайна (вж. задача 6) и е различна от $\overline{\mathbf{x}}$.

10. За произволни $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ от X и произволно $i \in \{1, \dots, m\}$ от изпъкналостта на f_i следва $f_i(\lambda\mathbf{x}+(1-\lambda)\mathbf{y}) \le \lambda f_i(\mathbf{x})+(1-\lambda)f_i(\mathbf{y}) \le 0$, $\lambda \in [0, 1]$. Множеството X е изпъкнало като сечение на краен брой изпъкнали множества.

11.1. Множеството от точки $\mathbf{x}$, за които $f(\mathbf{x})-\alpha \le 0$, е изпъкнало за всяко α (вж. задача 10).

11.2. Например всяка квазиизпъкнала функция (докажете).

Забележка. Функцията f се нарича *квазиизпъкнала* в изпъкналото множество $X \subset \mathbb{R}^n$, ако за произволни $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2 \in X$ и $\lambda \in (0, 1)$ е изпълнено $f(\lambda\mathbf{x}_1 + (1-\lambda)\mathbf{x}_2) \le \max\{f(\mathbf{x}_1), f(\mathbf{x}_2)\}$.

12.1. Да.

12.2. В общия случай не, но когато X_2 е празно или се състои от една точка — да.

13. За произволно $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ векторът $\mathbf{a} = (a_0, a_1, \dots, a_{m+n})$, където $a_0 = f(\mathbf{x})$, $a_i = -f_i(\mathbf{x})$, $i = 1, \dots, m$, $a_{m+j} = x_j$, $j = 1, \dots, n$, принадлежи на A, а векторът $\mathbf{b} = (b_0, b_1, \dots, b_{m+n})$, където $b_0 = f(x^*) + 1$, $b_i = 1$, $i \in I_1$, $b_i = 0$, $i \in I_2$, $b_{m+j} = 0$, $j = 1, \dots, n$, принадлежи на B. Непосредствено се проверява, че никой елемент на A не принадлежи на B (разгледайте случая, когато векторът $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, определящ принадлежността на $\mathbf{a}$ към A, принадлежи на X, и случая, когато $\mathbf{x}$ не принадлежи на X). Множеството B е изпъкнало като сечение на изпъкнали множества. Ако $\mathbf{a}' = (a'_0, \dots, a'_{m+n})$ и $\mathbf{a}'' = (a''_0, \dots, a''_{m+n})$ принадлежат на A, $a'_0 \le f(\mathbf{x})$, $a''_0 \le f(\mathbf{y})$, $a'_i \le f_i(\mathbf{x})$, $a''_i \le f_i(\mathbf{y})$ за $i \in I_1$, $a'_i = -f_i(\mathbf{x})$, $a''_i = -f_i(\mathbf{y})$ за $i \in I_2$, $a'_{m+j} \le x_j$, $a''_{m+j} \le y_j$ за $j \in J$, $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$, то за $\lambda \in (0, 1)$ имаме $\lambda a'_0+(1-\lambda)a''_0 \le f(\lambda\mathbf{x}+(1-\lambda)\mathbf{y})$, $\lambda a'_i+(1-\lambda)a''_i \le -f_i(\lambda\mathbf{x}+(1-\lambda)\mathbf{y})$, $i \in I_1$, $\lambda a'_i + (1-\lambda)a''_i = -f_i(\lambda\mathbf{x} + (1-\lambda)\mathbf{y})$, $i \in I_2$, $\lambda a'_{m+j} + (1-\lambda)a''_{m+j} \le \lambda x_j + (1-\lambda)y_j$, $j \in J$.

14. Нека $\mathbf{z}$ е крайна точка на $X \cap H$. Да допуснем, че $\mathbf{z} = \frac{1}{2}(\mathbf{v} + \mathbf{w})$, $\mathbf{v} \ne \mathbf{w}$, $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in X$. От неравенството $\alpha = \langle \mathbf{a}, \mathbf{z} \rangle = \frac{1}{2} \langle \mathbf{a}, \mathbf{v} + \mathbf{w} \rangle \le \alpha$ следва, че $\mathbf{v} \in H$, $\mathbf{w} \in H$ — противно на допускането, че $\mathbf{z}$ е крайна точка на $X \cap H$. Следователно $\mathbf{z}$ е крайна точка на X.

15. Изпъкналостта на A (съответно B) и изпъкналостта на функцията φ в A (вдлъбнатостта на ψ в B) следват съответно от неравенствата ($\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$, $\lambda \in (0,1)$):

$$\sup_{i\in I}\{f_i(\lambda\mathbf{x} + (1-\lambda)\mathbf{y})\} \le \lambda \sup_{i\in I}\{f_i(\mathbf{x})\} + (1-\lambda)\sup_{i\in I}\{f_i(\mathbf{y})\},$$
$$\inf_{i\in I}\{f_i(\lambda\mathbf{x} + (1-\lambda)\mathbf{y})\} \ge \lambda \inf_{i\in I}\{f_i(\mathbf{x})\} + (1-\lambda)\inf_{i\in I}\{f_i(\mathbf{y})\}.$$

16. При доказателството на необходимостта забележете, че при $k = 2$ условието на задачата съвпада с дефиницията на изпъкнала функция. По-нататък приложете математическа индукция.

18. Тъй като $\alpha_j \ge 0$ и f_j, $j = 1, \dots, n$, са изпъкнали, изпълнено е

$$\sum_{j=1}^{k} \alpha_j f_j(\lambda\mathbf{x}_1 + (1-\lambda)\mathbf{x}_2) \le \sum_{j=1}^{k} \alpha_j[\lambda f_j(\mathbf{x}_1) + (1-\lambda) f_j(\mathbf{x}_2)] \text{ при } \lambda \in (0,1).$$

20. Следва от свойството на функцията максимум

$$\max_{\mathbf{x}}[f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x})] \le \max_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x}) + \max_{\mathbf{x}} g(\mathbf{x})$$

и дефиницията на изпъкнала функция.

22. Нека $\mathbf{x} = \alpha\mathbf{x}' + \beta\mathbf{x}''$, $\alpha + \beta = 1$, $\alpha \ge 0$, $\beta \ge 0$, $\mathbf{x}', \mathbf{x}'' \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{y}', \mathbf{y}'' \in \mathbb{R}^m$. Тогава

$$\begin{aligned}
h(\alpha\mathbf{y}' + \beta\mathbf{y}'') &= \inf_{\mathbf{x}}\{f(\mathbf{x}) : \mathbf{A}\mathbf{x} = \alpha\mathbf{y}' + \beta\mathbf{y}''\} \\
&= \inf_{X',X''}\{f(\alpha\mathbf{x}' + \beta\mathbf{x}'') : \mathbf{A}(\alpha\mathbf{x}' + \beta\mathbf{x}'') = \alpha\mathbf{y}' + \beta\mathbf{y}''\} \\
&\le \inf_{X',X''}\{f(\alpha\mathbf{x}' + \beta\mathbf{x}'') : \mathbf{A}\mathbf{x}' = \mathbf{y}',\ \mathbf{A}\mathbf{x}'' = \mathbf{y}''\} \\
&\le \inf_{X',X''}\{\alpha f(\mathbf{x}') + \beta f(\mathbf{x}'') : \mathbf{A}\mathbf{x}' = \mathbf{y}',\ \mathbf{A}\mathbf{x}'' = \mathbf{y}''\} \\
&= \inf_{X'}\{\alpha f(\mathbf{x}') : \mathbf{A}\mathbf{x}' = \mathbf{y}'\} + \inf_{X''}\{\beta f(\mathbf{x}'') : \mathbf{A}\mathbf{x}'' = \mathbf{y}''\} \\
&= \alpha h(\mathbf{x}') + \beta h(\mathbf{x}'').
\end{aligned}$$

За първото неравенство е използвано, че

$$\{\mathbf{x}', \mathbf{x}'' : \mathbf{A}\mathbf{x}' = \mathbf{y}',\ \mathbf{A}\mathbf{x}'' = \mathbf{y}''\} \subset \{\mathbf{x}', \mathbf{x}'' : \alpha\mathbf{A}\mathbf{x}' + \beta\mathbf{A}\mathbf{x}' = \alpha\mathbf{y}' + \beta\mathbf{y}''\},$$

за второто — изпъкналостта на f.

23.1. От изпъкналостта на $f(\mathbf{x})$ (свойство 1°) имаме $f(\mathbf{x}+\lambda\mathbf{t}) \geq f(\mathbf{x}) + \lambda\langle f'(\mathbf{x}), \mathbf{t}\rangle > f(\mathbf{x})$ за $\lambda > 0$.

23.2. От същото свойство

$$f(\mathbf{x}) = f((\mathbf{x}+\lambda\mathbf{t}) + (-\lambda\mathbf{t})) \geq f(\mathbf{x}+\lambda\mathbf{t}) - \lambda\langle f'(\mathbf{x}+\lambda\mathbf{t}), \mathbf{t}\rangle > f(\mathbf{x}+\lambda\mathbf{t})$$

за достатъчно малки λ. Наистина, $\langle f'(\mathbf{x}+\lambda\mathbf{t}), \mathbf{t}\rangle < 0$ за достатъчно малки λ, тъй като $\langle f'(\mathbf{x}), \mathbf{t}\rangle < 0$ и f' е непрекъсната.

25. *Необходимост.* Нека $\mathbf{x}^*$ е точка на минимум на f в X. Да допуснем, че $\langle f'(\mathbf{x}^*), \mathbf{x}-\mathbf{x}^*\rangle < 0$ за някаква точка $\mathbf{x} \in X$. Тогава (вж. задача 23.2) съществува λ', такова че $f(\mathbf{x}+\lambda(\mathbf{x}-\mathbf{x}^*)) < f(\mathbf{x}^*)$ за всяко $\lambda \in (0, \lambda')$. Но за $\lambda \in (0,1)$ имаме $\mathbf{x}^* + \lambda(\mathbf{x}-\mathbf{x}^*) \in X$ и следователно за $\lambda > 0$, $\lambda \leq \min(1, \lambda')$, горното неравенство противоречи на оптималността на $\mathbf{x}^*$. Следователно $\langle f'(\mathbf{x}^*), \mathbf{x}-\mathbf{x}^*\rangle \geq 0$.

Достатъчност. Нека сега $\langle f'(\mathbf{x}^*), \mathbf{x}-\mathbf{x}^*\rangle \geq 0$ за всяко $\mathbf{x} \in X$. От изпъкналостта на $f(\mathbf{x})$ имаме $f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}^*) \geq \langle f'(\mathbf{x}^*), \mathbf{x}-\mathbf{x}^*\rangle \geq 0$ за всяко $\mathbf{x} \in X$, т. е. $\mathbf{x}^*$ е точка на минимум на f.

26. Да означим с Q множеството

$$Q = \{\mathbf{x} \in X : \langle \mathbf{x}-\mathbf{x}^*, f'(\mathbf{x}^*)\rangle = 0,\ f'(\mathbf{x}) = f'(\mathbf{x}^*)\}.$$

Необходимост. Нека $\mathbf{x}$ е допустима точка и $\mathbf{x} \in Q$. От изпъкналостта на $f(\mathbf{x})$ (свойство 1°) имаме $f(\mathbf{x}^*) - f(\mathbf{x}) \geq \langle \mathbf{x}^*-\mathbf{x}, f'(\mathbf{x})\rangle = \langle \mathbf{x}^*-\mathbf{x}, f'(\mathbf{x}^*)\rangle = 0$. И тъй като $f(\mathbf{x}^*) \leq f(\mathbf{x})$, следва $f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}^*)$.

Достатъчност. Нека сега $\mathbf{x}'$ е решение на задачата, т. е. $\mathbf{x}'$ е допустима и $f(\mathbf{x}') = f(\mathbf{x}^*)$. Ще покажем, че $\mathbf{x}' \in Q$. От изпъкналостта на $f(\mathbf{x})$ следва $f(\mathbf{x}^* + \lambda(\mathbf{x}'-\mathbf{x}^*)) = f(\mathbf{x}^*) = f(\mathbf{x}')$ за $\lambda \in (0,1)$. Тъй като за вектора $\mathbf{t} = \mathbf{x}'-\mathbf{x}^*$ имаме $f(\mathbf{x}^*+\lambda\mathbf{t}) = f(\mathbf{x}^*)$, то (вж. задача 23) $\langle f'(\mathbf{x}^*), t\rangle = 0$, т. е. $\langle \mathbf{x}'-\mathbf{x}^*, f'(\mathbf{x}^*)\rangle = 0$. Остава да покажем, че $f'(\mathbf{x}') = f'(\mathbf{x}^*)$. Разглеждаме функцията $\varphi(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) - \langle \mathbf{x}-\mathbf{x}^*, f'(\mathbf{x}^*)\rangle$. Тя е изпъкнала. При това $\varphi(\mathbf{x}') = \varphi(\mathbf{x}^*)$; $\varphi'(\mathbf{x}^*) = 0$; $\varphi'(\mathbf{x}') = f'(\mathbf{x}') - f'(\mathbf{x}^*)$. Ако допуснем, че $f'(\mathbf{x}') \neq f'(\mathbf{x}^*)$, то $\varphi(\mathbf{x}') \neq 0$, т. е. съществува вектор $\mathbf{t}$, такъв че $\langle \mathbf{t}, \varphi'(\mathbf{x}')\rangle < 0$ и за достатъчно малки $\lambda > 0$ имаме $\varphi(\mathbf{x}'+\lambda\mathbf{t}) < \varphi(\mathbf{x}') = \varphi(\mathbf{x}^*)$. Но $\varphi(\mathbf{x}'+\lambda\mathbf{t}) \geq \varphi(\mathbf{x}^*)$, тъй като $\varphi(\mathbf{x})$ е изпъкнала и има минимум в $\mathbf{x}^*$ поради $\varphi'(\mathbf{x}^*) = 0$. Следователно $f(\mathbf{x}') = f(\mathbf{x}^*)$, т. е. $\mathbf{x}' \in Q$.

27. Нека $\overline{\mathbf{x}}_1, \ldots, \overline{\mathbf{x}}_k$ е множеството от крайните точки на X. Точката $\mathbf{x}^*$ може да се представи във вида (вж. теорема 1): $\mathbf{x}^* = \alpha_1\overline{\mathbf{x}}_1 + \cdots + \alpha_k\overline{\mathbf{x}}_k$, $\alpha_1 +$

$\dots + \alpha_k = 1$, $\alpha_i \ge 0$, $i = 1, \dots, k$. Тъй като $f(\mathbf{x})$ е изпъкнала, имаме $f(\mathbf{x}^*) \le \alpha_1 f(\overline{\mathbf{x}}_1) + \dots + \alpha_k f(\overline{\mathbf{x}}_k) \le M$, където $M = \max\limits_{1 \le i \le k} f(\overline{\mathbf{x}}_i)$. Нека например за $\overline{\mathbf{x}}_s$ имаме $f(\overline{\mathbf{x}}_s) = M$. Тогава $f(\mathbf{x}^*) \le f(\overline{\mathbf{x}}_s)$. И тъй като $f(\mathbf{x}^*) \ge f(\overline{\mathbf{x}}_s)$, то $f(\mathbf{x}^*) = f(\overline{\mathbf{x}}_s)$. Твърдението е вярно за $\overline{\mathbf{x}} = \overline{\mathbf{x}}_s$.

28. Разглеждаме точка $\overline{\mathbf{x}} = \alpha_1 \overline{\mathbf{x}}_1 + \dots + \alpha_k \overline{\mathbf{x}}_k$, $\alpha_i > 0$, $\alpha_1 + \dots + \alpha_k = 1$. За $\overline{\mathbf{x}}$ имаме $\overline{\mathbf{x}} \in X$, $f_i(\overline{\mathbf{x}}) < 0$ за всяко $i = 1, \dots, s$.

29. Положете $L'_{x_j} = v_j$. Тогава $(L'_{x_1}, \dots, L'_{x_n}) = \mathbf{v} = (v_1, \dots, v_n) = v_1 \mathbf{e}_1 + \dots + v_n \mathbf{e}_n$, където $\mathbf{e}_j = (0, \dots, \underset{j}{1}, \dots, 0)$, $j = 1, \dots, n$.

30. $\mathbf{x}^*$ е точка на минимум тогава и само тогава, когато антиградиентът $-f'(\mathbf{x})$ в точка $\mathbf{x}^*$ се съдържа в конуса с образуващи, определени от външните нормали към граничните повърхнини, върху които лежи $\mathbf{x}^*$.

31. Не е изпълнено условието на Слейтър. Условията на теорема 6 в случая не са необходими (те са само достатъчни).

32. Търси се max на изпъкнала функция в изпъкнала област — това не е задача на изпъкналото оптимиране и условията на теорема 6 не са достатъчни (те са само необходими).

33. Ако $X \ne \emptyset$ и системата $\mathbf{c} = \mathbf{A}\mathbf{u}$ е съвместима.

34. Съвместимост на системата $\mathbf{c} = \mathbf{A}\mathbf{u}$.

35. Покажете, че $\lim\limits_{\|\mathbf{x}\| \to \infty} f(\mathbf{x}) = \infty$, и използвайте следствието от теорема 1 (Вайерщрас), гл. 1.

36. Условието очевидно е необходимо, но не е достатъчно — например за задачата $\min\{f(x) = e^{-x} : x \in \mathbb{R},\ x \ge 0\}$ неравенството е изпълнено за $y = 1$ и например $z = 0$, но $f(x) \ge 0$.

37.1. $\mathbf{x}^* = (1, 3)$, $f^* = 2$.

37.2. $\mathbf{x}^* = (-1, 2)$, $f^* = \dfrac{17}{2}$.

37.3. $\mathbf{x}^* = (4, 1)$, $f^* = 27$.

37.4. $\mathbf{x}^* = (-1, 3)$, $f^* = 20$.

37.5. $\mathbf{x}^* = (1, 3)$, $f^* = \dfrac{17}{4}$.

Глава 3

Линейно оптимиране

§ 1. Задача на линейното оптимиране. Свойства

Задачата на линейното оптимиране (ЛО) може да се запише в следния вид:

Търси се максимумът (минимумът) на функцията

$$l(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \tag{1}$$

при ограничения (условия):

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i, \qquad i = 1, \dots, s, \tag{2}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, \qquad i = s+1, \dots, m, \tag{3}$$

$$x_j \ge 0, \qquad j = 1, \dots, p \quad (p \le n). \tag{4}$$

Функцията (1) се нарича *целева функция* (*критерий*). Променливите, на които не е наложено условие за неотрицателност, се наричат *свободни променливи*. В случая такива са $x_{p+1}, \dots, x_n$.

План на задачата (*допустима точка*) се нарича всяко решение $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ на системата (2)–(4). *Множеството от плановете* на задачата (*допустимото множество*) е множеството P от всички решения на (2)–(4). P е изпъкнало затворено многостенно множество.

Определение 1. *Опорен план* (*крайна точка*, *екстремна точка*) се нарича план, чиито компоненти удовлетворяват като равенства r, $r \geq n$, от ограниченията (2)–(4) и сред тях има n линейно независими. Всеки опорен план е крайна точка (връх) на *множеството от планове* P. Опорният план е *неизроден* при $r = n$ и *изроден* при $r > n$. Задачата на ЛО е *изродена*, ако има поне един изроден опорен план.

Ръб на множеството от плановете се нарича съвкупност от всички планове, които удовлетворяват като равенства $n-1$ едни и същи линейно независими ограничения от (2)–(4). Геометрично ръбовете са отсечки (*ограничени ръбове*) или лъчи и прави (*неограничени ръбове*) в $\mathbb{R}^n$. Ръбовете са *оптимални*, ако точките им са решения на задачата (1)–(4).

Определение 2. *Решение* на задачата (*оптимален план*) е план, за който целевата функция (1) достига максимума (минимума) си. *Опорно решение* (опорен оптимален план) е оптимален план на задачата, който е и неин опорен план.

Теорема 1. Задачата на ЛО има решение (е разрешима) тогава и само тогава, когато множеството ѝ от планове P не е празно ($P \neq \emptyset$) и целевата функция е ограничена отгоре (отдолу) в P.

Теорема 2. Всяка разрешима задача на ЛО, която има опорни планове, има поне един опорен оптимален план.

Теорема 3. Опорните планове на задачата на ЛО са краен (включително и нулев) брой.

Теорема 4. Необходимо и достатъчно условие задачата на ЛО да има опорни планове е системата ограничения (2)–(4) да е съвместима ($P \neq \emptyset$) и да има ранг n.

Теорема 5. Множеството P^* от решенията на задачата на ЛО е изпъкнало и затворено многостенно множество. Ако $\mathbf{x}^1, \dots, \mathbf{x}^s$ са опорни решения на задачата, а $\mathbf{p}^1, \dots, \mathbf{p}^k$ — направляващи вектори на неограничени оптимални ръбове (по един за всеки ръб), то

$$\overline{P} = \left\{ \mathbf{x} \,\middle|\, \mathbf{x} = \sum_{i=1}^{s} \lambda_i \mathbf{x}^i + \sum_{j=1}^{k} \mu_j \mathbf{p}^j \right\} \subset P^* \tag{5}$$

при $\lambda_i \geq 0$, $i = 1, \dots, s$, $\sum\limits_{i=1}^{s} \lambda_i = 1$, $\mu_j \geq 0$, $j = 1, \dots, k$. В частност, ако $\mathbf{x}^1, \dots, \mathbf{x}^s$ са всичките опорни решения и $\mathbf{p}^1, \dots, \mathbf{p}^k$ са направляващите вектори на всичките неограничени оптимални ръбове на множеството P, то $\overline{P} = P^*$.

Пример 1. Да се реши задачата

$$l(\mathbf{x}) = 10x_1 + 4x_2 + 5x_3 \to \max,$$

$$
\begin{aligned}
&(6) \qquad && 2x_1 + x_2 + x_3 = 4,\\
& && -3x_1 - x_2 - x_3 \le 2,\\
&(7) \qquad && x_1,\ x_2,\ x_3 \ge 0.
\end{aligned}
$$

Решение. Системата ограничения е съвместима — един план на задачата е например $\bar{\mathbf{x}} = (0, 0, 4)$. От (7) и първото условие в (6) следва $0 \le x_j \le 4$, $j = 1, 2, 3$, т. е. множеството от плановете (6)–(7) е ограничено и функцията $l(\mathbf{x})$ е ограничена отгоре (и отдолу) в него. Системата (6)–(7) има ранг 3, следователно задачата е разрешима и има опорни планове. Ще ги намерим, като решим всички подсистеми от по 3 уравнения:

1) $\left|\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + x_3 &= 4\\ -3x_1 - x_2 - x_3 &= 2\\ x_1 \qquad\qquad &= 0, \end{aligned}\right.$ несъвместима;

2) $\left|\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + x_3 &= 4\\ -3x_1 - x_2 - x_3 &= 2\\ x_2 \qquad &= 0, \end{aligned}\right.$ $\bar{\mathbf{x}} = (-6, 0, 16)$;

3) $\left|\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + x_3 &= 4\\ -3x_1 - x_2 - x_3 &= 2\\ x_3 &= 0, \end{aligned}\right.$ $\bar{\mathbf{y}} = (-6, 16, 0)$;

4) $\left|\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + x_3 &= 4\\ x_1 \qquad\qquad &= 0\\ x_2 \qquad &= 0, \end{aligned}\right.$ $\bar{\mathbf{z}} = (0, 0, 4)$;

5) $\left|\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + x_3 &= 4\\ x_1 \qquad\qquad &= 0\\ x_3 &= 0, \end{aligned}\right.$ $\bar{\mathbf{u}} = (0, 4, 0)$;

6) $\left|\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + x_3 &= 4\\ x_2 \qquad &= 0\\ x_3 &= 0, \end{aligned}\right.$ $\bar{\mathbf{v}} = (2, 0, 0)$.

Точките $\bar{\mathbf{x}}$ и $\bar{\mathbf{y}}$ не са планове на задачата — те не удовлетворяват условията (7). За опорните планове $\bar{\mathbf{z}}$, $\bar{\mathbf{u}}$, $\bar{\mathbf{v}}$ имаме $l(\bar{\mathbf{z}}) = 20$, $l(\bar{\mathbf{u}}) = 16$, $l(\bar{\mathbf{v}}) = 20$, следователно $l^* = 20$. Задачата има две опорни решения $\bar{\mathbf{z}}$ и $\bar{\mathbf{v}}$ и съгласно теорема 5, всички решения на задачата са точките от отсечката $\overline{\bar{\mathbf{z}}\bar{\mathbf{v}}}$: $\mathbf{x} = \lambda_1\bar{\mathbf{z}} + \lambda_2\bar{\mathbf{v}} = (2\lambda_2, 0, 4\lambda_1)$; $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$, $\lambda_1 \ge 0$, $\lambda_2 \ge 0$.

Задачи

1. Проверете дали зададените вектори са опорни планове на съответните множества и ако са — установете дали са изродени:

1.1. $\left|\begin{aligned} &x_1 - x_2 \ge 1\\ &x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0, \end{aligned}\right.$ $\bar{\mathbf{x}} = (1, 0)$;

1.2. $\left|\begin{aligned} &x_1 - x_2 \le 1\\ &x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0, \end{aligned}\right.$ $\bar{\mathbf{x}} = (0, 0)$;

1.3. $\left|\begin{array}{l} x_1 - x_2 + 4x_3 - 2x_4 \ge 2 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 + 4x_4 \le 3 \\ x_j \ge 0,\ j = 1,\dots,4, \end{array}\right.$ $\quad \bar{\mathbf{x}} = (0,0,1,1)$, $\bar{\mathbf{y}} = \left(\frac{14}{13}, 0, \frac{3}{13}, 0\right)$;

1.4. $\left|\begin{array}{l} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 - x_5 \le 2 \\ -x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 2 \\ x_j \ge 0,\ j = 1,\dots,5, \end{array}\right.$ $\quad \bar{\mathbf{x}} = (4,0,0,0,2)$, $\bar{\mathbf{y}} = \left(1,0,0,\frac{3}{7},\frac{5}{7}\right)$, $\bar{\mathbf{z}} = (0,1,1,0,0)$, $\bar{\mathbf{u}} = (0,2,0,0,0)$;

1.5. $\left|\begin{array}{l} x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 \le 3 \\ x_1 + x_2 - x_3 + x_4 \le 1 \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 \le 1 \\ x_j \ge 0,\ j = 1,\dots,4, \end{array}\right.$ $\quad \bar{\mathbf{x}} = (0,0,0,1)$, $\bar{\mathbf{y}} = (1,1,1,0)$;

1.6. $\left|\begin{array}{l} -2x_1 + 3x_2 + x_3 = 9 \\ 2x_1 + 5x_2 + x_4 = 31 \\ 3x_1 - x_2 + x_5 = 21 \\ x_j \ge 0,\ j = 1,\dots,5, \end{array}\right.$ $\quad \bar{\mathbf{x}} = (4,0,17,23,9)$, $\bar{\mathbf{y}} = (3,5,0,0,17)$, $\bar{\mathbf{z}} = (0,0,9,31,21)$, $\bar{\mathbf{u}} = (1,1,8,24,19)$;

1.7. $\left|\begin{array}{l} -x_1 + x_2 + 4x_3 + x_5 = 12 \\ 2x_1 + x_3 + x_4 + x_5 = 12 \\ x_j \ge 0,\ j = 1,\dots,5, \end{array}\right.$ $\quad \bar{\mathbf{x}} = (0,12,0,12,0)$, $\bar{\mathbf{y}} = (5,9,2,0,0)$, $\bar{\mathbf{z}} = (4,0,4,0,0)$, $\bar{\mathbf{u}} = (6,18,0,0,0)$, $\bar{\mathbf{v}} = (0,0,3,9,0)$, $\bar{\mathbf{w}} = (0,0,0,0,12)$.

2. Като използвате теореми 2, 4 и 5, намерете всички решения на задачите:

2.1. $l(\mathbf{x}) = x_1 - 4x_2 + 5x_3 \to \min$,
$$2x_1 + x_2 + x_3 = 4,\quad x_1 - x_2 - x_3 \le 2,\quad x_j \ge 0,\ j = 1,2,3;$$

2.2. $l(\mathbf{x}) = x_1 - x_2 + x_3 \to \max$,
$$10x_1 + x_3 \le 10,\quad 10x_2 + x_3 \le 10,\quad x_j \ge 0,\ j = 1,2,3;$$

2.3. $l(\mathbf{x}) = x_1 + x_2 \to \max$,
$$-1 \le x_1 + x_2 \le 1,\quad -1 \le -x_1 + x_2 \le 1;$$

2.4. $l(\mathbf{x}) = 4x_1 + x_2 \to \max(\min)$,
$$-x_1 + x_2 \le 1,\quad x_2 \ge 1,\quad -1 \le x_1 \le 10;$$

2.5. $l(\mathbf{x}) = x_1 + 2x_2 + \cdots + nx_n \to \max(\min)$,

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n \leq n,$$
$$x_j \geq 0, \; j = 1, \ldots, n;$$

2.6. $l(\mathbf{x}) = ax_1 + ax_2 + \cdots + ax_n \to \max$,

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = n,$$
$$x_j \geq 0, \; j = 1, \ldots, n;$$

2.7. $l(\mathbf{x}) = ax_1 + bx_2 + cx_3 \to \max$,

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = n,$$
$$x_j \geq 0, \; j = 1, \ldots, n.$$

3. Дайте пример за линейна функция $l(\mathbf{x})$, ограничена отгоре в изпъкнало затворено множество Q, която не достига максимума си в него.

4. Дайте пример за нелинейна функция $F(\mathbf{x})$, ограничена отгоре в изпъкнало многостенно множество P, която не достига максимума си в него.

5. Докажете, че ако множеството от планове (2)–(4) е ограничено и непразно, то има поне един опорен план.

6. Докажете, че задачата

$$l(\mathbf{x}) = \langle \mathbf{c}, \mathbf{x} \rangle \to \max,$$
$$P : \begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i, & i = 1, \ldots, m, \\ \qquad x_j \geq 0, & j = 1, \ldots, n, \end{cases}$$

има решение, ако $b_i \geq 0$, $i = 1, \ldots, m$, и съществува индекс k, $1 \leq k \leq m$, такъв че $a_{kj} > 0$ за $j = 1, \ldots, n$.

7. За задачата $\max\{z(\mathbf{x}) = \langle \mathbf{c}, \mathbf{x} \rangle : \mathbf{x} \in P\}$ докажете, че:

а) има решение за всяко $\mathbf{c}$, ако P е многостен;

б) ако P е изпъкнало многостенно множество и задачата има решение за всяко $\mathbf{c}$, то P е многостен.

8. Докажете, че задачата на ЛО (1)–(4) има решение, ако множеството от плановете ѝ не е празно и векторът $\mathbf{c} = (c_1, \ldots, c_n)$ е линейна комбинация на редовете на матрицата $\mathbf{A} = (a_{ij})_{m \times n}$, т. е.

$$\mathbf{c} = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \mathbf{a}_{i*}, \quad \lambda_i \geq 0, \quad i = 1, \ldots, s, \text{ където } \mathbf{a}_{i*} = (a_{i1}, \ldots, a_{in}).$$

9. Покажете, че ако $P \subset \mathbb{R}^n$ е произволно многостенно изпъкнало множество (различно от $\mathbb{R}^n$), то винаги може да се намери вектор $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$, за който задачата $\max\{\langle \mathbf{c}, \mathbf{x}\rangle : \mathbf{x} \in P\}$ има решение.

10. Докажете, че има решение задачата

$$l(\mathbf{x}) = x_1 + 2x_2 + \cdots + nx_n \to \max,$$

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + \cdots + x_n &\le n, \\ x_2 + \cdots + x_n &\le n-1, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_n &\le 1, \\ x_j \ge 0,\ j = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

11. Докажете, че задачата $\max\{\langle \mathbf{c}, \mathbf{x}\rangle : \mathbf{x} \in P\}$, $P = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}\}$, има решение тогава и само тогава, когато $P \ne \emptyset$ и $\mathbf{c}$ е линейна комбинация на редовете на матрицата $\mathbf{A} = (a_{ij})_{m\times n}$, т. е.

$$\mathbf{c} = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \mathbf{a}_{i*}, \quad \text{където} \quad \mathbf{a}_{i*} = (a_{i1}, \dots, a_{in}).$$

12. Докажете, че ако $\mathbf{x}^*$ е крайна точка на множеството от оптималните планове P^* на задачата на ЛО (1)–(4), то $\mathbf{x}^*$ е крайна точка и на множеството от планове P.

13. Определете рецесивния конус на множеството (2)–(4).

Забележка. *Рецесивен конус* на множеството $X \subset \mathbb{R}^n$ се нарича множеството

$$K(X) = \{\mathbf{z} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{x} + \lambda\mathbf{z} \in X, \text{ за } \mathbf{x} \in X,\ \lambda \ge 0\}.$$

14. Докажете, че задачите

$$l(x) = \langle \mathbf{c}, \mathbf{x}\rangle \to \max, \qquad\qquad l(\mathbf{x}) = \langle \mathbf{c}, \mathbf{x}\rangle \to \max,$$

$$P : \begin{cases} \mathbf{A}\mathbf{x} \le \mathbf{b}^1, \\ \mathbf{x} \ge \mathbf{0}; \end{cases} \qquad\qquad P : \begin{cases} \mathbf{A}\mathbf{x} \le \mathbf{b}^2, \\ \mathbf{x} \ge \mathbf{0}, \end{cases}$$

са едновременно разрешими и неразрешими, ако $\mathbf{b}^1 \ge \mathbf{0}$, $\mathbf{b}^2 \ge \mathbf{0}$.

§ 2. Двумерна задача на ЛО. Геометричен метод за решаване

Задачата на ЛО има просто геометрично тълкуване в двумерното пространство. При $n = 2$ тя има вида:

$$l(x) = c_1x_1 + c_2x_2 \to \max(\min), \tag{8}$$

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 \leq b_i, \quad i = 1, \ldots, m. \tag{9}$$

Ако има условия за неотрицателност на x_1 и x_2, те са включени в (9).

Нека в равнината е фиксирана координатна система x_1Ox_2. Множеството от планове P на задачата е сечението на полуравнините (9). То е изпъкнало, затворено многоъгълно множество и може да бъде празно (системата (9) е несъвместима), ограничено (изпъкнал многоъгълник) и неограничено. Когато P е ограничено, контурът му се състои само от отсечки (ограничени ръбове), а когато е неограничено, той съдържа още и лъчи или прави (неограничени ръбове на P).

Ако $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$, $\mathbf{c} = (c_1, c_2)$ и Oc е директрисата на вектора $\mathbf{c}$, разглеждана като числова ос с посока $\mathbf{c}$, то $l(\mathbf{x}) = \langle \mathbf{c}, \mathbf{x} \rangle = \lambda_{\mathbf{x}'} \|\mathbf{c}\|$, където $\mathbf{x}'$ е проекцията на $\mathbf{x}$ върху Oc, а $\lambda_{\mathbf{x}'}$ — алгебричната мярка на вектора $\mathbf{x}'$. Тук и навсякъде подолу дадена точка и нейният радиус-вектор се означават еднакво.

Задача (8)–(9) може да се изкаже геометрично така: търси се точка $\mathbf{x} \in P$, чийто вектор-проекция $\mathbf{x}'$ върху оста Oc има най-голяма (най-малка) алгебрична мярка $\lambda_{\mathbf{x}'}$. Задачата може да се реши така:

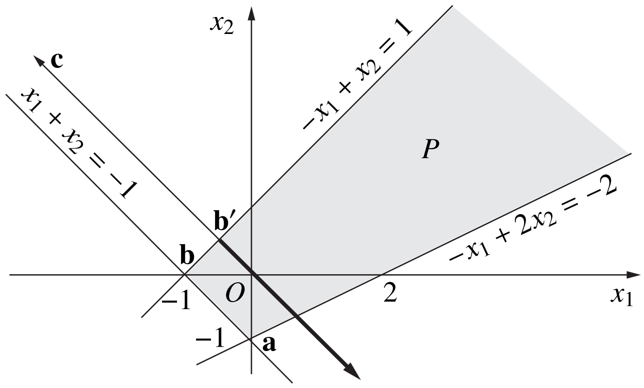
1. Построява се множеството от планове P на задачата. Ако $P = \emptyset$, задачата няма решение.

2. Построяват се векторът $\mathbf{c} = (c_1, c_2)$ и директрисата му Oc. Проектира се множеството P върху оста Oc. Проекцията P' на P е отсечка (ако P е ограничено), лъч или права.

3. Определят се точките, чиито проекции имат максимална (минимална) алгебрична мярка — те са решение на задачата:

- ако P' е отсечка, това са точките, чиито проекции съвпадат с втория (първия) край на отсечката — задачата има решение при търсене на максимум и на минимум;
- ако P' е лъч, еднопосочен (противоположен) на вектора $\mathbf{c}$, алгебричните мерки на проекциите растат (намаляват) неограничено в P и задачата за търсене на максимум (минимум) няма решение (фиг. 1). Точките, чиито проекции съвпадат с началната точка на лъча, имат най-малка (най-голяма) алгебрична мярка на проекцията си и са решение на задачата за минимум (максимум);
- ако P' е права, алгебричните мерки на проекциите растат и намаляват неограничено отгоре и отдолу в P' и задачата няма решение при търсене и на максимум, и на минимум.

Забележка. В общия случай задачата на ЛО (1)–(4) може да бъде сведена до двумерната задача (8)–(9) и да бъде решена геометрично, ако сред



Фиг. 1

уравненията (3) има r линейно независими и $n - r \leq 2$ (вж. пример 2).

Пример 2. Да се реши геометрично задачата

$$l(\mathbf{x}) = x_2 - x_3 + x_4 \to \max(\min), \tag{10}$$

$$\begin{aligned} -x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 &\leq 4, \\ 3x_2 - x_3 - x_4 &= -3, \\ -x_1 - x_2 + x_3 &= 1, \\ x_3 \geq 0,\ x_4 &\geq 0. \end{aligned} \tag{11}$$

Решение. Тук $n = 4$ и $r = 2$, което позволява да изразим две от промен-ливите чрез другите две и така да сведем задачата до двумерния случай:

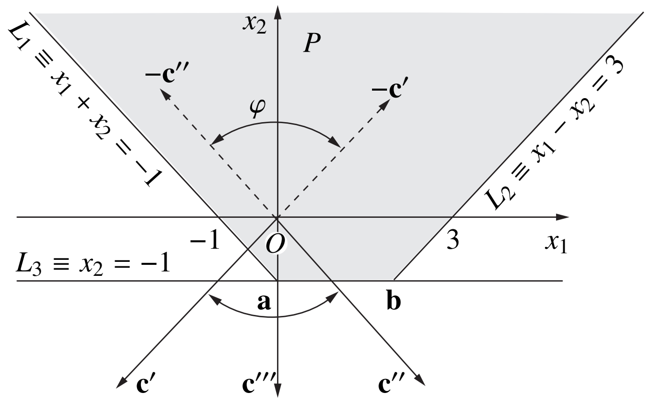
$$\begin{aligned} x_4 &= -x_1 + 2x_2 + 2, \\ x_3 &= x_1 + x_2 + 1. \end{aligned} \tag{12}$$

Заместваме x_3, x_4 в (10), (11) и получаваме двумерната задача

$$\bar{l}(\mathbf{x}) = -2x_1 + 2x_2 + 1 \to \max(\min),$$

$$P : \begin{cases} -x_1 + x_2 \leq 1, \\ x_1 + x_2 \geq -1, \\ -x_1 + 2x_2 \geq -2. \end{cases}$$

Множеството от планове на задачата е дадено на фиг. 1. То има два върха $\mathbf{a} = (0, -1)$ и $\mathbf{b} = (-1, 0)$. Константата в целевата функция е без значение при търсенето на точките, в които функцията достига максимум или минимум. Тя се взема предвид при пресмятане стойността на функцията след намирането на тези точки.



Фиг. 2

Построяваме вектора $\mathbf{c} = (-2, 2)$ и оста Oc и проектираме множеството P върху нея (фиг. 1). Множеството от проекциите на точките от P е лъч с начало точката $\mathbf{b}'$. На фиг. 1 той е начертан по-плътно. Точката $\mathbf{b}'$ е проекция на върха $\mathbf{b}$ и на всички точки от неограничения ръб, излизащ от $\mathbf{b}$. Тъй като $\mathbf{b}'$ има най-голяма алгебрична мярка (Oc е числова ос), то точките от този неограничен ръб са решения на задачата при търсене на максимум. В частност решение е върхът $\mathbf{b} = (-1, 0)$. Общият вид на решенията е $\overline{\mathbf{x}}^{\lambda} = \mathbf{b} + \lambda\mathbf{p} = (\lambda - 1, \lambda)$, където $\mathbf{p} = (1, 1)$ е направляващ вектор на ръба и $\lambda \geq 0$, т. е. двумерната задача има безбройно много решения $\overline{\mathbf{x}}^{\lambda}$ и $l^* = 3$. Изходната задача има също безбройно много решения $\mathbf{x}^{\lambda} = (\lambda - 1, \lambda, 2\lambda, 3 + \lambda)$, $\lambda \geq 0$, където последните две компоненти са пресметнати от (12).

При търсене на минимум задачата няма решение: алгебричните мерки намаляват неограничено, следователно целевата функция е неограничена отдолу в P ($l^* = -\infty$).

Пример 3. Да се изследва при какви стойности на ъгъла между оста Ox_1 и вектора $\mathbf{c} = (c_1, c_2)$ задачата за намиране на максимум (минимум) на функцията

$$l(\mathbf{x}) = c_1x_1 + c_2x_2,$$

$$P : \begin{cases} x_1 + x_2 \geq -1 \\ x_1 - x_2 \leq 3 \\ \phantom{x_1 + {}} x_2 \geq -1 \end{cases}$$

има решение.

Решение. Множеството P (фиг. 2) е неограничено с върхове $\mathbf{a} = (0, -1)$ и $\mathbf{b} = (2, -1)$. Неограничени ръбове на P са лъчите съответно с начало точките

a и **b**. Ако векторът $\mathbf{c} = (c_1, c_2)$ сключва остър ъгъл с някой от неограничените ръбове, алгебричните мерки на проекциите ще растат неограничено, т. е. $l(\mathbf{x})$ ще е неограничена отгоре в множеството P. На фиг. 2 са дадени двете гранични положения за вектора **c**, при които задачата има решение: при $\mathbf{c} \equiv \mathbf{c}'$ $\sphericalangle(Ox_1, \mathbf{c}') = \frac{5}{4}\pi$ и при $\mathbf{c} \equiv \mathbf{c}''$ $\sphericalangle(Ox_1, \mathbf{c}'') = \frac{7}{4}\pi$. Векторите $\mathbf{c}'$ и $\mathbf{c}''$ са съответно перпендикулярни на правите L_1, L_2 и сочат навън от множеството P.

Задачата за максимум има решение за $\sphericalangle(Ox_1, \mathbf{c}') \in \left[\frac{5}{4}\pi, \frac{7}{4}\pi\right]$. При $\mathbf{c} \equiv \mathbf{c}'$ ($\mathbf{c}_1 = \mathbf{c}_2 < 0$) решения са всички точки $\mathbf{x}^\lambda = (-\lambda, \lambda - 1)$, $\lambda \geq 0$, от лъча с начало точката **a** и направляващ вектор $(-1, 1)$ и $l^* = -c_2$. При $\mathbf{c} \equiv \mathbf{c}''$ ($c_1 = -c_2 > 0$) решения са всички точки $\mathbf{x}^\lambda = (2 + \lambda, \lambda - 1)$, $\lambda \geq 0$, от лъча с начало точката **b** и направляващ вектор $(1, 1)$ и $l^* = 3c_1$. При $\mathbf{c} \equiv \mathbf{c}'''$ ($c_1 = 0$, $c_2 < 0$) решения са всички точки $\mathbf{x}^\lambda = \lambda\mathbf{a} + (1 - \lambda)\mathbf{b} = (2 - 2\lambda, -1)$ на отсечката **ab** и $l^* = -c_2$. Когато $\sphericalangle(Ox_1, c) \in \left[\frac{5}{4}\pi, \frac{3}{2}\pi\right]$, решение е само върхът **a**. Когато $\sphericalangle(Ox_1, c) \in \left[\frac{3}{2}\pi, \frac{7}{4}\pi\right]$, решение е само върхът **b**.

Аналогични разсъждения показват, че при търсене на минимум трябва да се вземат вектори, перпендикулярни на неограничените ръбове, но сочещи навътре в множеството P — в нашия случай това са векторите $-\mathbf{c}'$ и $-\mathbf{c}''$, начертани на фиг. 2 с пунктир. Задачата за минимум има решение при $\sphericalangle(Ox_1, c) \in \left[\frac{1}{4}\pi, \frac{3}{4}\pi\right]$.

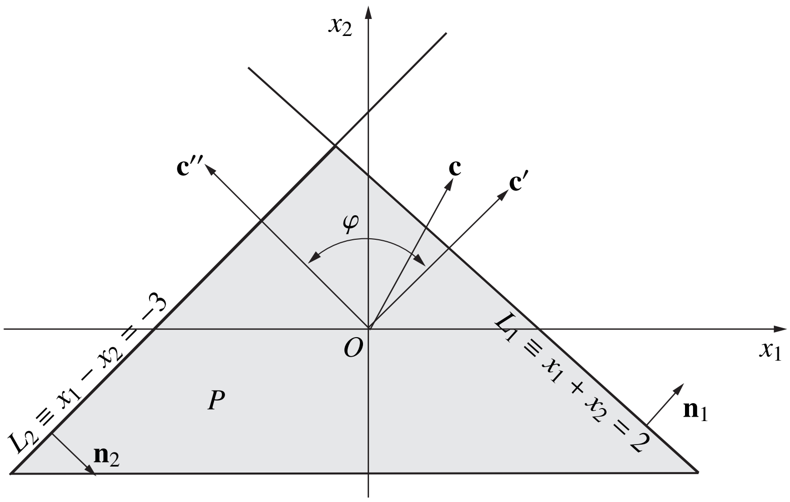
Пример 4. За кои стойности на параметъра λ има решение задачата:

$$l(\mathbf{x}) = \lambda x_1 + 2x_2 \to \max,$$
$$P : \begin{cases} x_1 + x_2 \leq 2 \\ x_1 - x_2 \geq -3. \end{cases}$$

Решение. Множеството P е дадено на фиг. 3. Построяваме векторите $\mathbf{c}'$ и $\mathbf{c}''$, съответно перпендикулярни на неограничените ръбове и сочещи навън от множеството P. Задачата има решение, когато векторът $\mathbf{c} = (\lambda, 2)$ се мени от $\mathbf{c}'$ до $\mathbf{c}''$ в ъгъла φ. Векторът $\mathbf{c}'$ е еднопосочен с нормалния вектор $\mathbf{n}_1 = (1, 1)$ на правата L_1 и при $\mathbf{c} \equiv \mathbf{c}'$ ще имаме $\mathbf{c}' = k\mathbf{n}_1$, $k > 0$. Векторът $\mathbf{c}''$ е противоположен на нормалния вектор $\mathbf{n}_2 = (1, -1)$ на правата L_2 и при $\mathbf{c} \equiv \mathbf{c}''$ получаваме $\mathbf{c}'' = -k\mathbf{n}_2$, $k > 0$, откъдето $\mathbf{c}'' = (-2, 2)$. Следователно задачата има решение за $-2 \leq \lambda \leq 2$.

Задачи

1. Решете геометрично следващите задачи за намиране на максимум и минимум на функцията $l(\mathbf{x})$. Намерете всички решения.



Фиг. 3

1.1. $l(\mathbf{x}) = 2x_1 + x_2,$

$$\begin{aligned} -x_1 + 3x_2 &\le 3, \\ 2x_1 + 3x_2 &\le 12, \\ 2x_1 - x_2 &\le 6, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 &\ge 0; \end{aligned}$$

1.2. $l(\mathbf{x}) = x_2,$

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\ge 1, \\ 3x_1 &\ge -6, \\ 2x_1 - x_2 &\le 4, \\ x_2 &\ge 0; \end{aligned}$$

1.3. $l(\mathbf{x}) = 3(x_2 - x_1),$

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 &\le 0, \\ x_1 - x_2 &\ge -1, \\ x_1 + x_2 &\ge 1; \end{aligned}$$

1.4. $l(\mathbf{x}) = x_1,$

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 &\le 0, \\ -x_1 + x_2 &\le 1, \\ x_1 + x_2 &\ge 1; \end{aligned}$$

1.5. $l(\mathbf{x}) = x_1 - x_2 + x_3,$

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 &\ge 4, \\ x_1 - x_4 &= 4, \\ x_2 + x_3 &= 1, \\ x_1 + x_4 &\le 2, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 &\ge 0; \end{aligned}$$

1.6. $l(\mathbf{x}) = x_1 + 2x_2 - x_3,$

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 5, \\ x_1 + 3x_3 &\ge 3, \\ -4x_1 + x_3 &\le 4, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 &\ge 0; \end{aligned}$$

1.7. $l(\mathbf{x}) = 2x_1 - 2x_2,$

$$\begin{aligned} -x_1 + x_2 &\le 1, \\ x_1 - x_2 &\le 1; \end{aligned}$$

1.8. $l(\mathbf{x}) = x_1 - x_2 + x_3,$

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 &= 3, \\ x_1 - 4x_2 + x_3 &= -2, \\ x_j \ge 0,\ j = 1, \ldots, 4&; \end{aligned}$$

1.9. $l(\mathbf{x}) = x_1 + 2x_2 + \cdots + nx_n,$

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n &= n, \\ x_2 + x_3 + \cdots + x_n &= n - 1, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_{n-2} + x_{n-1} + x_n &= 3, \\ x_j \geq 0, \ j = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

2. Определете границите на изменение на ъгъла α, който трябва да сключва векторът $\mathbf{c} = (c_1, c_2)$ с абсцисната ос Ox_1, за да има функцията $l(\mathbf{x}) = c_1x_1 + c_2x_2$ максимум (минимум) в дадените по-долу множества. Определете общия вид на всички решения при търсене на максимум в зависимост от α.

2.1. $\left| \begin{array}{l} x_1 + x_2 \leq 0 \\ x_1 \leq 0 \\ x_2 \leq 1; \end{array} \right.$ **2.2.** $\left| \begin{array}{l} x_1 - x_2 \leq 1 \\ x_1 \leq 1 \\ x_2 \geq -1; \end{array} \right.$ **2.3.** $\left| \begin{array}{l} x_1 + x_2 \leq 1 \\ 0 \leq x_2 \leq 1; \end{array} \right.$

2.4. $\left| \begin{array}{l} x_1 + x_2 \geq 0 \\ x_1 - x_2 \geq 0; \end{array} \right.$ **2.5.** $\left| \begin{array}{l} x_1 - x_2 \geq 0 \\ x_1 + x_2 \geq 1 \\ x_2 \geq 0; \end{array} \right.$ **2.6.** $\left| \begin{array}{l} x_1 + x_2 \leq 1 \\ x_2 \geq 1. \end{array} \right.$

3. За дадените множества P и функцията $l(\mathbf{x}) = c_1x_1 + c_2x_2$ определете:

а) границите на изменение на ъгъла α между абсцисната ос Ox_1 и вектора $\mathbf{c} = (c_1, c_2)$, за който $l(\mathbf{x})$ е неограничена едновременно отгоре и отдолу в P;

б) c_1 и c_2 така, че $l(\mathbf{x})$ да достига максимума си в два върха на P; намерете общия вид на решенията.

3.1. $P : \begin{cases} x_1 + x_2 \geq 4 \\ -x_1 + x_2 \leq 5 \\ x_2 \geq 0; \end{cases}$ **3.2.** $P : \begin{cases} x_1 - x_2 \leq -2 \\ -x_1 - x_2 \leq 4 \\ x_1 - 2x_2 \leq -4. \end{cases}$

4. Намерете стойностите на параметъра a, за които следващите задачи имат решение. В задачи 4.4 и 4.6 определете при кои стойности на a множеството, определено от ограниченията, е празно.

4.1. $l(\mathbf{x}) = ax_1 - 2x_2 \to \max,$

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 &\leq 3, \\ 2x_1 + 3x_2 &\geq 0, \\ x_2 &\geq -1; \end{aligned}$$

4.2. $l(\mathbf{x}) = ax_1 - 2x_2 \to \max,$

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\leq 2, \\ x_1 - x_2 &\leq 1; \end{aligned}$$

4.3. $l(\mathbf{x}) = 2x_1 + x_2 \to \max,$

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 &\le 4,\\ x_1 - x_2 &\le 6,\\ ax_1 + x_2 &\le 3,\\ x_1 \ge 0,\ x_2 &\ge 0; \end{aligned}$$

4.4. $l(\mathbf{x}) = x_1 + 2x_2 \to \max,$

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 &\ge 9,\\ x_1 - 3x_2 &\le 1,\\ ax_1 - x_2 &\le -2;\\ x_1 \ge 0,\ x_2 &\ge 0; \end{aligned}$$

4.5. $l(\mathbf{x}) = x_1 + 2x_2 - 3x_3 \to \min,$

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 &= 1,\\ 2x_1 + ax_2 + x_3 &= 2,\\ x_3 &\ge 0; \end{aligned}$$

4.6. $l(\mathbf{x}) = x_1 - x_2 \to \min,$

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\le a,\\ 0 \le x_1 &\le 1,\\ x_2 &\ge 0. \end{aligned}$$

5. Определете за кои стойности на параметъра a функцията $l(\mathbf{x}) = x_1 + ax_2$ има максимална стойност нула в множеството

$$P := \{\mathbf{x} = (x_1, x_2) : x_1 + x_2 \le 0,\ x_1 \le 0,\ x_2 \le 1\}$$

и намерете всички решения.

6. Решете задачата за посочените стойности на параметъра a:

6.1. $l(\mathbf{x}) = ax_1 - x_2 \to \min,$

$$\begin{aligned} x_1 - 3x_2 &\ge -7,\\ x_1 + x_2 &\le 5,\\ x_1 - x_2 &\ge -1,\\ a \in \left[\tfrac{1}{3}, +\infty\right); \end{aligned}$$

6.2. $l(\mathbf{x}) = ax_1 - x_2 \to \max,$

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\ge 4,\\ x_1 - 3x_2 &\le 5,\\ x_1 - 2x_2 &\le 6,\\ a \in \left(-\infty, \tfrac{1}{3}\right]. \end{aligned}$$

7. За кои стойности на параметъра a:

а) решението остава в един и същ връх на P;

б) задачата няма решение;

в) задачата има безбройно много решения?

7.1. $l(\mathbf{x}) = 2x_1 + ax_2 \to \max,$

$$P : \begin{cases} -x_1 + x_2 \le 3\\ 3x_1 - x_2 \le 15\\ x_1 + 2x_2 \le 12\\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0; \end{cases}$$

7.2. $l(\mathbf{x}) = -x_1 + ax_2 \to \max,$

$$P : \begin{cases} -x_1 + x_2 \le 2\\ x_1 - 2x_2 \le 3\\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

8. Съставете задачи на ЛО, които да имат едно от следните свойства (с P и $l(\mathbf{x})$ са отбелязани съответно множеството от планове и целевата функция):

а) задачата има единствено решение;

б) задачата има безбройно много решения;

в) $l(\mathbf{x}) \to +\infty$ в P, но задачата за минимум на $l(\mathbf{x})$ в P има единствено решение;

г) $l(\mathbf{x}) \to -\infty$ и $l(\mathbf{x}) \to +\infty$ в P;

д) $P = \emptyset$;

е) $l(\mathbf{x}) \to -\infty$ в P, но задачата за максимум на $l(\mathbf{x})$ в P има безбройно много решения.

9. Решете задачи 1 и 4 от § 1, гл. 10.

§ 3. Канонична задача на ЛО. Опорни планове на КЗ

Каноничната задача (КЗ) служи обикновено като изходна форма за прилагане на методите за решаване на задачите на ЛО. Задачата на ЛО в каноничен вид (канонична форма) е:

$$l(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \min, \tag{13}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, \quad i = 1, \dots, m, \tag{14}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, n. \tag{15}$$

При означения $\mathbf{A} = (a_{ij})_{m \times n}$, $\mathbf{b} = (b_1, \dots, b_m)$, $\mathbf{c} = (c_1, \dots, c_n)$, $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ тя се записва така:

$$\min\{l(\mathbf{x}) = \langle \mathbf{c}, \mathbf{x} \rangle : \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b},\ \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}, \tag{16}$$

а с помощта на стълбовете $\mathbf{a}^j = (a_{1j}, \dots, a_{mj})^{\mathrm{T}}$ на матрицата $\mathbf{A} = (\mathbf{a}^1 \mid \cdots \mid \mathbf{a}^n)$ — във векторен вид:

$$\max\left\{ l(\mathbf{x}) = \langle \mathbf{c}, \mathbf{x} \rangle \,\middle|\, \sum_{j=1}^{n} \mathbf{a}^j x_j = \mathbf{b},\ \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \right\}. \tag{17}$$

Теорема 6. Ако множеството от планове на КЗ не е празно, тя има опорни планове.

Общата задача на ЛО (1)–(4) може да се приведе в каноничен вид по следния начин (виж пример 5):

1) Всяко неравенство от (2) се заменя с двойката условия

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + x_{n+i} = b_i, \quad x_{n+i} \geq 0, \quad i = 1, \dots, s.$$

Променливите x_{n+i}, $i = 1, \dots, s$, се наричат *допълнителни променливи*.

2) Всяка свободна променлива x_j, $j = p+1, \dots, n$, се представя като разлика на две неотрицателни променливи: $x_j = x'_j - \xi$, $x'_j \geq 0$, $\xi \geq 0$.

3) Задачата за минимум на функцията (1) се преобразува в задача за максимум на функцията $\bar{l}(\mathbf{x}) = -l(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{n}(-c_j)x_j$.

Навсякъде по-долу се предполага $m < n$ и $\operatorname{rank}\mathbf{A} = m$, т. е. уравненията (14) са линейно независими.

Вектори на условията на КЗ се наричат векторите-стълбове $\mathbf{a}^1, \dots, \mathbf{a}^n$ на матрицата $\mathbf{A}$.

Определение 3. *Опорен план* на КЗ е план, на чиито положителни компоненти съответстват линейно независими вектори на условията. Опорният план е *неизроден*, ако има точно m положителни компоненти, и *изроден* — в противен случай. Всеки опорен план е крайна точка на множеството от планове на КЗ.

Определение 4. *Базис* на опорния плат $\bar{\mathbf{x}} = (\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)$ на КЗ се нарича съвкупност от m линейно независими вектора на условията $\{\mathbf{a}^{s_1}, \dots, \mathbf{a}^{s_m}\}$, която включва всички $\mathbf{a}^{s_i}$, съответстващи на положителните компоненти $\bar{\mathbf{x}}_{s_i} > 0$ на $\bar{\mathbf{x}}$. Базиса на $\bar{\mathbf{x}}$ означаваме с $\mathbf{B}_{\bar{\mathbf{x}}} = \{\mathbf{a}^{s_1}, \dots, \mathbf{a}^{s_m}\}$ или $\mathbf{B}_{\bar{\mathbf{x}}} = \{x_{s_1}, \dots, x_{s_m}\}$. Векторите $\mathbf{a}^{s_1}, \dots, \mathbf{a}^{s_m}$ се наричат *базисни вектори*, променливите $x_{s_1}, \dots, x_{s_m}$ — *базисни компоненти* на $\bar{\mathbf{x}}$. Ако опорният план $\bar{\mathbf{x}}$ е неизроден, той има точно един базис и $\bar{x}_{s_i} > 0$, $i = 1, \dots, m$. Ако е изроден, той може да има повече от един базис. Базисните му компоненти със стойност нула се наричат още *базисни нули*. *Базисна матрица* на опорния план $\bar{\mathbf{x}}$ е матрицата от базисните му вектори $\mathbf{B} = \{\mathbf{a}^{s_1} \mid \cdots \mid \mathbf{a}^{s_m}\}$ (тя е неособена).

Ако компонентите на $\bar{\mathbf{x}}$, $\mathbf{x}$, $\mathbf{c}$ и стълбовете на матрицата $\mathbf{A}$ се разместят така, че

$$\bar{\mathbf{x}} = (\bar{\mathbf{x}}^B, \bar{\mathbf{x}}^N) = (\bar{\mathbf{x}}^B, \mathbf{0}),\ \mathbf{x} = (\mathbf{x}^B, \mathbf{x}^N),\ \mathbf{c} = (\mathbf{c}^B, \mathbf{c}^N),\ \mathbf{A} = (\mathbf{B} \mid \mathbf{A}_N), \tag{18}$$

където $\bar{\mathbf{x}}^B = (\bar{x}_{s_1}, \dots, \bar{x}_{s_m})$, $\mathbf{x}^B = (x_{s_1}, \dots, x_{s_m})$, $\mathbf{c}^B = (c_{s_1}, \dots, c_{s_m})$, а $\mathbf{x}^N$, $\mathbf{c}^N$ са вектори съответно от небазисните променливи и коефициентите пред тях в $l(\mathbf{x})$, а $\mathbf{A}_N$ — матрицата от съответните небазисни вектори на условията, то каноничната задача (16) се записва така:

$$\begin{aligned} &l(\mathbf{x}) = \left\langle \mathbf{c}^B, \mathbf{x}^B \right\rangle + \left\langle \mathbf{c}^N, \mathbf{x}^N \right\rangle \to \max, \\ &\mathbf{B}\mathbf{x}^B + \mathbf{A}_N\mathbf{x}^N = \mathbf{b}, \quad \mathbf{x} = (\mathbf{x}^B, \mathbf{x}^N) \geq \mathbf{0}. \end{aligned} \tag{19}$$

След като се реши спрямо $\mathbf{x}^B$ системата уравнения

$$\mathbf{x}^B + \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}_N\mathbf{x}^N = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$$

и се означат

$$\boldsymbol{\beta} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}, \quad \boldsymbol{\alpha}_N = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}_N, \tag{20}$$

може да се определи $\mathbf{x}^B = \boldsymbol{\beta} - \boldsymbol{\alpha}_N \mathbf{x}^N$ и да се изключи от $l(\mathbf{x})$ в (19):

$$l(\mathbf{x}) = \left\langle \mathbf{c}^B, \boldsymbol{\beta} \right\rangle + \left\langle \mathbf{c}^N - \mathbf{c}^B \boldsymbol{\alpha}_N, \mathbf{x}^N \right\rangle = \Delta_0 + \left\langle \boldsymbol{\Delta}^N, \mathbf{x}^N \right\rangle,$$

където

$$\Delta_0 = \left\langle \mathbf{c}^B, \boldsymbol{\beta} \right\rangle, \quad \boldsymbol{\Delta}^N = \mathbf{c}^N - \mathbf{c}^B \boldsymbol{\alpha}_N. \tag{21}$$

Така каноничната задача се преобразува във вида

$$l(\mathbf{x}) = \Delta_0 + \left\langle \boldsymbol{\Delta}^N, \mathbf{x}^N \right\rangle, \tag{22}$$

$$\mathbf{x}^B + \boldsymbol{\alpha}_N \mathbf{x}^N = \boldsymbol{\beta}, \tag{23}$$

$$\mathbf{x} = (\mathbf{x}^B, \mathbf{x}^N) \geq \mathbf{0}. \tag{24}$$

В него $\boldsymbol{\beta} \geq \mathbf{0}$, понеже $\overline{\mathbf{x}}^N = \mathbf{0}$ и $\overline{\mathbf{x}}^B = \boldsymbol{\beta}$, т. е. $\overline{\mathbf{x}} = (\boldsymbol{\beta}, \mathbf{0})$ и $l(\overline{\mathbf{x}}) = \Delta_0$.

Определение 5. *Базисен вид* (*базисно представяне*) *на каноничната задача* (16) спрямо опорния план $\overline{\mathbf{x}}$ с базисна матрица $\mathbf{B}$ се нарича представянето ѝ във вида (22)–(24) при означенията (18), (20), (21).

Каноничната задача има толкова базисни представяния спрямо даден опорен план, колкото базиса (съответно базисни матрици) има той.

Определение 6. *Базисен вид* (*базисно представяне*) *на системата линейни уравнения* (14) се нарича всяко нейно представяне, в което тя е решена спрямо m от променливите и десните ѝ страни са неотрицателни.

Във всеки базисен вид (22)–(24) на каноничната задача спрямо даден опорен план $\overline{\mathbf{x}}$ системата уравнения (23) е в базисен вид — тя е решена спрямо базисните променливи $x_{s_1}, \ldots, x_{s_m}$ и $\boldsymbol{\beta} \geq 0$.

Обратно, всяко базисно представяне на системата уравнения (14) определя един опорен план на задачата. Намирането на всички опорни планове на каноничната задача (13)–(15) е еквивалентно с намирането на всички базисни представяния на системата (14). За целта трябва да се образуват всички неособени подматрици $\mathbf{B}$ от ред m на матрицата $\mathbf{A}$ и да се приведе системата (14) във вида (23), където компоненти на $\mathbf{x}^B$ са променливите, съответстващи на стълбовете на матрица $\mathbf{B}$. Тогава, ако $\boldsymbol{\beta} \geq \mathbf{0}$, то $\overline{\mathbf{x}} = (\boldsymbol{\beta}, \mathbf{0})$ е опорен план на задачата, в противен случай $\overline{\mathbf{x}}$ не е план — не удовлетворява условията (15).

Забележка. Понятието опорен план е свързано само с множеството от планове на КЗ, затова в някои задачи по-нататък се задава само множеството от планове на задачата и се използва терминът „опорен план на множество“.

Пример 5. Да се приведе в каноничен вид задачата

$$\min\{l(\mathbf{x}) = 2x_1 - x_2 + x_3, x_1 - 2x_2 + x_3 \ge -3, 5x_1 - 8x_3 = 10, 3x_2 - 2x_3 \le 8, x_3 \ge 0\}.$$

Решение. Първото и третото ограничение преобразуваме в уравнения, като въведем съответно допълнителните променливи x_4, x_5, а за свободните променливи x_1, x_2 положим $x_1 = x'_1 - \xi$, $x_2 = x'_2 - \xi$. Заместваме в целевата функция и ограниченията:

$$\begin{array}{l} l(\mathbf{x}) = 2(x'_1 - \xi) - (x'_2 - \xi) + x_3 \to \min, \\ x'_1 - \xi \; - 2(x'_2 - \xi) + \; x_3 - x_4 \qquad = -3, \\ 5(x'_1 - \xi) \qquad\qquad - 8x_3 \qquad\quad = 10, \\ \qquad\qquad 3(x'_2 - \xi) - 2x_3 \quad + x_5 = \;\; 8, \\ x'_1, x'_2, \xi, x_3, x_4, x_5 \ge 0. \end{array}$$

Като преминем към търсене на максимум и направим приведение, получаваме окончателно

$$\begin{array}{l} \bar{l}(\mathbf{x}) = -2x'_1 + x'_2 + \xi - x_3 \to \max, \\ x'_1 - 2x'_2 + \; \xi + \; x_3 - x_4 \qquad = -3, \\ 5x'_1 \qquad - 5\xi - 8x_3 \qquad\quad = 10, \\ \qquad 3x'_2 - 3\xi - 2x_3 \quad + x_5 = \;\; 8, \\ x'_1, x'_2, \xi, x_3, x_4, x_5 \ge 0. \end{array}$$

Пример 6. Да се провери дали $\overline{\mathbf{x}} = (9, 3, 0, 0)$ и $\overline{\mathbf{y}} = (0, 0, 0, 3)$ са опорни планове на каноничната задача

$$l(\mathbf{x}) = x_1 - 2x_2 - x_3 + 3x_4, \tag{25}$$

$$\begin{array}{rl} x_1 - \;\; x_2 - 2x_3 + 2x_4 &= 6, \\ -x_1 + 3x_2 \qquad\qquad\quad &= 0, \end{array} \tag{26}$$

$$x_j \ge 0, \;\; j = 1, \dots, 4, \tag{27}$$

и да се приведе задачата в базисен вид спрямо всичките базиси на тези планове.

Решение. Векторите $\overline{\mathbf{x}}$ и $\overline{\mathbf{y}}$ удовлетворяват (26) и (27) и понеже $\det(\mathbf{a}^1 \mid \mathbf{a}^2) = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} \ne 0$, то $\{\mathbf{a}^1, \mathbf{a}^2\}$ и $\{\mathbf{a}^4\}$ са съвкупности от линейно независими вектори на условията, т. е. $\bar{\mathbf{x}}$ и $\bar{\mathbf{y}}$ са опорни планове. Неизроденият опорен план $\bar{\mathbf{x}}$ има единствен базис $\mathbf{B}_{\bar{\mathbf{x}}} = \{\mathbf{a}^1, \mathbf{a}^2\}$ и системата (26), решена спрямо базисните му променливи x_1 и x_2, е:

$$\left| \begin{array}{rrrrrrr} x_1 & & - 3x_3 & + & 3x_4 & = & 9, \\ & x_2 & - x_3 & + & x_4 & = & 3. \end{array} \right.$$

Определяме x_1 и x_2 оттук и заместваме в (25):

$$l(\mathbf{x}) = (9 + 3x_3 - 3x_4) - 2(3 + x_3 - x_4) - x_3 + 3x_4 = 3 + 2x_4.$$

Базисният вид на задачата спрямо $\bar{\mathbf{x}}$ е:

$$\begin{array}{rl} & l(\mathbf{x}) = 3 + 2x_4, \\ (28) & x_1 \phantom{{}-x_2} - 3x_3 + 3x_4 = 9, \\ & x_2 - x_3 + x_4 = 3, \\ & x_j \geq 0, \ j = 1, \ldots, 4. \end{array}$$

В него $\mathbf{x}^B = (x_1, x_2)$, $\mathbf{x}^N = (x_3, x_4)$, $\boldsymbol{\beta} = (9, 3)$, $\Delta_0 = 3$, $\boldsymbol{\Delta}^N = (0, 2)$, $\boldsymbol{\alpha} = \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ и $l(\bar{\mathbf{x}}) = \Delta_0 = 3$. Изроденият опорен план $\bar{\mathbf{y}}$ има два базиса: $\mathbf{B}^1_{\bar{\mathbf{y}}} = \{\mathbf{a}^1, \mathbf{a}^4\}$ и $\mathbf{B}^2_{\bar{\mathbf{y}}} = \{\mathbf{a}^2, \mathbf{a}^4\}$ (векторите $\mathbf{a}^3$ и $\mathbf{a}^4$ са линейно зависими). Базисният вид на задачата спрямо тях съответно е

$$\begin{array}{rll} & l(\mathbf{x}) = 9 - 2x_2 + 2x_3, & l(\mathbf{x}) = 9 - \frac{2}{3}x_1 + 2x_3, \\ (29) & x_1 - 3x_2 \phantom{{}- x_3 + x_4} = 0, & -\frac{1}{3}x_1 + x_2 \phantom{{}- x_3 + x_4} = 0, \\ & x_2 - x_3 + x_4 = 3, & \frac{1}{3}x_1 \phantom{{}+ x_2} - x_3 + x_4 = 3, \\ & x_j \geq 0, \ j = 1, \ldots, 4, & x_j \geq 0, \ j = 1, \ldots, 4. \end{array}$$

При първия базис базисната нула е x_1, а при втория — x_2. В първото базисно представяне $\mathbf{x}^B = (x_1, x_4)$, $\mathbf{x}^N = (x_2, x_3)$, $\boldsymbol{\beta} = (0, 3)$, $\Delta_0 = 9$, $\boldsymbol{\Delta}^N = (-2, 2)$, $\boldsymbol{\alpha} = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, а при второто — $\mathbf{x}^B = (x_2, x_4)$, $\mathbf{x}^N = (x_1, x_3)$, $\boldsymbol{\beta} = (0, 3)$, $\Delta_0 = 9$, $\boldsymbol{\Delta}^N = \left(-\frac{2}{3}, 2\right)$, $\boldsymbol{\alpha} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{3} & -1 \end{pmatrix}$. И в двата случая $l(\bar{\mathbf{y}}) = \Delta_0 = 9$.

Пример 7. Намерете всички опорни планове на множеството (26)–(27).

Решение. Всички възможни базиси (съответните подматрици са неособени) са: $\{\mathbf{a}^1, \mathbf{a}^2\}$, $\{\mathbf{a}^1, \mathbf{a}^3\}$, $\{\mathbf{a}^1, \mathbf{a}^4\}$, $\{\mathbf{a}^2, \mathbf{a}^3\}$, $\{\mathbf{a}^2, \mathbf{a}^4\}$. Системата (26) решаваме спрямо съответните базисни променливи: за x_1, x_2 се получава системата (28) — намерен е опорният план $\bar{\mathbf{x}} = (9, 3, 0, 0)$; за x_1, x_4 и x_2, x_4 се получават съответно системите уравнения в (29), които определят един и същ опорен план $\bar{\mathbf{y}} = (0,0,0,3)$; за x_2, x_3 и x_1, x_3 се получават съответно системите:

$$\left|\begin{array}{rcrcrcrcr} -\frac{1}{3}x_1 & + & x_2 & & & & & = & 0, \\ -\frac{1}{3}x_1 & & & + & x_3 & - & x_4 & = & -3; \end{array}\right. \qquad \left|\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & - & 3x_2 & & & & & = & 0, \\ & - & x_2 & + & x_3 & - & x_4 & = & -3; \end{array}\right.$$

чието решение $(0,0,-3,0)$ не е план на задачата, защото не удовлетворява (27).

Задачи

1. Приведете в каноничен вид следните задачи:

1.1. $x_1 - x_5 \to \min,$

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcr} -4x_1 & + & 3x_2 & - & 2x_3 & + & x_4 & & & \le & 8, \\ x_1 & - & 2x_2 & + & 3x_3 & - & 4x_4 & & & \ge & 1, \\ x_1 & + & x_2 & - & 2x_3 & & & + & x_5 & = & 3; \end{array}$$

1.2. $x_1 + x_2 + \dots + x_n \to \max,$

$$\begin{array}{l} x_1 + x_2 \le 1, \\ \quad x_2 + x_3 \le 1, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \qquad x_{n-1} + x_n \le 1; \end{array}$$

1.3. $\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max,$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, \quad i = 1, \dots, m,$$
$$0 \le x_j \le d_j, \quad j = 1, \dots, n.$$

1.4. $\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \min,$

$$b_i \le \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le d_i, \quad i = 1, \dots, m.$$

2. Симетричната задача на ЛО

$$\min\left\{\sum_{j=1}^{n} c_j x_j : \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i,\ i = 1, \dots, m,\ x_j \ge 0,\ j = 1, \dots, n\right\}$$

се привежда в каноничен вид след въвеждане на допълнителните промениви $x_{n+1}, x_{n+2}, \dots, x_{n+m}$. Получава се каноничната задача:

$$\max\left\{\sum_{j=1}^{n} c_j x_j : \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + x_{n+i} = b_i,\ i = 1,\dots,m,\ x_j \ge 0,\ j = 1,\dots,n+m\right\}.$$

Нека $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$, $\mathbf{y} = (x_{n+1}, \dots, x_{n+m})$. Да се докаже, че ако $(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*)$ е решение на каноничната задача, то $\mathbf{x}^*$ е решение на изходната симетрична задача.

3. Общата задача на ЛО (1)–(4) се свежда към следната канонична задача:

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^{p} c_j x_j + \sum_{j=p+1}^{n} c_j(x'_j - \xi) \to \min,\\
&\sum_{j=1}^{p} a_{ij} x_j + \sum_{j=p+1}^{n} a_{ij}(x'_j - \xi) + x_{n+i} = b_i, \quad i = 1,\dots,s,\\
&\sum_{j=1}^{p} a_{ij} x_j + \sum_{j=p+1}^{n} a_{ij}(x'_j - \xi) = b_i, \quad i = s+1,\dots,m,\\
&\xi \ge 0,\ x_j \ge 0,\ j = 1,\dots,p,\ x'_k \ge 0,\ k = p+1,\dots,n,\ x_{n+i} \ge 0,\ i = 1,\dots,s.
\end{aligned}$$

Да се докаже, че ако $\widetilde{\mathbf{x}} = (\overline{x}_1, \dots, \overline{x}_p, \overline{x}'_{p+1}, \dots, \overline{x}'_n, \overline{\xi}, \overline{x}_{n+1}, \dots, \overline{x}_{n+m})$ е решение на каноничната задача, то $\overline{\mathbf{x}} = (\overline{x}_1, \dots, \overline{x}_p, \overline{x}'_{p+1} - \overline{\xi}, \dots, \overline{x}'_n - \overline{\xi})$ е решение на изходната задача (1)–(4).

4. Като използвате определение 4, проверете кои от зададените вектори са опорни планове на съответните канонични задачи и посочете изродените между тях.

4.1. $\left|\begin{aligned} x_1 - x_2 + 4x_3 - 2x_4 &= 2\\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 + 4x_4 &= 3\\ x_j \ge 0,\ j = 1,\dots,4, \end{aligned}\right.$
$\overline{\mathbf{x}} = (0, 0, 1, 1)$,
$\overline{\mathbf{y}} = (\frac{14}{13}, 0, \frac{3}{13}, 0)$;

4.2. $\left|\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 &= 3\\ x_1 + x_2 - x_3 + x_4 &= 1\\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 &= 1\\ x_j \ge 0,\ j = 1,\dots,4, \end{aligned}\right.$
$\overline{\mathbf{x}} = (0, 0, 0, 1)$,
$\overline{\mathbf{y}} = (1, 1, 1, 0)$;

4.3. $\left|\begin{aligned} &x_1 - x_2 = 1\\ &x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0, \end{aligned}\right.$
$\overline{\mathbf{x}} = (1, 0)$;

4.4. $\left|\begin{aligned} &x_1 - x_2 = 0\\ &x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0, \end{aligned}\right.$
$\overline{\mathbf{x}} = (0, 0)$.

5. Намерете всички базиси на опорните планове на дадените множества и съответстващия им базисен вид на системата уравнения:

5.1. $\left|\begin{array}{l} 3x_1 + 2x_2 = 1 \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0, \end{array}\right.$
$\overline{\mathbf{x}} = (0, \frac{1}{2}),\ \overline{\mathbf{y}} = (\frac{1}{3}, 0);$

5.2. $\left|\begin{array}{l} x_1 + x_2 = 2 \\ x_1 - x_2 = 0 \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0, \end{array}\right.$
$\overline{\mathbf{x}} = (1, 1);$

5.3. $\left|\begin{array}{l} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 \qquad\ \ - x_3 = 0 \\ x_j \geq 0,\ j = 1, 2, 3, \end{array}\right.$
$\overline{\mathbf{x}} = (\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}),\ \overline{\mathbf{y}} = (0, 1, 0);$

5.4. $\left|\begin{array}{l} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ x_j \geq 0,\ j = 1, 2, 3, \end{array}\right.$
$\overline{\mathbf{x}} = (0, 0, 0);$

5.5. По условието на зад. 4.1;

5.6. По условието на зад. 4.2.

6. Намерете опорните планове, като използвате дадените им базиси:

6.1. $\left|\begin{array}{l} 2x_1 + x_2 = 2 \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0, \end{array}\right.$
$\mathbf{B}_{\overline{\mathbf{x}}} = \{x_2\},\ \mathbf{B}_{\overline{\mathbf{y}}} = \{x_1\};$

6.2. $\left|\begin{array}{l} 2x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 - 4x_5 = 11 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + x_5 - 3x_6 = -2 \\ x_j \geq 0,\ j = 1, \ldots, 6, \end{array}\right.$
$\mathbf{B}_{\overline{\mathbf{x}}} = \{x_1, x_3\},\ \mathbf{B}_{\overline{\mathbf{y}}} = \{x_2, x_3\},\ \mathbf{B}_{\overline{\mathbf{z}}} = \{x_3, x_4\};$

6.3. $\left|\begin{array}{l} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 15 \\ 2x_1 + x_2 + 5x_3 = 20 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 10 \\ x_j \geq 0,\ j = 1, \ldots, 4, \end{array}\right.$
$\mathbf{B}_{\overline{\mathbf{x}}} = \{x_1, x_2, x_3\},\ \mathbf{B}_{\overline{\mathbf{y}}} = \{x_2, x_3, x_4\};$

6.4. $\left|\begin{array}{l} x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_5 = 7, \\ \quad - 2x_2 + 4x_3 + x_4 = 12, \\ \quad - 4x_2 + 3x_3 + 8x_5 + x_6 = 10, \\ x_j \geq 0,\ j = 1, \ldots, 6, \end{array}\right.$
$\mathbf{B}_{\overline{\mathbf{x}}} = \{x_1, x_4, x_6\},\ \mathbf{B}_{\overline{\mathbf{y}}} = \{x_1, x_3, x_6\},\ \mathbf{B}_{\overline{\mathbf{z}}} = \{x_2, x_3, x_6\}.$

7. Докажете, че $\max\{f(\mathbf{x}) : \mathbf{x} \in Q\} = -\min\{-f(\mathbf{x}) : \mathbf{x} \in Q\}$ за произволна функция $f(\mathbf{x})$ и множество Q.

8. Докажете теорема 6. Намерете горна граница на броя на опорните планове на задача (13)–(15).

9. Докажете, че ако $\widetilde{\mathbf{x}} = (\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_{n+m})$ с компоненти $\overline{x}_j \geq 0$, $j =$

$1, \ldots, n$, и $\overline{x}_j = 0$, $j = n+1, \ldots, n+m$, е опорен план на множеството

$$\widetilde{P} : \begin{cases} \displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + x_{n+i} = b_i, & i = 1, \ldots, m, \\ x_j \geq 0, & j = 1, \ldots, n+m, \end{cases}$$

то $\overline{\mathbf{x}} = (\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_n)$ е опорен план на множеството

$$P : \begin{cases} \displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, & i = 1, \ldots, m, \\ x_j \geq 0, & j = 1, \ldots, n. \end{cases}$$

10. Докажете, че каноничната задача (13)–(15) има решение, ако множеството ѝ от планове не е празно и векторът $\mathbf{c} = (c_1, \ldots, c_n)$ е линейна комбинация на редовете на матрицата $\mathbf{A}$, т. е. $\mathbf{c} = \sum\limits_{i=1}^{m} \lambda_i \mathbf{a}_{i*}$, където $\mathbf{a}_{i*} = (a_{i1}, \ldots, a_{in})$. На колко е равен минимумът на функцията?

11. Ако $l_1^* = \max\left\{\left\langle \mathbf{c}^1, \mathbf{x} \right\rangle : \mathbf{x} \in P\right\}$ и $l_2^* = \max\left\{\left\langle \mathbf{c}^2, \mathbf{x} \right\rangle : \mathbf{x} \in P\right\}$, където $P = \{\mathbf{x} : \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b},\ \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}$, докажете, че $l^* = \max\left\{\left\langle \mathbf{c}^1 + \mathbf{c}^2, \mathbf{x} \right\rangle : \mathbf{x} \in P\right\} \leq l_1^* + l_2^*$.

12. При означенията на задача 11 дайте пример, за който $l^* < l_1^* + l_2^*$.

13. Нека $l_1^* = \max\{\langle \mathbf{c}, \mathbf{x} \rangle : \mathbf{x} \in P_1\}$ и $l_2^* = \max\{\langle \mathbf{c}, \mathbf{x} \rangle : \mathbf{x} \in P_2\}$, където $P_1 = \{\mathbf{x} : \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}^1,\ \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}$, $P_2 = \{\mathbf{x} : \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}^2,\ \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}$. Докажете, че

$$l^* = \max\{\langle \mathbf{c}, \mathbf{x} \rangle : \mathbf{x} \in P_{12}\} \geq l_1^* + l_2^*,$$

където $P_{12} = \{\mathbf{x} : \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}^1 + \mathbf{b}^2,\ \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}$.

14. При означенията на задача 13 дайте пример, за който $l^* > l_1^* + l_2^*$.

15. Докажете, че ако множествата от планове на две канонични задачи от вида (16) са непразни и се различават само по вектора $\mathbf{b}$, те са едновременно разрешими или неразрешими.

16. Докажете, че ако множеството $K_{\mathbf{b}}$, състоящо се от всички $\mathbf{b}$, за които задача 16 има решение при фиксирани $\mathbf{A}$ и $\mathbf{c}$, е изпъкнал конус (предполага се $K_{\mathbf{b}} \neq \emptyset$) с връх в началото на координатната система.

17. Може ли множеството $K_{\mathbf{b}}$ (вж. зад. 16) да се състои от една точка — точката $K_{\mathbf{b}} = \{\mathbf{b}_0\}$?

18. Докажете, че множеството $K_{\mathbf{c}}$, състоящо се от всички $\mathbf{c}$, за които задача (16) има решение при фиксирани $\mathbf{A}$ и $\mathbf{b}$, е изпъкнал конус с връх в началото на координатната система.

19. $l^*(\mathbf{c}) = \max\{\langle \mathbf{c}, \mathbf{x}\rangle : \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b},\ \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}$ е функция на $\mathbf{c}$ при фиксирани $\mathbf{A}$ и $\mathbf{b}$. Докажете, че тази функция е определена и изпъкнала в множеството $K_{\mathbf{c}}$ (вж. зад. 18).

20. $l^*(\mathbf{b}) = \max\{\langle \mathbf{c}, \mathbf{x}\rangle : \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b},\ \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}$ е функция на $\mathbf{b}$ при фиксирани $\mathbf{A}$ и $\mathbf{c}$. Докажете, че тази функция е определена и вдлъбната в множеството $K_{\mathbf{b}}$ (вж. зад. 18).

21. Нека $\overline{\mathbf{x}}$ е опорен план на каноничната задача (17) с базис $\mathbf{B}_{\overline{\mathbf{x}}} = \{\mathbf{a}^{s_1}, \ldots, \mathbf{a}^{s_m}\}$. Намерете формулите за разлагане на векторите на условията $\mathbf{a}^j$, $j = 1, \ldots, m$, и $\boldsymbol{\beta}$ по базиса $\mathbf{B}_{\overline{\mathbf{x}}}$.

22. Каноничната задача (13)–(15) се разглежда при $m < n$ и $\operatorname{rank} \mathbf{A} = m$. Защо?

§ 4. Свойства на опорните планове на КЗ

Нека $\overline{\mathbf{x}} = (\boldsymbol{\beta}, \mathbf{0})$ е опорен план на каноничната задача (16), $\mathbf{B} = (\mathbf{a}^{s_1} \mid \mathbf{a}^{s_2} \mid \cdots \mid \mathbf{a}^{s_m})$ е неговата базисна матрица и (22)–(24) е съответстващият му базисен вид на задачата при означенията (18), (20), (21).

За простота ще означаваме с Δ_j елементите на $\boldsymbol{\Delta}^N$ в (22) и с $\boldsymbol{\alpha}_j = (\alpha_{1j}, \alpha_{2j}, \ldots, \alpha_{mj})$ — стълбовете на матрицата $\boldsymbol{\alpha}_N$ в (25), където j е индексът на съответната небазисна променлива x_j.

Теорема 7. Необходимо и достатъчно условие един опорен план $\overline{\mathbf{x}}$ на КЗ да бъде оптимален, е задачата да има базисен вид (22)–(24), съответстващ на този опорен план, в който коефициентите пред неизвестните в целевата функция са неположителни ($\boldsymbol{\Delta}^N \leq \mathbf{0}$).

Условието $\boldsymbol{\Delta}^N \leq 0$ (достатъчно условие за оптималност) се нарича *критерий за оптималност*, а елементите на вектора $\boldsymbol{\Delta}^N$ — *оценки* на съответните небазисни променливи, както и на самия опорен план $\overline{\mathbf{x}}$.

Определение 7. Два опорни плана са *съседни*, ако базисите им се различават само по една променлива.

Определение 8. *Елементарно преобразувание* на КЗ се нарича преходът от един базисен вид на задачата към друг чрез смяна на само една базисна променлива. Ако преходът от базисния вид (22)–(24) към нов базисен вид се извърши чрез замяната на базисната променлива x_{s_p} с променливата x_q, се казва, че е извършено *елементарно преобразувание* с *ключово число* α_{pq}.

От опорния план $\overline{\mathbf{x}}$ с базисен вид (22)–(24) се преминава към съседен нему опорен план $\overline{\mathbf{x}}'$ (ако има такъв) по следния начин:

1) Новата базисна променлива x_q се избира между небазисните променливи, които имат положителен коефициент в (23), т. е. имат $\alpha_{iq} > 0$ $(1 \le i \le m)$ (ако няма такива небазисни променливи, $\bar{\mathbf{x}}$ няма съседни опорни планове).

2) Определя се базисната променлива, на чието място x_q влиза в базиса: това е променлива x_p, за която

$$t = \frac{\beta_p}{\alpha_{pq}} = \min\left\{\frac{\beta_q}{\alpha_{iq}} : \alpha_{iq} > 0,\ 1 \le i \le m\right\}. \tag{30}$$

3) Извършва се елементарно преобразувание с ключово число α_{pq}:

   а) решава се p-тото уравнение на (23) спрямо x_q, т. е. разделя се почленно на ключовото число α_{pq};

   б) изключва се x_q от останалите уравнения на (23) и от целевата функция (22).

Десните страни на системата уравнения в получения базисен вид на задачата са стойностите на съответните базисни променливи на $\bar{\mathbf{x}}'$, а свободният член в целевата функция — стойността ѝ за $\bar{\mathbf{x}}'$. Връзката между стойностите на целевата функция в съседните опорни планове $\bar{\mathbf{x}}$ и $\bar{\mathbf{x}}'$ е

$$l(\bar{\mathbf{x}}') = \Delta_0 + \Delta_q t = \Delta_0 + \Delta_q \frac{\beta_p}{\alpha_{pq}}. \tag{31}$$

Забележка 1. Ако в (30) $t = 0$ $(\beta_p = 0)$, то $\bar{\mathbf{x}}' = \bar{\mathbf{x}}$, т. е. описаната процедура сменя само базиса на изродения опорен план $\bar{\mathbf{x}}$.

Забележка 2. Ако минимумът в (30) се достига за няколко частни $\dfrac{\beta_p}{\alpha_{pq}}$, то само една от съответните базисни променливи ще напусне базиса — останалите ще бъдат базисни нули за $\bar{\mathbf{x}}'$, т. е. $\bar{\mathbf{x}}'$ е изроден.

Когато в базисното представяне (22)–(24) на КЗ спрямо опорния план $\bar{\mathbf{x}}$ има небазисна променлива x_q, чиито коефициенти в системата (23) са неположителни $(\boldsymbol{\alpha}^q \le 0)$, то от $\bar{\mathbf{x}}$ излиза неограничен ръб на множеството от планове (23)–(24) с параметрично уравнение

$$\mathbf{x}^t = \bar{\mathbf{x}} + t\mathbf{p}, \quad t \ge 0, \tag{32}$$

където направляващият вектор $\mathbf{p} = (p_1, p_2, \dots, p_n)$ има компоненти

$$\begin{aligned} &p_{s_i} = -\alpha_{iq}, \quad i = 1, \dots, m,\\ &p_q = 1,\\ &p_j = 0, \qquad j = 1, \dots, n, \quad j \ne q, s_1, \dots, s_m. \end{aligned} \tag{33}$$

Точките $\mathbf{x}^t$ от ръбовете се получават при $x_q = t \to +\infty$. По направлението $\mathbf{p}$ целевата функция расте (намалява) неограничено при $\Delta_q > 0$ ($\Delta_q < 0$) или не се изменя при $\Delta_q = 0$.

Теорема 8 (критерий за неограниченост (отгоре) на целевата функция). Ако дадено базисно представяне (22)–(24) на КЗ спрямо опорния план $\bar{\mathbf{x}}$ има оценка $\Delta_q > 0$ и коефициентите пред x_q в системата уравнения (23) са неположителни ($\boldsymbol{\alpha}^q \leq 0$), целевата функция е неограничена отгоре в множеството от планове на задачата.

Пример 8. Да се приведе каноничната задача

$$\begin{aligned} l(\mathbf{x}) = 2x_1 - 3x_3 + 5x_4 - 3x_5 &\to \max, \\ x_1 + 3x_2 - 5x_3 + 10x_4 + x_5 &= 6, \\ x_2 - 2x_3 + 3x_4 + x_5 &= 2, \\ x_j \geq 0,\ j = 1, \dots, 5&, \end{aligned} \tag{34}$$

в базисен вид спрямо опорния план $\bar{\mathbf{x}} = (4, 0, 0, 0, 2)$. Да се намерят всичките му съседни опорни планове и да се определи има ли оптимални между тях. Да се изследва поведението на целевата функция върху неограничените ръбове на множеството от планове, излизащи от $\bar{\mathbf{x}}$.

Решение. Базисният вид на задачата спрямо единствения базис $\{x_1, x_5\}$ на $\bar{\mathbf{x}}$ е:

$$\begin{aligned} l(\mathbf{x}) &= 2 - x_2 - 3x_3, \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 7x_4 &= 4, \\ x_2 - 2x_3 + 3x_4 + x_5 &= 2, \\ x_j \geq 0,\ j = 1, \dots, 5&. \end{aligned}$$

В него $\mathbf{x}^N = (x_2, x_3, x_4)$, $\boldsymbol{\Delta}^N = (\Delta_2, \Delta_3, \Delta_4) = (-1, -3, 0)$, $\boldsymbol{\alpha}^N = (\boldsymbol{\alpha}^2 \mid \boldsymbol{\alpha}^3 \mid \boldsymbol{\alpha}^4) = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 7 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$. Понеже $\boldsymbol{\Delta}^N \leq 0$, $\bar{\mathbf{x}}$ е решение на задачата и $l^* = 2$. Възможни съседни опорни планове се получават при въвеждането на x_2 или x_4 в базиса. Променливата x_2 може да влезе в базиса на мястото на x_1 или x_5, тъй като $t = \min\left(\frac{4}{2}, \frac{2}{1}\right) = 2$, $\bar{\mathbf{x}}'$ ще бъде изроден с базиси $\{x_1, x_2\}$ и $\{x_2, x_5\}$. При базис $\{x_1, x_2\}$ след елементарно преобразувание с ключово число $\alpha_{22} = 1$ получаваме

$$\begin{aligned} l(\mathbf{x}) &= -5x_3 + 3x_4 + x_5, \\ x_1 + x_3 + x_4 - 2x_5 &= 0, \\ x_2 - 2x_3 + 3x_4 + x_5 &= 2, \\ x_j \geq 0,\ j = 1, \dots, 5&, \end{aligned}$$

$\overline{\mathbf{x}}' = (0,2,0,0,0)$, $l(\overline{\mathbf{x}}') = \Delta_0 = 0$ (базисна нула x_1).

Променливата x_4 влиза в базиса на мястото на x_1: $\min\left(\frac{4}{7}, \frac{2}{3}\right) = \frac{4}{7}$. След елементарно преобразуване с ключово число $\alpha_{14} = 7$ получаваме

$$
\begin{array}{rrrrrrrrrrl}
 & & & & l(\mathbf{x}) = 2 - x_2 - 3x_3, & & & & & & \\
 \frac{1}{7}x_1 & + & \frac{2}{7}x_2 & - & \frac{3}{7}x_3 & + & x_4 & & & = & \frac{4}{7}, \\
 -\frac{3}{7}x_1 & + & \frac{1}{7}x_2 & - & \frac{5}{7}x_3 & & & + & x_5 & = & \frac{2}{7}, \\
 & & & & & & & & & & x_j \geq 0, \ j = 1, \dots, 5,
\end{array}
\tag{35}
$$

$\overline{\mathbf{x}}'' = \left(0,0,0,\frac{4}{7},\frac{2}{7}\right)$, $l(\overline{\mathbf{x}}'') = \Delta_0 = 2$. Планът $\overline{\mathbf{x}}''$ също е оптимален. Решения на задачата (теорема 5) са и всички точки

$$\mathbf{x}^\lambda = \lambda\overline{\mathbf{x}} + (1-\lambda)\overline{\mathbf{x}}'' = \left(4\lambda, 0, 0, \frac{4}{7} - \frac{4}{7}\lambda, \frac{2}{7} + \frac{12}{7}\lambda\right)$$

от отсечката $\overline{\mathbf{x}}'\overline{\mathbf{x}}''$: $l(\mathbf{x}^\lambda) = \lambda l(\overline{\mathbf{x}}) + (1-\lambda) l(\overline{\mathbf{x}}'') = l(\overline{\mathbf{x}}) = 2$.

От $\overline{\mathbf{x}}$ излиза неограничен ръб, чиито точки $\mathbf{x}^t$ се получават при нарастване на x_3: $x_3 = t \to +\infty$ ($t \geq 0$). Ръбът има параметрично уравнение $\mathbf{x}^t = \overline{\mathbf{x}} + t\overline{\mathbf{p}}$, $t \geq 0$, с направляващ вектор

$$\overline{\mathbf{p}} = (-\alpha_{13}, 0, 1, 0, -\alpha_{23}) = (3, 0, 1, 0, 2),$$

откъдето $\mathbf{x}^t = (4+3t, 0, t, 0, 2+2t)$. Целевата функция намалява неограничено по направлението $\overline{\mathbf{p}}$: $l(\mathbf{x}^t) = 2 - 3t \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$.

Пример 9. Дадена е каноничната задача

$$
\begin{gathered}
l(\mathbf{x}) = -ax_1 + x_2 - ax_3 \to \max, \\
P: \begin{cases} ax_1 - x_2 + (1-a)x_3 = a - 1 \\ x_1 - x_2 = 0 \\ x_j \geq 0, \ j = 1,2,3, \end{cases}
\end{gathered}
$$

и планът $\overline{\mathbf{x}} = (1,1,0)$. За кои стойности на $a \neq 1$ е изпълнено:

а) $\overline{\mathbf{x}}$ е единствен оптимален план на задачата;

б) $\overline{\mathbf{x}}$ не е единствен оптимален план на задачата — да се определи общият вид на оптималните планове;

в) целевата функция расте неограничено в P;

г) има съседен опорен план на $\overline{\mathbf{x}}$, за който функцията има по-голяма стойност.

Решение. Планът $\overline{\mathbf{x}}$ е опорен план на задачата при $a \neq 1$ ($\det[\mathbf{A}^1\mathbf{A}^2] = -a+1$) и могат да се използват теореми 7 и 8. Привеждаме задачата в базисен вид спрямо $\overline{\mathbf{x}}$:

$$l(\mathbf{x}) = 1 - a + (1-2a)x_3,$$

$$P: \begin{cases} x_1 \quad - x_3 = 1 \\ \quad x_2 - x_3 = 1 \\ x_j \geq 0, \ j = 1, 2, 3. \end{cases}$$

а) $\overline{\mathbf{x}}$ е оптимален, ако $\Delta_3 = 1 - 2a \leq 0$ и ще бъде единствен, ако $\Delta_3 = 1 - 2a < 0$, т. е. за $a > \frac{1}{2}$, $a \neq 1$.

б) $\overline{\mathbf{x}}$ не е единствен оптимален план, ако $\Delta_3 = 1 - 2a = 0$, т. е. $a = \frac{1}{2}$. Понеже $\boldsymbol{\alpha}_N^3 = (-1, -1)^{\mathrm{T}} < 0$, от $\overline{\mathbf{x}}$ излиза неограничен ръб на P, за чиито точки

$$\mathbf{x}^t = (1 + t, 1 + t, t) \tag{36}$$

имаме $l(\mathbf{x}^t) = l(\overline{\mathbf{x}}) + 0.t = l(\overline{\mathbf{x}})$, т. е. те са решения на задачата.

в) Понеже $\boldsymbol{\alpha}_N^3 \leq 0$, то трябва $\Delta_3 = 1 - 2a > 0$, т. е. $a < \frac{1}{2}$. Тогава за точките $\mathbf{x}^t$ на неограничения ръб (36) имаме

$$l(\mathbf{x}^t) = l(\overline{\mathbf{x}}) + (1 - 2a)t \underset{t \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$

г) Не може да се премине към съседен опорен план: $\overline{\mathbf{x}}$ е единственият опорен план на P, защото $\boldsymbol{\alpha}^3 < 0$ и при $x_3 = t \geq 0$ получаваме точките от $\mathbf{x}^t \in P$ от (36).

Задачи

1. Намерете всички съседни опорни планове на зададения опорен план $\overline{\mathbf{x}}$ и проверете има ли оптимални между тях. Напишете общия вид на точките от неограничените ръбове на множеството от планове, излизащи от $\overline{\mathbf{x}}$ (ако има такива), и проверете каква е стойността на целевата функция за тях.

1.1. $l(\mathbf{x}) = x_1 - 2x_3 + 2x_4 - 3x_5 \to \max$,

$$\begin{aligned} &x_1 \qquad\qquad + x_4 - 2x_5 = 0, \\ &\quad x_2 + x_3 + 3x_4 + x_5 = 2, \qquad \overline{\mathbf{x}} = (0, 0, 2, 0, 0); \\ &x_j \geq 0, \ j = 1, \ldots, 5, \end{aligned}$$

1.2. $l(\mathbf{x}) = 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 \to \max$,

$$\begin{aligned} &x_1 - x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 6, \\ &\qquad x_2 - x_3 + x_4 = 3, \qquad \overline{\mathbf{x}} = (9, 3, 0, 0); \\ &x_j \geq 0, \ j = 1, \ldots, 4, \end{aligned}$$

1.3. $l(\mathbf{x}) = -x_1 + x_2 \to \min,$

$$\begin{aligned} -2x_1 + x_2 \qquad\qquad\qquad &= 3,\\ x_1 \quad + x_3 + x_4 \quad &= 1,\\ x_1 \quad + 4x_3 \quad + x_5 &= 4, \end{aligned} \qquad \bar{\mathbf{x}} = (0, 3, 0, 1, 4);$$

$x_j \geq 0,\ j = 1, \ldots, 5,$

1.4. $l(\mathbf{x}) = -5x_1 - 2x_4 + 2x_5 \to \max,$

$$\begin{aligned} -2x_1 + x_2 + x_3 \qquad\qquad &= 4,\\ -x_1 + x_2 \quad - x_4 + x_5 &= 1, \end{aligned} \qquad \bar{\mathbf{x}} = (0, 0, 4, 0, 1);$$

$x_j \geq 0,\ j = 1, \ldots, 5,$

1.5. Задача 1.4, но при $l(\mathbf{x}) = x_1 \to \min;$

1.6. Задача 1.4, но при $l(\mathbf{x}) = x_1 + 2x_2 \to \max;$

1.7. $l(\mathbf{x}) = 2x_1 + 6x_2 \to \min,$

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 - x_3 \qquad &= 6,\\ -3x_1 + 7x_2 \quad + x_4 &= 61, \end{aligned} \qquad \bar{\mathbf{x}} = (6, 0, 0, 79).$$

$x_j \geq 0,\ j = 1, \ldots, 4,$

2. В следващите задачи определете стойностите на параметрите a и b така, че за дадения опорен план $\bar{\mathbf{x}}$ да е изпълнено:

а) $\bar{\mathbf{x}}$ е единствен оптимален план;

б) $\bar{\mathbf{x}}$ не е единствен оптимален план. Да се определи общият вид на решенията;

в) целевата функция расте неограничено в множеството от планове на задачата. Напишете общия вид на точките от неограничените ръбове, излизащи от $\bar{\mathbf{x}}$, по които функцията расте неограничено;

г) може да се премине към съседен опорен план, в който целевата функция има по-голяма стойност. Намерете поне един опорен план с това свойство.

2.1. $l(\mathbf{x}) = x_1 + 2x_2 + (a - 4)x_3 - 2ax_4 \to \max,$

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - ax_3 - x_4 &= 2,\\ x_2 - 2ax_3 - x_4 &= 1, \end{aligned} \qquad \bar{\mathbf{x}} = (1, 1, 0, 0);$$

$x_j \geq 0,\ j = 1, \ldots, 4,$

2.2. $l(\mathbf{x}) = ax_1 + \frac{1}{a}x_2 + bx_3 + 2x_4 \to \max, \quad a \neq 0,$

$$\begin{aligned} ax_1 + x_2 + (1 + a)x_3 + (a^2 + \tfrac{1}{a})x_4 &= a + 1,\\ x_1 + \tfrac{1}{a}x_2 + (\tfrac{1}{a} - 1)x_3 + (a - \tfrac{1}{a^2})x_4 &= 1 - \tfrac{1}{a}, \end{aligned} \quad \bar{\mathbf{x}} = (1, 1, 0, 0);$$

$x_j \geq 0,\ j = 1, \ldots, 4,$

2.3. $l(\mathbf{x}) = -2ax_1 + bx_2 - x_4 \to \min,$

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 2, \\ -x_1 & + & 2x_2 & & & + & x_4 & = & 1, \end{array} \qquad \bar{\mathbf{x}} = (0,0,1,1);$$
$x_j \geq 0, \ j = 1, \ldots, 4,$

2.4. $l(\mathbf{x}) = -x_1 - x_2 + ax_3 + bx_4 \to \max,$

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 2, \\ x_1 & - & 2x_2 & & & - & x_4 & = & -1, \end{array} \qquad \bar{\mathbf{x}} = (0,0,1,1);$$
$x_j \geq 0, \ j = 1, \ldots, 4,$

2.5. $l(\mathbf{x}) = ax_1 - x_2 + ax_3 \to \min, \quad a \neq 0,$

$$\begin{array}{rcrcrcr} ax_1 & - & x_2 & + & (1-a)x_3 & = & 1-a, \\ x_1 & - & x_2 & & & = & 0, \end{array} \qquad \bar{\mathbf{x}} = (0,0,1);$$
$x_j \geq 0, \ j = 1, 2, 3,$

2.6. $l(\mathbf{x}) = -x_1 + x_3 - 2x_4 \to \min,$

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} & & x_2 & - & bx_3 & + & 2ax_4 & = & 1, \\ x_1 & + & x_2 & + & bx_3 & + & ax_4 & = & 2, \end{array} \qquad \bar{\mathbf{x}} = (1,1,0,0);$$
$x_j \geq 0, \ j = 1, \ldots, 4,$

2.7. $l(\mathbf{x}) = x_1 + x_2 - x_3 \to \max,$

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} x_1 & + & ax_2 & - & bx_3 & + & x_4 & = & 3, \\ & & (2a+1)x_2 & + & bx_3 & + & x_4 & = & 1, \end{array} \qquad \bar{\mathbf{x}} = (2,0,0,1);$$
$x_j \geq 0, \ j = 1, \ldots, 4,$

2.8. $l(\mathbf{x}) = x_1 + x_2 + (1-a)x_3 + ax_4 \to \max,$

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} x_1 & + & x_2 & - & x_3 & - & x_4 & = & 9, \\ & & x_2 & + & x_3 & & & = & 5, \end{array} \qquad \bar{\mathbf{x}} = (4,5,0,0);$$
$x_j \geq 0, \ j = 1, \ldots, 4,$

2.9. $l(\mathbf{x}) = ax_1 - 8x_2 + x_3 + x_4 + 2x_5 \to \max,$

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcl} x_1 & - & 10x_2 & - & 3x_3 & + & 3x_4 & - & 4x_5 & = & 3, \\ & - & 9x_2 & + & 4x_3 & + & 3x_4 & + & x_5 & = & 7, \\ x_1 & - & 7x_2 & + & x_3 & + & 2x_4 & + & x_5 & = & 6, \end{array} \qquad \bar{\mathbf{x}} = (1,0,0,2,1);$$
$x_j \geq 0, \ j = 1, \ldots, 5,$

2.10. Задача 2.9, но за $l(\mathbf{x}) = x_1 + x_2 - x_3 - ax_4 - x_5 \to \min$, $\bar{\mathbf{x}} = (3,0,1,1,0)$.

3. За $\overline{\mathbf{x}} = (1, 2, 1, 0, 0)$ приведете задачата

$$\begin{aligned} l(\mathbf{x}) = x_1 + x_2 + x_3 + (5a+7)x_4 + (a+3)x_5 \to \max,\\ x_1 + x_2 \qquad + (3a+2)x_4 + (a+3)x_5 = 3,\\ x_2 \qquad + (2a+1)x_4 + 3x_5 = 2,\\ x_1 \qquad + x_3 + (2a+3)x_4 + (a+1)x_5 = 2,\\ x_j \geq 0, \ j = 1, \dots, 5, \end{aligned}$$

в базисен вид и определете параметъра a, така че:

а) $l(\mathbf{x})$ да е неограничена в множеството от планове. Напишете общия вид на точките от неограничения ръб, по който функцията расте;

б) задачата да е изродена.

4. В следващите задачи определете стойността на параметъра a така, че за дадения опорен план $\overline{\mathbf{x}}$ да е изпълнено:

а) $\overline{\mathbf{x}}$ е оптимален;

б) задачата няма решение;

в) може да се премине към съседен опорен план $\overline{\mathbf{x}}'$, от който тръгва неограничен ръб на множеството от планове, по който функцията расте неограничено (при търсене на максимум).

4.1. $l(\mathbf{x}) = -2x_1 + ax_2 - x_3 + 8x_4 - x_5 \to \min,$

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - 2x_3 - x_4 + 5x_5 = 5,\\ - x_2 + 3x_3 - 2x_4 + x_5 = 1,\\ -2x_1 + x_2 - 3x_3 - 4x_4 + x_5 = 1,\\ x_j \geq 0, \ j = 1, \dots, 5, \end{aligned} \qquad \overline{\mathbf{x}} = (1, 1, 0, 0, 2);$$

4.2. $l(\mathbf{x}) = x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + ax_5 \to \max,$

$$\begin{aligned} -x_1 + 3x_2 - 5x_3 - 9x_4 + 2x_5 = 6,\\ x_1 + x_2 + x_3 - 7x_4 + 2x_5 = 6,\\ -x_1 \qquad - 3x_4 + x_5 = 1,\\ x_j \geq 0, \ j = 1, \dots, 5, \end{aligned} \qquad \overline{\mathbf{x}} = (0, 3, 1, 0, 1).$$

5. За кои стойности на параметрите a , b , c , c_1 , c_2 , c_3 , c_4 опорният план $\overline{\mathbf{x}} = (1, 1, 0, 0, 0, 0)$ е решение на задачата:

$$\begin{aligned} l(\mathbf{x}) = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + c_4x_4 \to \max,\\ x_1 + x_2 + (a+b)x_3 + (a-b)x_4 + (a+b)x_5 + (a-b)x_6 = 2,\\ x_1 + 2x_2 + (a+2b)x_3 + (a-2b)x_4 + (2a+b)x_5 + (2a-b)x_6 = 3,\\ x_j \geq 0, \ j = 1, \dots, 6. \end{aligned}$$

6. Нека $\mathbf{x}^* = (x_1^*, \ldots, x_n^*)$ е неизроден опорен оптимален план на задачата (17). Какви условия трябва да удовлетворяват числото c_{n+1} и векторът $\mathbf{a}^{n+1}$, че за задачата

$$l(\mathbf{x}) = \langle \mathbf{c}, \mathbf{x} \rangle + c_{n+1} x_{n+1} \to \max,$$
$$\sum_{j=1}^{n} \mathbf{a}^j x_j + \mathbf{a}^{n+1} x_{n+1} = b,$$
$$x_j \geq 0, \quad j = 1, \ldots, n+1,$$

и вектора $\widetilde{\mathbf{x}}^* = (\mathbf{x}^*, 0) = (x_1^*, \ldots, x_n^*, 0)$ да е изпълнено:

а) $\widetilde{\mathbf{x}}^*$ е оптимален план на задачата;

б) задачата няма решение.

7. Съществува ли канонична задача с опорен оптимален план, всички оценки на който са нули ($\boldsymbol{\Delta}^N = \mathbf{0}$)?

8. Нека в каноничната задача (17) $\mathbf{A}$ и $\mathbf{b}$ са фиксирани, а $l(\mathbf{x})$ е функция на $\mathbf{c}$. Ако $\overline{\mathbf{x}}$ е опорен план на задачата, може ли винаги да се избере такова $\mathbf{c}$, че:

а) $\overline{\mathbf{x}}$ да е оптимален;

б) $l(\mathbf{x})$ да е неограничена в множеството от планове;

в) от $\overline{\mathbf{x}}$ да може да се премине към по-добър съседен опорен план.

9. Нека в каноничната задача (13)–(15) се търси минимум на целевата функция. Изведете (без да преминавате към задача за минимум):

а) критерий за оптималност на опорен план на задачата;

б) критерий за неограниченост на функцията $l(\mathbf{x})$ в множеството от планове (14)–(15).

10. Ако в каноничната задача (17) векторът $\mathbf{c}$ не принадлежи на никоя стена с размерност $n - m - 1$ на множеството ѝ от планове и ако (22)–(24) е базисният вид на задачата спрямо някой опорен план $\overline{\mathbf{x}}$, докажете, че $\boldsymbol{\Delta}^N \neq 0$.

§ 5. Симплекс-метод

Симплекс-методът се основава на свойствата на опорните планове на каноничната задача, дадени в § 3 и § 4. Нека $\overline{\mathbf{x}} = (\overline{\mathbf{x}}^B, \overline{\mathbf{x}}^N) = (\boldsymbol{\beta}, \mathbf{0})$ е опорен план на каноничната задача (16) и нека (22)–(24) е съответстващият му базисен вид при базисна матрица $\mathbf{B}$ и означения (18), (20), (21). Един алгоритъм на симплекс-метода е следният:

1. Проверка за оптималност на опорния план: ако $\boldsymbol{\Delta}^N \leq 0$, планът е оптимален и задачата е решена.

2. Проверка за неограниченост (отгоре) на целевата функция: ако съществува оценка $\Delta_j > 0$ и $\boldsymbol{\alpha}^j = (\alpha_{1j}, \ldots, \alpha_{mj}) \le 0$, където $\boldsymbol{\alpha}^j$ е стълбът на $\boldsymbol{\alpha}_N$ от коефициентите пред небазисната променлива x_j, то функцията е неограничена отгоре в множеството от планове и задачата е решена.

3. Преход към съседен опорен план, при което стойността на целевата функция нараства: извършва се по правилата 1)–3), описани в § 4, като новата базисна променлива x_q се избира при допълнителното условие да има оценка $\Delta_q > 0$.

При тази процедура, ако задачата е неизродена, на всяка стъпка се преминава към нов опорен план, в който стойността на целевата функция е по-голяма ($t > 0$, вж. (31)). След краен брой стъпки се стига до опорен оптимален план или се установява неограниченост (отгоре) на функцията в множеството от планове. При изродени задачи обаче теоретично е възможно зацикляне: минаване между различни базиси на един и същ опорен план ($t = 0$). На практика вероятността за зацикляне е минимална.

B	$\mathbf{c}^B$	$\boldsymbol{\beta}$ c_0	x_1 c_1	$\ldots$ $\ldots$	x_j c_j	$\ldots$ $\ldots$	x_q c_q	$\ldots$ $\ldots$	x_n c_n
x_{s_1}	c_{s_1}	β_1	α_{11}	$\ldots$	α_{1j}	$\ldots$	α_{1q}	$\ldots$	α_{1n}
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$
x_{s_i}	c_{s_i}	β_i	α_{i1}	$\ldots$	α_{ij}	$\ldots$	α_{iq}	$\ldots$	α_{in}
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$
x_{s_p}	c_{s_p}	β_p	α_{p1}	$\ldots$	α_{pj}	$\ldots$	$\boxed{\alpha_{pq}}$	$\ldots$	α_{pn}
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$
x_{s_m}	c_{s_m}	β_m	α_{m1}	$\ldots$	α_{mj}	$\ldots$	α_{mq}	$\ldots$	α_{mn}
		$-\Delta_0$	Δ_1	$\ldots$	Δ_j	$\ldots$	Δ_q	$\ldots$	Δ_n

Таблица 1

Числената схема на алгоритъма се реализира с помощта на *симплексни таблици* от вида на табл. 1. Симплексната таблица на даден опорен план $\overline{\mathbf{x}}$ съдържа съответния базисен вид (22)–(24) на задачата и елементите на $\mathbf{c} = (c_1, \ldots, c_n)$ в първоначалния ѝ вид (16). В стълбовете **B**, $\mathbf{c}^B$ и $\boldsymbol{\beta}$ са нанесени съответно базисните променливи x_{s_i} (i-тото уравнение на (23) е решено спрямо x_{s_i}), техните коефициенти c_{s_i} и стойности β_i, $i = 1, \ldots, m$. Стълбовете x_j съдържат коефициентите пред едноименните променливи в (23). За небазисните променливи x_j това са елементите на съответния стълб на $\boldsymbol{\alpha}_N$, а за базисните — елементите на съответния единичен вектор $(0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$, в който $\alpha_{is_i} = 1$. В примерите по-долу единичните стълбове са попълнени за прегледност. В последния (индексния) ред на таблицата са нанесени оценките на $\overline{\mathbf{x}}$ от (24): това са елементите Δ_j на $\mathbf{\Delta}^N$, а за базисните променливи — $\Delta_{s_i} = 0$, $i = 1, \dots, m$. В стълба $\boldsymbol{\beta}$ се вписва $-\Delta_0$, а c_0 е свободният член на $l(\mathbf{x})$ в (16) ($c_0 = 0$).

Симплекс-процедурата се осъществява така:

Итерация 1. Попълва се симплексната таблица на началния опорен план $\overline{\mathbf{x}}$, като Δ_0 и $\mathbf{\Delta}^N$ се пресмятат по (21):

$$
\begin{aligned}
-\Delta_0 &= c_0 - \left\langle \mathbf{c}^B, \boldsymbol{\beta} \right\rangle = c_0 - \sum_{i=1}^{m} c_{s_i}\beta_i, \\
\Delta_j &= c_j - \left\langle \mathbf{c}^B, \boldsymbol{\alpha}^j \right\rangle = c_j - \sum_{i=1}^{m} c_{s_i}\alpha_{ij}, \quad j = 1, \dots, n.
\end{aligned} \tag{37}
$$

Итерация 2. Преход към съседен „по-добър“ опорен план:

а) *избор на нова базисна променлива*: избира се x_q с положителна оценка $\Delta_q > 0$; стълбът x_q в таблицата се нарича *ключов стълб*. Препоръчва се да се избира променлива с максимална положителна оценка;

б) *определяне на променливата, която ще излезе от базиса*: пресмята се числото t по (30), от базиса излиза x_{s_p}. Редът с номер p се нарича *ключов ред*. *Ключовото число* α_{pq} е заградено с правоъгълна рамка.

в) *елементарно преобразувание с ключовото число* α_{pq}, т. е. попълва се симплексната таблица за новия опорен план $\overline{\mathbf{x}}'$:

- в стълбовете $\mathbf{B}$ и $\mathbf{c}^B$ се прави само една смяна: вместо x_{s_p} се вписва новата базисна променлива x_q, а вместо c_{s_p} — числото c_q;
- останалата част от таблицата се попълва с числата α'_{ij}, β'_i, Δ'_j, $-\Delta'_0$, $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$, пресметнати по формулите

$$
\begin{aligned}
&\alpha'_{pj} = \frac{\alpha_{pj}}{\alpha_{pq}}, \quad \alpha'_{ij} = \alpha_{ij} - \alpha_{iq}\frac{\alpha_{pj}}{\alpha_{pq}}, \quad j = 1, \dots, n, \ i \neq s_1, \dots, s_m, \\
&\beta'_p = \frac{\beta_p}{\alpha_{pq}}, \quad \beta'_i = \beta_i - \alpha_{iq}\frac{\beta_p}{\alpha_{pq}}, \quad i = 1, \dots, m, \ i \neq s_1, \dots, s_m, \\
&-\Delta'_0 = -\Delta_0 - \Delta_q\frac{\beta_p}{\alpha_{pq}}, \quad \Delta'_j = \Delta_j - \Delta_q\frac{\alpha_{pj}}{\alpha_{pq}}, \quad j = 1, \dots, n.
\end{aligned} \tag{38}
$$

С изключение на елементите от p-тия ред всеки елемент на новата таблица се получава по *правилото на правоъгълника*: от съответния елемент в старата таблица се изважда произведението на елемента от същия ред в ключовия стълб с елемента от същия стълб в ключовия ред, разделено на ключовото число (вж. табл. 1). След попълването на новата симплексна таблица се преминава към стъпка 1.

Забележка 1. При ръчно решаване на задачата може да се контролират сметките, ако след попълването на новата таблица оценките се пресмятат и по формули (37).

Забележка 2. Ако минимумът в (30) се достига на повече от едно място, новият план ще бъде изроден: ще се анулират и други базисни променливи (освен x_{s_p}) и те ще бъдат базисни нули за него.

Забележка 3. Ако в (30) се получи $t = 0$, т. е. $\bar{\mathbf{x}}$ е изроден и $\bar{x}_{s_p} = \beta_p = 0$ е негова базисна нула, то елементарното преобразуване (38) не води до нов опорен план, а само до смяна на базиса на $\bar{\mathbf{x}}$. Сред базисите на един изроден опорен план обаче винаги има базис, от който чрез елементарно преобразуване може да се премине към нов опорен план.

Пример 10. Да се реши задачата:

$$l(\mathbf{x}) = 3x_1 - x_2 + 2x_3 \to \max,$$

$$\begin{array}{rcrcrcl} 2x_1 & - & x_2 & & & = & -3, \\ x_1 & & & - & x_3 & \le & 1, \\ x_1 & & & + & 4x_3 & \le & 4, \end{array} \tag{39}$$

$$x_1 \ge 0, \; x_3 \ge 0.$$

Решение. Привеждаме задачата в каноничен вид:

$$\bar{l}(\bar{\mathbf{x}}) = 3x_1 - x_2' + \xi + 2x_3 \to \max, \tag{40}$$

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcrcl} -2x_1 & + & x_2' & - & \xi & & & & & & & = & 3, \\ x_1 & & & & & - & x_3 & + & x_4 & & & = & 1, \\ x_1 & & & & & + & 4x_3 & & & + & x_5 & = & 4, \end{array} \tag{41}$$

$$x_1, x_2', \xi, x_3, x_4, x_5 \ge 0.$$

Положили сме $x_2 = x_2' - \xi$. Системата уравнения (41) е решена спрямо променливите x_2', x_4, x_5 и свободните ѝ членове са неотрицателни, следователно $\mathbf{x}^0 = (0, 3, 0, 0, 1, 4)$ е опорен план на задачата с базис $\mathbf{B}_{\mathbf{x}^0} = \{x_2', x_4, x_5\}$.

Опорният план $\mathbf{x}^0$ (табл. 2) не е оптимален: $\Delta_1 = 1 > 0$, $\Delta_3 = 2 > 0$. Не се проявява неограниченост на целевата функция — в стълбовете x_1 и x_3 има положителни коефициенти. За нова базисна променлива е избрана x_3. Тя влиза в базиса на мястото на x_5 (само $\alpha_{33} = 4 > 0$). След елементарно преобразуване с ключов елемент $\alpha_{33} = 4$, получаваме табл. 3. Новият опорен

$\mathbf{x}^0$

B	$\mathbf{c}^B$	$\boldsymbol{\beta}$ 0	x_1 3	x_2' −1	ξ 1	x_3 2	x_4 0	x_5 0
x_2'	−1	3	−2	1	−1	0	0	0
x_4	0	1	1	0	0	−1	1	0
x_5	0	4	1	0	0	$\boxed{4}$	0	1
		3	1	0	0	2	0	0

Таблица 2

план е $\mathbf{x}' = (0, 3, 0, 1, 2, 0)$ и $\bar{l}(\mathbf{x}') = -1$. Той също не е оптимален: $\Delta_1 = \frac{1}{2} > 0$. Сега в базиса влиза x_1 на мястото на x_4, защото

$$\min\left[\frac{2}{\frac{5}{4}}, \frac{1}{\frac{1}{4}}\right] = \min\left(\tfrac{8}{5}, 4\right) = \tfrac{8}{5}.$$

След елементарно преобразуване с ключов елемент $\alpha_{21} = \frac{5}{4}$ получаваме (табл. 4) опорния план $\mathbf{x}'' = \left(\frac{8}{5}, \frac{31}{5}, 0, \frac{3}{5}, 0, 0\right)$, който е оптимален и $\bar{l}^* = \bar{l}(\mathbf{x}'') = -\frac{1}{5}$.

Понеже $\Delta_\xi = 0$ и останалите елементи от стълба ξ са неположителни ($\alpha^\xi = (-1, 0, 0) < 0$), то от върха $\mathbf{x}''$ излиза неограничен ръб на множеството от планове (39), чиито точки (вж. (32), (33)) $\mathbf{x}^t = \left(\frac{8}{5}, \frac{31}{5} + t, t, \frac{3}{5}, 0, 0\right)$, $t \geq 0$, са решения на задачата. Решенията на първоначалната задача получаваме от първите четири координати на $\mathbf{x}^t$ ($x_2 = x_2' - \xi$): $\mathbf{x}^* = \left(\frac{8}{5}, \frac{31}{5}, \frac{3}{5}\right)$ и $l^* = -\frac{1}{5}$.

$\mathbf{x}'$

B	$\mathbf{c}^B$	$\boldsymbol{\beta}$ 0	x_1 3	x_2' −1	ξ 1	x_3 2	x_4 0	x_5 0
x_2'	−1	3	−2	1	−1	0	0	0
x_4	0	2	$\boxed{5/4}$	0	0	0	1	1/4
x_3	2	1	1/4	0	0	1	0	1/4
		1	−1/2	0	0	0	0	1/2

Таблица 3

$\mathbf{x}''$

B	$\mathbf{c}^B$	β	x_1	x_2'	ξ	x_3	x_4	x_5
		0	3	−1	1	2	0	0
x_2'	−1	31/5	0	1	−1	0	8/5	2/5
x_1	3	8/5	1	0	0	0	4/5	1/5
x_3	2	3/5	0	0	0	1	−1/5	1/5
		1/5	0	0	0	0	−2/5	−3/5

Таблица 4

Пример 11. Да се реши задачата:

$$l(\mathbf{x}) = -3x_1 - x_2 \to \min,$$

$$\begin{aligned} -2x_1 + x_2 &\leq 4, \\ -x_1 + x_2 &\geq -2, \\ 3x_1 + x_2 &\leq 22, \\ x_1 \geq 0,\ x_2 &\geq 0. \end{aligned}$$

Решение. Привеждаме задачата в каноничен вид:

$$\bar{l}(\mathbf{x}) = 3x_1 + x_2 \to \max,$$

$$\begin{aligned} -2x_1 + x_2 + x_3 \qquad\qquad &= 4, \\ x_1 - x_2 \qquad + x_4 \qquad &= 2, \\ 3x_1 + x_2 \qquad\qquad + x_5 &= 22, \\ x_j \geq 0,\ \text{j}= 1, \ldots, 5. \end{aligned}$$

Задачата е в базисен вид спрямо опорния план $\mathbf{x}^0 = (0, 0, 4, 2, 22)$ и $\bar{l}(\mathbf{x}^0) = 0$. Табл. 5, 6 и 7 са последователните симплексни таблици за $\mathbf{x}^0$, $\mathbf{x}' = (2, 0, 8, 0, 16)$, $\mathbf{x}'' = \mathbf{x}^* = (6, 4, 12, 0, 0)$, $\bar{l}(\mathbf{x}') = 6$, $\bar{l}^* = \bar{l}(\mathbf{x}^*) = 22$. Решението $\mathbf{x}^*$ не е единствено, понеже $\Delta_4 = 0$. При въвеждане на x_4 в базиса се получава (табл. 8) решението $\mathbf{x}^{**} = \left(\frac{18}{5}, \frac{56}{5}, 0, \frac{48}{5}, 0\right)$. Други оптимални решения няма. Съгласно теорема 5 всички решения на каноничната задача са $\mathbf{x}^\lambda = \lambda\mathbf{x}^* + (1 - \lambda)\mathbf{x}^{**} = \left(\frac{18 + 12\lambda}{5}, \frac{56 - 36\lambda}{5}, 12\lambda, \frac{48 - 48\lambda}{5}, 0\right)$, $\lambda \in [0, 1]$. Изходната задача има решения $\bar{\mathbf{x}}^\lambda = \left(\frac{18 + 12\lambda}{5}, \frac{56 - 36\lambda}{5}\right)$ и $l^* = -\bar{l}(\mathbf{x}^*) = -22$.

$\mathbf{x}^0$

B	$\mathbf{c}^B$	β 0	x_1 3	x_2 1	x_3 0	x_4 0	x_5 0
x_3	0	4	−2	1	1	0	0
x_4	0	2	$\boxed{1}$	−1	0	1	0
x_5	0	22	3	1	0	0	1
$\mathbf{x}'$		0	3	1	0	0	0
x_3	0	8	0	−1	1	2	0
x_1	3	2	1	−1	0	1	0
x_5	0	16	0	$\boxed{4}$	0	−3	1
$\mathbf{x}'' = \mathbf{x}^*$		−6	0	4	0	−3	0
x_3	0	12	0	0	1	$\boxed{5/4}$	1/4
x_1	3	6	1	0	0	1/4	1/4
x_2	1	4	0	1	0	−3/4	1/4
$\mathbf{x}^{**}$		−22	0	0	0	0	−1
x_4	0	48/5	0	0	4/5	1	1/5
x_1	3	18/5	1	0	−1/5	0	1/5
x_2	1	56/5	0	1	3/5	0	2/5
		−22	0	0	0	0	−1

Таблици 5, 6, 7, 8

Пример 12. Да се реши задачата:

$$l(\mathbf{x}) = x_1 + x_2 + 5x_3 - 4x_4 \to \max,$$

$$\begin{aligned} x_1 \quad\; + 3x_3 + \;\; x_4 &= 2, \\ x_2 + \;\; x_3 - 2x_4 &= 0, \\ x_j \geq 0,\ \ j = 1, \ldots, 4. & \end{aligned}$$

Решение. Симплексните таблици са табл. 9 и 10. Те съдържат базисния вид на задачата спрямо два базиса на изродения опорен план $\mathbf{x}^0 = (2, 0, 0, 0)$. Критерият за оптималност се проявява при втория базис (макар че той не е необходимо условие за изродените опорни решения): $l^* = 2$.

$\mathbf{x}^0$

B	$\mathbf{c}^B$	$\boldsymbol{\beta}$ 0	x_1 1	x_2 1	x_3 5	x_4 −4
x_1	1	2	1	0	3	1
x_2	1	0	0	1	$\boxed{1}$	−2
$\mathbf{x}^0$		−2	0	0	1	−3
x_1	1	2	1	−1	0	7
x_3	5	0	0	1	1	−2
		−2	0	−1	0	−1

Таблици 9, 10

Задачи

1. Решете чрез симплекс-метода дадените задачи. От симплексната таблица на последния опорен план $\bar{\mathbf{x}}$ определете:

а) ако $\bar{\mathbf{x}}$ е оптимален, дали е единствено решение и ако не е, намерете всички съседни опорни решения и решенията (ако има такива), които лежат върху неограничени ръбове, излизащи от $\bar{\mathbf{x}}$; напишете общия вид на плановете, за които от получената информация следва, че са решение на задачата;

б) общия вид на точките, лежащи върху неограничените ръбове, излизащи от $\bar{\mathbf{x}}$, по които $l(\mathbf{x})$ расте (намалява — при задача за минимум) неограничено.

1.1. $l(\mathbf{x}) = 3 - x_4 - x_5 \to \min,$

$$\begin{aligned} x_1 \qquad\quad + \ x_4 + \ \ x_5 &= 2,\\ x_2 \quad + 2x_4 + 3x_5 &= 7,\\ x_3 - \ \ x_4 - 3x_5 &= 2,\\ x_j \geq 0,\ \ j = 1, \dots, 5&; \end{aligned}$$

1.2. $l(\mathbf{x}) = 5x_1 + 2x_2 + 7x_3 + x_4 - x_6 \to \max,$

$$\begin{aligned} - x_2 + x_3 + x_4 - 6x_5 \qquad\ &= 5,\\ x_1 + x_2 \qquad\ + x_4 + \ \ x_5 - x_6 &= 3,\\ x_j \geq 0,\ \ j = 1, \dots, 6&; \end{aligned}$$

1.3. $l(\mathbf{x}) = 2x_1 - 3x_2 + x_3 - 5x_4 - 12x_5 \to \max,$

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_4 - 5x_5 &= 7,\\ x_2 + x_3 - 3x_4 - 2x_5 &= 2,\\ x_j \ge 0,\ j = 1,\dots,5; \end{aligned}$$

1.4. Зад. 1.3, но при целева функция $l(\mathbf{x}) = 2x_1 + 5x_2 + x_3 - 5x_4 - 12x_5$;

1.5. $l(\mathbf{x}) = x_2 - x_3 \to \max,$

$$\begin{aligned} -x_1 + \tfrac{1}{2}x_2 - \tfrac{1}{2}x_3 &= -2,\\ x_2 - x_3 &\ge 1,\\ 3x_2 + x_3 &\le 5,\\ x_j \ge 0,\ j = 1,\dots,4; \end{aligned}$$

1.6. $l(\mathbf{x}) = 2x_1 - x_3 + 3x_4 \to \max,$

$$\begin{aligned} x_1 + 4x_2 + x_4 &= 2,\\ 16x_2 + x_3 - 2x_4 &= 8,\\ 5x_2 &\le 3,\\ x_j \ge 0,\ j = 1,\dots,4; \end{aligned}$$

1.7. $l(\mathbf{x}) = x_1 + x_2 \to \max,$

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + x_3 &= 4,\\ -x_1 + 2x_2 + x_4 &= 4,\\ 0 \le x_1 \le 3,\ 0 \le x_2 \le 3,\\ 0 \le x_3 \le 7,\ 0 \le x_4; \end{aligned}$$

1.8. $l(\mathbf{x}) = x_1 + x_2 \to \max,$

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 &\le 2,\\ -x_1 + 2x_2 &\le 4,\\ 2x_1 + 6x_2 &\le 6,\\ x_j \ge 0,\ j = 1,2,3; \end{aligned}$$

1.9. $l(\mathbf{x}) = 3x_3 + 4x_4 \to \max,$

$$\begin{aligned} 2x_1 - 3x_2 + x_3 &= 1,\\ -5x_1 + 2x_2 + x_4 &= 1,\\ x_j \ge 0,\ j = 1,\dots,4; \end{aligned}$$

1.10. $l(\mathbf{x}) = 9x_1 + 14x_2 + 5x_3 \to \max,$

$$\begin{aligned} 9x_1 + 4x_2 + 4x_3 &\le 54,\\ 9x_1 + 5x_2 + 5x_3 &\le 63,\\ 0 \le x_2 \le 5,\ x_1 \ge 0,\ x_3 \ge 0. \end{aligned}$$

2. Решете чрез симплекс-метод следващите задачи, като използвате зададения опорен план $\mathbf{x}^0$. Намерете всички решения в зависимост от стойностите на параметъра a.

2.1. $l(\mathbf{x}) = x_1 + x_2 + ax_3 \to \max,$

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + (a+2)x_3 &= a+3,\\ x_1 - x_2 + (a-2)x_3 &= a-3,\\ x_j \ge 0,\ j = 1,2,3,\\ a \ne 0,\ \mathbf{x}^0 = (0,1,1); \end{aligned}$$

2.2. $l(\mathbf{x}) = x_1 + ax_2 + ax_3 \to \max,$

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + (a+1)x_3 &= a+2,\\ x_1 - x_2 + (a-1)x_3 &= a-2,\\ x_j \ge 0,\ j = 1,2,3,\\ a \ne 0,\ \mathbf{x}^0 = (0,1,1); \end{aligned}$$

2.3. $l(\mathbf{x}) = x_1 + ax_2 + ax_3 \to \max,$

$$\begin{aligned} x_1 - (1+2a)x_2 + 2ax_3 &= 1-2a,\\ 2bx_1 - (1+2b)x_2 + x_3 &= 2b-1,\\ x_j \ge 0,\ j = 1,2,3,\\ 1 - 4ab \ne 0,\ \mathbf{x}^0 = (2,1,0); \end{aligned}$$

2.4. $l(\mathbf{x}) = x_1 - x_2 + ax_3 \to \max,$

$$\begin{aligned} ax_1 - x_2 + (a-1)x_3 &= a-2,\\ x_1 + ax_2 + (a+1)x_3 &= 2a+1,\\ x_j \geq 0,\ j &= 1,2,3,\\ a \neq 1,\ \mathbf{x}^0 &= (1,2,0); \end{aligned}$$

2.5. $l(\mathbf{x}) = ax_1 + x_2 + x_3 \to \max,$

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + (a-1)x_3 &= a-2,\\ x_1 + x_2 + (a+1)x_3 &= a+2,\\ x_j \geq 0,\ j &= 1,2,3,\\ a \neq 0,\ \mathbf{x}^0 &= (0,1,1). \end{aligned}$$

§ 6. Решаване на КЗ при неизвестен начален базис

Един от начините за решаване на каноничната задача (13)–(15), когато не е известен неин опорен план, е да се реши съответната т. нар. *M-задача*:

$$\begin{aligned} l_M(\widetilde{\mathbf{x}}) &= \sum_{j=1}^{n} c_j x_j - M \sum_{i=1}^{m} x_{n+i}\\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + x_{n+i} &= b_i, \quad i = 1,\dots,m,\\ x_j &\geq 0, \quad j = 1,\dots,n+m, \end{aligned} \tag{42}$$

където $M > 0$ е достатъчно голямо число.

Теорема 9. Ако $\widetilde{\mathbf{x}}^* = (x_1^*,\dots,x_n^*,x_{n+1}^*,\dots,x_{n+m}^*)$ е решение на задачата (42) и $x_{n+i}^* = 0$, $i = 1,\dots,m$, то $\mathbf{x}^* = (x_1^*,\dots,x_n^*)$ е решение на задача (13)–(15).

Теорема 10. Ако каноничната задача (13)–(15) има решение, то съществува число $M_0 > 0$, такова, че за всяко $M \geq M_0$ съответната M-задача е разрешима и последните m координати на всички нейни опорни решения са нули ($x_{n+i} = 0$, $i = 1,\dots,m$).

Тези теореми позволяват каноничната задача (13)–(15) да се решава чрез M-задачата (42). Задача (42) има опорен план $\widetilde{\mathbf{x}}^0 = (0,\dots,0,b_1,\dots,b_m)$ с базис $Б_{\widetilde{\mathbf{x}}^0} = \{x_{n+1},\dots,x_{n+m}\}$, базисна матрица $\mathbf{B} = \mathbf{E}$ и системата ѝ уравнения е в базисен вид спрямо $\widetilde{\mathbf{x}}^0$. Променливите x_{n+i}, $i = 1,\dots,m$, се наричат *изкуствени променливи*, а $Б_{\widetilde{\mathbf{x}}^0}$ — *изкуствен базис*.

След като симплекс-процедурата се приложи към M-задачата, се стига до един от следните случаи:

1. Намерен е оптимален план $\widetilde{\mathbf{x}}^* = (x_1^*,\dots,x_n^*,x_{n+1}^*,\dots,x_{n+m}^*)$ на M-задачата:

а) ако $x_{n+i}^* = 0$, $i = 1,\dots,m$, то $\mathbf{x}^* = (x_1^*,\dots,x_n^*)$ е решение на каноничната задача (13)–(15) и $l(\mathbf{x}^*) = l_M(\widetilde{\mathbf{x}}^*)$;

б) ако $\sum_{i=1}^{m} x_{n+i}^{*} > 0$, от теорема 10 следва, че множеството от планове на каноничната задача (13)–(15) е празно, т.е. тя няма решение.

2. M-задачата няма решение (функцията $l_M(\widetilde{\mathbf{x}}) \to +\infty$ в множеството от плановете ѝ). От теорема 10 следва, че и каноничната задача (13)–(15) няма решение (поради това, че множеството от плановете ѝ е празно или $l(x) \to +\infty$ в него).

При решаване на M-задачата не е необходимо да се определя числото M. Достатъчно е да се има предвид, че M е достатъчно голямо. За целта оценките Δ_j, $j = 1, \dots, n+m$, на даден опорен план се разглеждат като сума $\Delta_j = \Delta_{1j} + \Delta_{2j}M$ и тогава

$$\operatorname{sign}\Delta_j = \operatorname{sign}\Delta_{2j} \quad \text{при} \quad \Delta_{2j} \neq 0,\ j = 1, \dots, n+m.$$

За нагледност симплексната таблица се допълва с още един ред: числата Δ_{1j}, $j = 0, \dots, n+m$, се попълват в $(m+1)$-вия ред, а Δ_{2j}, $j = 0, \dots, n+m$ — в $(m+2)$-рия ред на таблицата ($\Delta_0 = \Delta_{10} + \Delta_{20}M$). Когато прилагаме критерия за оптималност или определяме ключовия стълб, се ръководим от числата Δ_{2j}, $j = 1, \dots, n+m$, докато между тях има различни от нула. При елементарно преобразуване с ключов елемент α_{pq} формулите (38) за Δ_{1j} и Δ_{2j} имат вида

$$\begin{aligned} -\Delta'_{10} &= -\Delta_{10} - \Delta_{1q}\frac{\beta_p}{\alpha_{pq}}, & -\Delta'_{20} &= -\Delta_{20} - \Delta_{2q}\frac{\beta_p}{\alpha_{pq}}; \\ \Delta'_{1j} &= \Delta_{1j} - \Delta_{1q}\frac{\alpha_{pj}}{\alpha_{pq}}, & \Delta'_{2j} &= \Delta_{2j} - \Delta_{2q}\frac{\alpha_{pj}}{\alpha_{pq}}, \quad j = 1, \dots, n+m. \end{aligned} \tag{43}$$

Възможните случаи 1) и 2), до които се стига след решаването на M-задачата, имат следната интерпретация в таблицата:

1. $\Delta_j \le 0$, $j = 1, \dots, n+m$, т.е. $\Delta_{2j} \le 0$ за $j = 1, \dots, n+m$ и $\Delta_{1j} \le 0$ за тези j, за които $\Delta_{2j} = 0$. В този случай е намерен оптимален план $\widetilde{\mathbf{x}}^{*} = (x_1^{*}, \dots, x_n^{*}, x_{n+1}^{*}, \dots, x_{n+m}^{*})$ на M-задачата:

а) ако $\Delta_{20} = 0$, то $\sum_{i=1}^{m} x_{n+i}^{*} = 0$, и $\mathbf{x}^{*} = (x_1^{*}, \dots, x_n^{*})$ е решение на каноничната задача;

б) ако $\Delta_{20} \neq 0$, то $\sum_{i=1}^{m} x_{n+i}^{*} \neq 0$, и каноничната задача няма решение — множеството от плановете ѝ е празно.

2. Съществува $\Delta_q > 0$ ($\Delta_{2q} > 0$ или $\Delta_{2q} = 0$, $\Delta_{1q} > 0$), а $\alpha_{iq} \le 0$, $i = 1, \dots, m$. Тогава M-задачата няма решение, откъдето следва, че и каноничната задача няма решение.

Забележка 1. Не е необходимо началният базис на M-задачата да е изцяло изкуствен. Ако в каноничната задача системата от уравнения е решена спрямо някои от променливите $x_1, \dots, x_n$, целесъобразно е те да се използват като базисни (вж. примерите).

Забележка 2. След излизането на някоя изкуствена променлива $x_n + i$ $(1 \le i \le m)$ от базиса, попълването на стълба x_{n+i} става излишно и той може да отпадне от таблицата.

Забележка 3. Ако за даден опорен план $\widetilde{\mathbf{x}} = (\widetilde{x}_1, \dots, \widetilde{x}_{n+m})$ на M-задачата някоя изкуствена променлива x_{n+p} $(1 \le p \le m)$ е базисна нула $(\widetilde{x}_{n+p} = 0)$, тя може да бъде изключена от базиса, като се направи елементарно преобразуване с ключов елемент $\alpha_{pq} \neq 0$, където p е редът на x_{n+p} в таблицата (ключовият ред), а q е индекс на небазисна променлива (вж. пример 14).

Забележка 4. Ако в симплексната таблица на някой опорен план $\widetilde{\mathbf{x}}$ се окаже, че $\Delta_{20} = 0$, то $\widetilde{\mathbf{x}} = (\widetilde{x}_1, \dots, \widetilde{x}_n, 0, \dots, 0)$, което означава, че или всички изкуствени променливи x_{n+i} са небазисни, или базисните измежду тях са базисни нули. Тогава $\overline{x} = (\widetilde{x}_1, \dots, \widetilde{x}_n)$ е опорен план на първоначалната канонична задача. След като се изключат от базиса изкуствените променливи (ако в него има такива), ще се получи симплексна таблица, която може да се разглежда като начална за каноничната задача (13)–(15) при начален опорен план $\overline{x}$ (в нея липсват стълбовете на изкуствените променливи и $(m + 2)$-ият ред). След като при решаването на M-задачата се стигне до такава таблица, оттук нататък се решава направо изходната канонична задача (13)–(15).

Пример 13. Да се реши задачата

$$
\begin{aligned}
&l(x) = -2x_1 - 3x_2 + 3x_3 \to \max,\\
&-2x_1 - x_2 + x_4 = 3,\\
&x_1 - x_3 = 1,\\
&3x_1 + x_3 + x_5 = 4,\\
&x_j \ge 0, \ j = 1, \dots, 5.
\end{aligned}
\tag{44}
$$

Решение. Системата уравнения е решена спрямо променливите x_4 и x_5. В M-задачата ще има само една изкуствена променлива x_6:

$$
\begin{aligned}
&l_M(\widetilde{\mathbf{x}}) = -2x_1 - 3x_2 + 3x_3 - Mx_6 \to \max,\\
&-2x_1 - x_2 + x_4 = 3,\\
&x_1 - x_3 + x_6 = 1,\\
&3x_1 + x_3 + x_5 = 4,\\
&x_j \ge 0, \ j = 1, \dots, 5.
\end{aligned}
$$

Началният опорен план е $\widetilde{\mathbf{x}}^0 = (0,0,0,3,1,4)$, $\text{Б}_{\widetilde{\mathbf{x}}^0} = \{x_4, x_6, x_5\}$. В симплексната му таблица (табл. 11) оценките Δ_j са пресметнати по формули (43). За този план $L(\widetilde{\mathbf{x}}^0) = \Delta_0 = \Delta_{10} + \Delta_{20}M = -M$.

$\widetilde{\mathbf{x}}^0$

B	$\mathbf{c}^B$	$\boldsymbol{\beta}$ 0	x_1 -2	x_2 -3	x_3 3	x_4 0	x_5 0	x_6 $-M$
x_4	0	3	-2	-1	0	1	0	0
x_6	$-M$	1	$\boxed{1}$	0	-1	0	0	1
x_5	0	4	3	0	1	0	1	0
		0	-2	-3	3	0	0	0
		1	1	0	-1	0	0	0

Таблица 11

Планът $\widetilde{\mathbf{x}}^0$ не е оптимален: $\Delta_{21} = 1 > 0$. Новата базисна променлива x_1 влиза на мястото на изкуствената променлива x_6: $\min\left(\frac{4}{3}, \frac{1}{1}\right) = 1$. Новият план (табл. 12) е $\widetilde{\mathbf{x}}' = (1,0,0,5,1,0)$ и $l_M(\widetilde{\mathbf{x}}') = -2$. В последния ред на табл. 12 $\Delta_{2j} = 0$, $j = 1,\ldots,5$, затова този ред отпада от следващите табли-

$\widetilde{\mathbf{x}}'$

B	$\mathbf{c}^B$	$\boldsymbol{\beta}$ 0	x_1 -2	x_2 -3	x_3 3	x_4 0	x_5 0
x_4	0	5	0	-1	-2	1	0
x_1	-2	1	1	0	-1	0	0
x_5	0	1	0	0	$\boxed{4}$	0	1
		2	0	-3	1	0	0
$\widetilde{\mathbf{x}}'' = \mathbf{x}^*$		0	0	0	0	0	0
x_4	0	11/2	0	-1	0	1	1/2
x_1	-2	5/4	1	0	0	0	1/4
x_3	3	1/4	0	0	1	0	1/4
		7/4	0	-3	0	0	$-1/4$

Таблици 12, 13

ци. Понеже $\Delta_3 = \Delta_{13} > 0$, x_3 влиза в базиса на мястото на x_5. Новият план (табл. 13) $\widetilde{\mathbf{x}}'' = \left(\frac{5}{4}, 0, \frac{1}{4}, \frac{11}{2}, 0, 0\right)$ е оптимален и $l_M^* = -\frac{7}{4}$. Изкуствената променлива x_6 има стойност нула, следователно $\mathbf{x}^* = \left(\frac{5}{4}, 0, \frac{1}{4}, \frac{11}{2}, 0\right)$ е решение на задача (44). Табл. 12 може да се разглежда (след зачертаването на последния ред) като начална симплексна таблица на задача (44) с начален опорен план $x^0 = (1, 0, 0, 5, 1)$.

Пример 14. Да се реши задачата

$$l(x) = -2x_1 + x_2 + x_3 \to \max$$

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + 2x_3 &= 2, \\ x_1 - 2x_2 - 4x_3 &= 2, \\ x_j \geq 0, \ \ j = 1, 2, 3. & \end{aligned}$$

Решение. Въвеждаме изцяло изкуствен базис:

$$l_M(\widetilde{\mathbf{x}}) = -2x_1 + x_2 + x_3 - M(x_4 + x_5) \to \max,$$

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 \phantom{{}+x_5} &= 2, \\ x_1 - 2x_2 - 4x_3 \phantom{{}+x_4} + x_5 &= 2, \\ x_j \geq 0, \ \ j = 1, \ldots, 5. & \end{aligned}$$

В табл. 14 и 15 $\widetilde{\mathbf{x}}^0 = (0, 0, 0, 2, 2)$, $l_M(\widetilde{\mathbf{x}}^0) = -4M$ и съответно $\widetilde{\mathbf{x}}' = (2, 0, 0, 0, 0)$,

$\widetilde{\mathbf{x}}^0$

B	$\mathbf{c}^B$	$\boldsymbol{\beta}$ 0	x_1 -2	x_2 1	x_3 1	x_4 $-M$	x_5 $-M$
x_4	$-M$	2	$\boxed{1}$	-1	2	1	0
x_5	$-M$	2	1	-2	-4	0	1
		0	-2	1	1	0	0
$\widetilde{\mathbf{x}}'$		4	2	-3	-2	0	0
x_1	-2	2	1	-1	2		0
x_5	$-M$	0	0	$\boxed{-1}$	$\boxed{-6}$		1
		4	0	-1	5		0
		0	0	-1	-6		0

Таблици 14, 15

$l_M(\widetilde{\mathbf{x}}') = -4$, който е оптимален. Изкуствените променливи x_4 и x_5 имат нулеви стойности, въпреки че x_5 е базисна (със стойност нула). Следователно

$\mathbf{x}^* = (2, 0, 0, 0)$ е решение на първоначалната канонична задача и въпреки че в табл. 15 $\Delta_{20}^* = 0$ и $\Delta_j \le 0$, $j = 1, \ldots, 5$, тя не може да се разглежда като симплексна таблица на $\mathbf{x}^*$ за каноничната задача, защото съдържа изкуствената базисна променлива x_5. Ако се нуждаем от базисен вид на каноничната задача спрямо оптималния план $\mathbf{x}^*$, можем да изключим изкуствената променлива x_5, като в базиса на нейно място въведем коя да е от променливите x_2, x_3. След въвеждането на x_2 в базиса (ключовото число е -1), получаваме табл. 16, а при въвеждане на x_3 (ключовото число е -6) — табл. 17. Те съдържат базисния вид на каноничната задача спрямо $\mathbf{x}^*$ съответно при базиси $\{x_1, x_2\}$ и $\{x_1, x_3\}$. Понеже $\mathbf{x}^*$ е изроден, критерият за оптималност не е необходимо условие и се удовлетворява при базиса на табл. 17.

$\mathbf{x}^*$

B	$\mathbf{c}^B$	$\boldsymbol{\beta}$	x_1	x_2	x_3
		0	-2	1	1
x_1	-2	2	1	0	8
x_2	1	0	0	1	$\boxed{6}$
		4	0	0	11
x_1	-2	2	1	$-4/3$	0
x_3	1	0	0	$1/6$	1
		4	0	$-11/6$	0

Таблици 16, 17

Пример 15. Да се реши, като се използва симплекс-метод, задачата

$$
\begin{aligned}
& l(x) = 2x_1 - 7x_2 + 3x_3 \to \max, \\
& x_1 + x_2 \ge 2, \\
& x_2 \le 4, \\
& x_1 - 2x_2 + x_3 = 3, \\
& x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.
\end{aligned} \tag{45}
$$

От последната симплексна таблица да се извлече възможната информация за решенията на задачата (ако има такива).

Решение. Привеждаме задачата в каноничен вид чрез допълнителните променливи x_4 и x_5 и чрез полагането $x_3 = x_3' - x_3''$:

$$
\begin{array}{rl}
 & \bar{l}(x) = 2x_1 - 7x_2 + 3x_3' - 3x_3'' \to \max, \\
 & \begin{array}{rcrcrcrcrcrcl}
x_1 & + & x_2 & & & & & - & x_4 & & & = & 2, \\
 & & x_2 & & & & & & & + & x_5 & = & 4, \\
x_1 & - & 2x_2 & + & x_3' & - & x_3'' & & & & & = & 3,
\end{array} \\
(46) & \\
 & x_1,\ x_2,\ x_3',\ x_3'',\ x_4,\ x_5 \geq 0.
\end{array}
$$

Съответната M-задача е:

$$
\begin{array}{l}
\bar{l}_M(\widetilde{\mathbf{x}}) = 2x_1 - 7x_2 + 3x_3' - 3x_3'' - Mx_6 \to \max, \\
\begin{array}{rcrcrcrcrcrcrcl}
x_1 & + & x_2 & & & & & - & x_4 & & & + & x_6 & = & 2, \\
 & & x_2 & & & & & & & + & x_5 & & & = & 4, \\
x_1 & - & 2x_2 & + & x_3' & - & x_3'' & & & & & & & = & 3,
\end{array} \\
x_1,\ x_2,\ x_3',\ x_3'',\ x_4,\ x_5,\ x_6 \geq 0.
\end{array}
$$

На табл. 18 и 19 $\widetilde{\mathbf{x}}^0 = (0,0,3,0,0,4,2)$, $l_M(\widetilde{\mathbf{x}}^0) = 9 - 2M$ и $\widetilde{\mathbf{x}}' = (2,0,1,0,0,$

$\widetilde{\mathbf{x}}^0$

$\mathbf{B}$	$\mathbf{c}^B$	$\boldsymbol{\beta}$	x_1	x_2	x_3'	x_3''	x_4	x_5	x_6
		0	2	-7	3	-3	0	0	$-M$
x_6	$-M$	2	$\boxed{1}$	1	0	0	-1	0	1
x_5	0	4	0	1	0	0	0	1	0
x_3'	3	3	1	-2	1	-1	0	0	0
		-9	-1	-1	0	0	0	0	0
$\widetilde{\mathbf{x}}'; \mathbf{x}^*$		2	1	1	0	0	-1	0	0
x_1	2	2	1	$\boxed{1}$	0	0	-1	0	
x_5	0	4	0	-1	0	0	0	1	
x_3'	3	1	0	-3	1	-1	1	0	
		-7	0	0	0	0	-1	0	
		0	0	0	0	0	0	0	

Таблици 18, 19

$4,0)$, $l_M(\widetilde{\mathbf{x}}') = 7$, който е решение. Изкуствената променлива x_6 е небазисна, следователно $\mathbf{x}^* = (2, 0, 1, 0, 0, 4)$ е решение на каноничната задача (46). Решението $\mathbf{x}^*_{\text{и}}$ на изходната задача (45) получаваме от $\mathbf{x}^*$, като вземем предвид полагането $x_3 = x'_3 - x''_3$: $\mathbf{x}^*_{\text{и}} = (2, 0, 1)$ и $l^* = \bar{l}^* = l_M(\widetilde{\mathbf{x}}') = 7$.

Табл. 19 (без последния ред) е симплексната таблица на $\mathbf{x}^*$. Понеже $\Delta_2 = 0$, $\Delta''_3 = 0$, то $\mathbf{x}^*$ не е единствено решение на задача (46). След въвеждането на x_2 в базиса се преминава към съседното опорно решение (табл. 20) $\mathbf{x}^{**} =$

$\mathbf{x}^{**}$

B	$\mathbf{c}^B$	$\boldsymbol{\beta}$ 0	x_1 2	x_2 -7	x'_3 3	x''_3 -3	x_4 0	x_5 0
x_2	-7	2	1	1	0	0	-1	0
x_5	0	2	-1	0	0	0	1	1
x'_3	3	7	3	0	1	-1	-2	0
		-7	0	0	0	0	-1	0

Таблица 20

$(0, 2, 7, 0, 0, 2)$. Следователно решения са и всички точки

$$\mathbf{x}^\lambda = \lambda\mathbf{x}^* + (1-\lambda)\mathbf{x}^{**} = (2\lambda, 2-2\lambda, 7-6\lambda, 0, 0, 2+2\lambda) \text{ за } \lambda \in [0, 1].$$

Понеже елементите на стълба x''_3 над индексния ред са неположителни, от $\mathbf{x}^*$ излиза неограничен ръб (при $x''_3 = t \geq 0$) с направляващ вектор $p^* = (0, 0, 1, 1, 0, 0)$, чиито точки $\mathbf{x}^t = \mathbf{x}^* + t\mathbf{p}^* = (2, 0, 1+t, t, 0, 4)$ са също решения на задачата (46) при $t \geq 0$ (вж. формула (33)). Съгласно теорема 5 решения на каноничната задача (46) са

$$\mathbf{x}^{\lambda t} = \lambda\mathbf{x}^* + (1-\lambda)\mathbf{x}^{**} + t\mathbf{p}^* = (2\lambda, 2-2\lambda, 7-6\lambda+t, t, 0, 2+2\lambda)$$

за $\lambda \in [0, 1]$, $t \geq 0$. Съответните решения $\mathbf{x}^*_\lambda$ за изходната задача (45) са $\mathbf{x}^*_\lambda = (2\lambda, 2-2\lambda, 7-6\lambda)$, $\lambda \in [0, 1]$. При $\lambda = 0$ имаме опорното решение $\mathbf{x}^{**}_{\text{и}} = (0, 2, 7)$, а при $\lambda = 1$ — опорното решение $\mathbf{x}^*_{\text{и}} = (2, 0, 1)$. Решенията на задача (45) са точките от отсечката $\mathbf{x}^*_{\text{и}}\mathbf{x}^{**}_{\text{и}}$.

Пример 16. Да се реши задачата

$$\begin{aligned} l(x) = -5x_1 + 2x_2 &\to \min, \\ x_1 - x_2 &\geq 2, \\ x_1 - 2x_2 &\geq 0, \\ 2x_1 - x_2 &\leq 1, \\ x_1 &\geq 0. \end{aligned} \tag{47}$$

Решение. Каноничната задача е ($x_2 = x_2' - x_2''$):

$$
\begin{array}{ll}
 & \bar{l}(x) = 5x_1 - 2x_2' + 2x_2'' \to \max, \\
 & \begin{array}{rcrcrcrcrcrcl}
x_1 & - & x_2' & + & x_2'' & - & x_3 & & & & & = & 2, \\
-x_1 & + & 2x_2' & - & 2x_2'' & & & + & x_4 & & & = & 0, \\
2x_1 & - & x_2' & + & x_2'' & & & & & + & x_5 & = & 1,
\end{array} \\
(48) & x_1, x_2', x_2'', x_3, x_4, x_5 \ge 0.
\end{array}
$$

Системата уравнения (48) е решена спрямо x_4 и x_5, затова въвеждаме само една изкуствена променлива (x_6). Получаваме M-задачата:

$$
\begin{array}{l}
l_M(\widetilde{\mathbf{x}}) = 5x_1 - 2x_2' + 2x_2'' - Mx_6 \to \max, \\
\begin{array}{rcrcrcrcrcrcrcl}
x_1 & - & x_2' & + & x_2'' & - & x_3 & & & & & + & x_6 & = & 2, \\
-x_1 & + & 2x_2' & - & 2x_2'' & & & + & x_4 & & & & & = & 0, \\
2x_1 & - & x_2' & + & x_2'' & & & & & + & x_5 & & & = & 1,
\end{array} \\
x_1, x_2', x_2'', x_3, x_4, x_5, x_6 \ge 0.
\end{array}
$$

Табл. 21, 22 съдържат решението на задачата. Планът $\widetilde{\mathbf{x}}' = (0, 0, 1, 0, 2, 1)$ е оптимален за M-задачата, но изкуствената променлива x_6 има ненулева стойност, следователно каноничната задача (48) няма решение, понеже

$\widetilde{\mathbf{x}}^0$

$\mathbf{B}$	$\mathbf{c}^B$	β / 0	x_1 / 5	x_2' / -2	x_2'' / 2	x_3 / 0	x_4 / 0	x_5 / 0	x_6 / $-M$
x_6	$-M$	2	1	−1	1	−1	0	0	1
x_4	0	0	−1	2	−2	0	1	0	0
x_5	0	1	2	−1	$\boxed{1}$	0	0	1	0
		0	5	−2	2	0	0	0	0
$\widetilde{\mathbf{x}}'$		2	1	−1	1	−1	0	0	0
x_6	$-M$	1	−1	0	0	−1	0	−1	1
x_4	0	2	3	0	0	0	1	2	0
x_2''	2	1	2	−1	1	0	0	1	0
		−2	1	0	0	0	0	−2	0
		1	−1	0	0	−1	0	−1	0

Таблици 21, 22

множеството ѝ от планове е празно. Това означава, че и изходната задача (47) няма решение по същата причина (проверете геометрично!).

Пример 17. Да се реши задачата

$$
(49)\qquad \begin{aligned}
&l(x) = x_1 \to \max,\\
&-x_1 + 2x_2 \ge 0,\\
&-x_1 + x_2 \le 1,\\
&x_1 + x_2 \ge 1,\\
&x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.
\end{aligned}
$$

Решение. Каноничната задача е:

$$
(50)\qquad \begin{aligned}
&\bar{l}(x) = x_1 \to \max,\\
&x_1 - 2x_2 + x_3 = 0,\\
&-x_1 + x_2 + x_4 = 1,\\
&x_1 + x_2 - x_5 = 1,\\
&x_j \ge 0,\ j = 1, \dots, 5,
\end{aligned}
$$

а M-задачата —

$$
\begin{aligned}
&l_M(\tilde{\mathbf{x}}) = x_1 - Mx_6 \to \max,\\
&x_1 - 2x_2 + x_3 = 0,\\
&-x_1 + x_2 + x_4 = 1,\\
&x_1 + x_2 - x_5 + x_6 = 1,\\
&x_j \ge 0,\ j = 1, \dots, 6.
\end{aligned}
$$

M-задачата е решена на табл. 23–25. От табл. 25 се вижда, че $\Delta_5 > 0$, $\alpha^5 \le 0$, т.е. M-задачата няма решение: $l_M(\tilde{\mathbf{x}})$ расте неограничено в множеството ѝ от планове. Следователно каноничната задача (50), а оттам и изходната задача (49) нямат решиние. В случая е ясна причината за това. Табл. 24 и 25 не съдържат изкуствената променлива x_6 и могат да се разглеждат като симплексни таблици на каноничната задача (50) при опорни планове $x' = (0, 1, 2, 0, 0)$ и $x'' = (\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, 0, \frac{4}{3}, 0)$. От табл. 25 е ясно, че целевата функция $\bar{l}(x)$ е неограничена в множеството ѝ от планове. Следователно и задача (49) няма решение по същата причина (проверете геометрично!).

Задачи

1. Да се решат със симплекс-метода дадените задачи. Ако задачата е разрешима, да се намерят:

$\widetilde{\mathbf{x}}^0$

$\mathbf{B}$	$\mathbf{c}^B$	$\boldsymbol{\beta}$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
		0	1	0	0	0	0	$-M$
x_3	0	0	1	-2	1	0	0	0
x_4	0	1	-1	1	0	1	0	0
x_6	$-M$	1	1	$\boxed{1}$	0	0	-1	1
		0	1	0	0	0	0	0
$\widetilde{\mathbf{x}}'$; $\mathbf{x}'$		1	1	1	0	0	-1	0
x_3	0	2	$\boxed{3}$	0	1	0	-2	
x_4	0	0	-2	0	0	1	1	
x_2	0	1	1	1	0	0	-1	
		0	1	0	0	0	0	
$\widetilde{\mathbf{x}}''$; $\mathbf{x}''$		0	0	0	0	0	0	
x_1	1	$2/3$	1	0	$1/3$	0	$-2/3$	
x_4	0	$4/3$	0	0	$2/3$	1	$-1/3$	
x_2	0	$1/3$	0	1	$-1/3$	0	$-1/3$	
		$-2/3$	0	0	$-1/3$	0	$2/3$	

Таблици 23, 24, 25

а) всички съседни опорни решения;

б) решенията, които лежат върху неограничени ръбове, излизащи от намерения оптимален план;

в) решенията, които следват от а) и б) (теорема 5):

1.1. $l(x) = 2x_1 + 16x_2 \to \max,$

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 &\geq -4, \\ 2x_1 - x_2 &\leq 6, \\ -x_1 - 8x_2 &= -8, \\ x_j \geq 0,\ j &= 1,2; \end{aligned}$$

1.2. $l(x) = 3x_1 + x_2 + 2x_3 \to \max,$

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 3x_3 &= 1, \\ x_1 - 2x_3 &\geq 3, \\ -x_1 + x_3 &\geq -2, \\ x_1 \geq 0,\ x_2 &\geq 0; \end{aligned}$$

1.3. $l(x) = 6x_1 + 4x_2 - 14x_3 \to \max,$
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - 2x_3 &= 3,\\ x_2 + x_3 &\geq 2,\\ 0 \leq x_3 &\leq 4,\\ x_2 &\geq 0; \end{aligned}$$

1.4. $l(x) = 4x_1 - 10x_2 \to \min,$
$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 &\leq -1,\\ -4x_1 + 2x_2 &\geq 0,\\ -x_1 - x_2 &\leq -2,\\ x_2 &\geq 0; \end{aligned}$$

1.5. $l(x) = 2x_2 - x_3 \to \min,$
$$\begin{aligned} x_1 - 3x_2 + x_3 &= 3,\\ 2x_1 + 3x_2 &\geq 6,\\ -x_1 + x_2 &\leq 1,\\ x_1 \geq 0,\ x_3 &\geq 0; \end{aligned}$$

1.6. $l(x) = -2x_1 - 6x_2 \to \max,$
$$\begin{aligned} 4x_1 + x_2 &\geq -9,\\ x_1 + 3x_2 &\geq 6,\\ -3x_1 + 7x_2 &\leq 61; \end{aligned}$$

1.7. $l(x) = x_1 + 2x_2 + x_3 \to \max,$
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 &= 1,\\ x_1 + 5x_2 - 2x_3 &\geq 1,\\ x_1 - 3x_2 &= 2,\\ x_j \geq 0,\ j &= 1, 2, 3; \end{aligned}$$

1.8. $l(x) = x_1 + x_2 \to \max,$
$$\begin{aligned} -x_1 + x_2 &\geq -1,\\ x_1 + x_2 &= 1,\\ x_1 + 2x_2 &\leq 2;\\ x_1 \geq 0,\ x_2 &\geq 0; \end{aligned}$$

1.9. $l(x) = 2x_1 - 2x_2 + x_3 \to \min,$
$$\begin{aligned} x_1 - 3x_2 + x_3 &= 3,\\ x_1 + x_2 &\geq 1,\\ 2x_1 - x_2 &\geq -2,\\ x_j \geq 0,\ j &= 1, 2, 3; \end{aligned}$$

1.10. $l(x) = 4x_1 + 6x_2 \to \max,$
$$\begin{aligned} -x_1 + x_2 &\geq -4,\\ 5x_1 - 3x_2 &\geq 5,\\ 2x_1 + 3x_2 &\leq 23;\\ x_1 \geq 0,\ x_2 &\geq 0; \end{aligned}$$

1.11. $l(x) = 2x_1 - 8x_2 \to \min,$
$$\begin{aligned} -2x_1 + 3x_2 &\leq 9,\\ x_1 + 2x_2 &\geq 4,\\ x_1 - 4x_2 &\geq -17;\\ x_1 &\geq 0; \end{aligned}$$

1.12. $l(x) = -6x_1 + 4x_2 + 2x_3 \to \max,$
$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 + x_3 &= 1,\\ -x_1 + x_2 &\geq -4,\\ -x_1 + 2x_2 &\leq -3,\\ x_1 \geq 0,\ x_2 &\geq 0. \end{aligned}$$

2. По дадените симплексни таблици на опорен план $\widetilde{\mathbf{x}}$ на M-задача напишете M-задачата, изходната канонична задача, компонентите на $\widetilde{\mathbf{x}}$ и намерете за кои стойности на параметрите a и b:

а) $\widetilde{\mathbf{x}}$ е решение на задачата;

б) $\widetilde{\mathbf{x}}$ не е единствено решение. Намерете съседните на $\widetilde{\mathbf{x}}$ опорни решения (ако има такива). Напишете аналитичния израз на тези решения на M-задачата, които следват от намерените опорни решения и информацията в таблицата;

в) каноничната задача няма решение — посочете причината;

г) каноничната задача има решение в случаите а) и б). Напишете вида на решенията;

д) M-задачата е изродена.

2.1. $\widetilde{\mathbf{x}}$

B	β	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
		2	0	4	0	$-M$
x_5	b	0	a	-2	0	1
x_1	1	1	$-a$	-1	0	0
x_4	2	0	1	1	1	0

2.2. $\widetilde{\mathbf{x}}$

B	β	x_1	x_2	x_3	x_4
		0	1	-1	$-M$
x_1	b	1	$-3b$	0	0
x_4	a	0	0	0	1
x_3	3	0	$-b$	1	0

2.3. $\widetilde{\mathbf{x}}$

B	β	x_1	x_2	x_3	x_4
		0	0	b	$-M$
x_2	1	1	1	$1-b$	0
x_4	$a-1$	$a-1$	0	0	1

2.4. $\widetilde{\mathbf{x}}$

B	β	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
		0	1	b	0	$-M$
x_3	a	b	a	1	0	0
x_4	1	1	0	0	1	0
x_5	b	b	b	0	0	1

3. Да се намерят всички точки $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ от множеството

$$P : \begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 = 4, \\ -x_1 - x_2 + x_4 = 3, \\ x_j \geq 0, \ j = 1, \dots, 4, \end{cases}$$

за които функцията $l(\mathbf{x}) = 2x_1 - x_2$ има стойност 20.

4. В зад. 1.4 да се намерят всички точки x, за които целевата функция $l(x)$ има стойност -100.

5. Във всяка от следващите задачи е дадена симплексната таблица на опорен план $\widetilde{\mathbf{x}}$ на M-задача, в чийто базис участват изкуствени променливи. Напишете M-задачата, изходната канонична задача и компонентите на $\widetilde{\mathbf{x}}$.

а) Можете ли (от таблицата) да посочите опорен план $\widetilde{\mathbf{x}}$ на каноничната задача?

б) С най-малко колко елементарни преобразувания можете да преминете към базис, в който няма изкуствени променливи? Извършете ги (ако има такива)! Напишете компонентите на получения план.

5.1. $\widetilde{\mathbf{x}}$

B	β	x_1	x_2	x_3	x_4
		0	2	1	$-M$
x_1	3	1	2	1	0
x_4	0	0	-1	-3	1

5.2. $\widetilde{\mathbf{x}}$

B	β	x_1	x_2	x_3	x_4
		1	1	1	$-M$
x_3	2	1	2	1	0
x_4	0	-1	0	0	1

5.3. $\widetilde{\mathbf{x}}$

B	β	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
		1	1	0	$-M$	$-M$
x_1	5	1	2	0	0	0
x_4	0	0	-1	0	1	0
x_5	0	0	-2	-4	0	1

5.4. $\widetilde{\mathbf{x}}$

B	β	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
		1	1	0	$-M$	$-M$
x_1	5	1	2	1	0	0
x_4	0	0	-1	1	1	0
x_5	0	0	-2	0	0	1

6. Спомагателна задача на каноничната задача (13)–(15) се нарича задачата

$$
(*)\qquad
\begin{aligned}
\bar{l}(\widetilde{\mathbf{x}}) &= -\sum_{i=1}^{m} x_{n+i} \to \max,\\
\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \,+\, x_{n+i} &= b_i,\ i = 1, \ldots, m,\\
x_j \ge 0,& \qquad j = 1, \ldots, n+m.
\end{aligned}
$$

Променливите x_{n+i}, $i = 1, \ldots, m$, се наричат изкуствени променливи. Докажете, че:

а) задачата $(*)$ е разрешима;

б) ако $\bar{l}^* < 0$, множеството от планове P на задача (13)–(15) е празно;

в) ако $\bar{l}^* = 0$ и $\widetilde{\mathbf{x}}^* = (x_1^*, \ldots, x_{n+m}^*)$ е опорно решение на задачата, то $x^0 = (x_1^*, \ldots, x_n^*)$ е опорен план на задачата (13)–(15).

7. Опишете процедура за решаване на канонична задача без известен начален базис, като вместо M-задачата използвате спомагателната задача $(*)$.

8. Обосновете забележка 3.

§ 7. Двойнственост в ЛО

Определение 9. На задачата

$$l(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max, \tag{51}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i, \qquad i = 1, \dots, s, \tag{52}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, \qquad i = s+1, \dots, m, \tag{53}$$

$$x_j \geq 0, \qquad j = 1, \dots, p,$$

двойнствена (*спрегната*) се нарича задачата

$$g(\mathbf{y}) = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i \to \min, \tag{54}$$

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \geq c_j, \qquad j = 1, \dots, p, \tag{55}$$

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i = c_j, \qquad j = p+1, \dots, n, \tag{56}$$

$$y_i \geq 0, \qquad i = 1, \dots, s,$$

Определение 9 показва, че двойнствената задача се образува по следните правила:

1. В двойнствената задача се минимизира функцията $g(\mathbf{y})$, чиито коефициенти са свободните членове в ограниченията (52) на изходната задача. Аналогична е връзката и между функцията $l(\mathbf{x})$ и ограниченията (55) на двойнствената задача.

2. Матрицата от коефициентите пред неизвестните в ограниченията (55) на двойнствената задача се получава от матрицата $A = (a_{ij})_{m \times n}$ на ограниченията (52) в изходната задача чрез транспониране.

3. Има взаимно еднозначно съответствие между променливите на изходната задача и ограниченията на двойнствената задача: j-тото ограничение от (55) в двойнствената задача е неравенство, ако върху x_j е наложено условие за неотрицателност, и е уравнение — в противен случай

(x_j — свободна променлива). Аналогична е връзката и между ограниченията (52) в изходната задача и променливите на двойнствената задача.

От своя страна задача (51)–(53) е двойнствена на задача (54)–(56). Затова двете задачи се наричат *двойка спрегнати* (*двойнствени*) задачи.

Определение 10. Условията (ограниченията)

$$
\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \le b_i \quad \text{и} \quad y_i \ge 0 \quad \text{за фиксирано } i,\ i = 1, \dots, s, \\
x_j \ge 0 \quad \text{и} \quad \sum_{i=1}^{m} a_{ij}y_i \ge c_j \quad \text{за фиксирано } j,\ j = 1, \dots, p,
\end{aligned} \tag{57}
$$

се наричат *двойка спрегнати условия*.

Определение 11. Едно условие (от тип неравенство) в задачата на ЛО се нарича *свободно*, ако за поне един оптимален план на задачата е удовлетворено като строго неравенство и *закрепено*, ако всеки оптимален план го удовлетворява като равенство.

Теорема 11 (първа теорема за двойнственост)**.** Двойката спрегнати задачи (51)–(53) и (54)–(56) едновременно имат или нямат решение. При това, ако $\mathbf{x}^*$ и $\mathbf{y}^*$ са съответно техни решения, то $l(\mathbf{x}^*) = g(\mathbf{y}^*)$.

Следствие 1. Необходимо и достатъчно условие за оптималност на плановете $\mathbf{x}^*$ и $\mathbf{y}^*$ на двойката спрегнати задачи е $l(\mathbf{x}^*) = g(\mathbf{y}^*)$.

Следствие 2. Необходимо и достатъчно условие за разрешимост на двойката спрегнати задачи е всяка от тях да има поне един план.

Следствие 3. Ако в едната от двойката спрегнати задачи целевата функция е неограничена в множеството от плановете ѝ, то множеството от планове на другата задача е празно.

Следствие 4. Ако $\mathbf{x}^*$ е опорно решение на задачата (51)–(53), $\mathbf{B}$— базисната му матрица, а $\mathbf{c}^B$— векторът от коефициентите пред базисните му променливи в целевата функция, то $\mathbf{y}^* = \mathbf{c}^B\mathbf{B}^{-1}$ е решение на спрегнатата задача (54)–(56). Аналогична е връзката, ако се изходи от опорно решение на задачата (54)–(56).

Теорема 12 (втора теорема за двойнственост)**.** Ако двойката спрегнати задачи (51)–(53) и (54)–(56) имат решение, то от всяка двойка спрегнати условия едното е свободно, а другото — закрепено.

Следователно, ако $\mathbf{x}^*$ и $\mathbf{y}^*$ са решения на двойката спрегнати задачи, то за спрегнатите условия (57) имаме

$$
\begin{aligned}
&\left[\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j^* - b_i\right] y_i^* = 0, \qquad i = 1, \dots, s,\\
(58) \qquad &\left[\sum_{i=1}^{m} a_{ij}y_i^* - c_j\right] x_j^* = 0, \qquad j = 1, \dots, p.
\end{aligned}
$$

Пример 18. Да се напише двойнствената задача на задачата

$$
(59) \qquad
\begin{aligned}
&l(\mathbf{x}) = 9x_1 + 5x_2 + 5x_3 \to \max,\\
&\begin{array}{rcrcrcr}
 & & x_2 & & & \le & 5,\\
9x_1 & + & 4x_2 & + & 4x_3 & = & 54,\\
 & - & x_2 & - & x_3 & \ge & -9,
\end{array}\\
&x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.
\end{aligned}
$$

и да се провери дали $\overline{x} = (2, 0, 9)$ и $\overline{y} = (0, 1, 1)$ са съответно решения на задача (59) и на нейната спрегната задача.

Решение. Спрегнатата задача е (третото ограничение в (59) умножаваме предварително с -1)

$$
(60) \qquad
\begin{aligned}
&g(\mathbf{y}) = 5y_1 + 54y_2 + 9y_3 \to \min,\\
&\begin{array}{rcrcrcr}
 & & 9y_2 & & & \ge & 9,\\
y_1 & + & 4y_2 & + & y_3 & \ge & 5,\\
 & & 4y_2 & + & y_3 & = & 5,
\end{array}\\
&y_1 \ge 0,\ y_3 \ge 0.
\end{aligned}
$$

Елементарно се проверява, че $\overline{x}$ и $\overline{y}$ са планове съответно на задачи (59) и (60), и понеже $l(\overline{x}) = g(\overline{y}) = 63$, то съгласно следствие 1 те са оптимални.

Пример 19. Проверете дали $\mathbf{x}^* = (3, 0, 1, 3)$ е решение на задачата

$$
\begin{aligned}
&l(\mathbf{x}) = 2x_1 - x_2 + 4x_3 - 6x_4 \to \max,\\
&\begin{array}{rcrcrcrcr}
3x_1 & - & x_2 & & & + & 2x_4 & \le & 16,\\
-x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & + & 2x_4 & = & 4,\\
 & - & x_2 & - & 3x_3 & + & x_4 & = & 0,
\end{array}\\
&x_j \ge 0,\ j = 1, \dots, 4.
\end{aligned}
$$

Решение. Спрегнатата задача е

$$
\begin{aligned}
& g(\mathbf{y}) = 16y_1 + 4y_2 \to \min,\\
& \begin{array}{rcrcrcr}
3y_1 & - & y_2 & & & \geq & 2,\\
-y_1 & - & 2y_2 & - & y_3 & \geq & -1,\\
& & y_2 & - & 3y_3 & \geq & 4,\\
2y_1 & + & 2y_2 & + & y_3 & = & -6,
\end{array}\\
& y_1 \geq 0.
\end{aligned}
$$

Допускаме, че $\mathbf{x}^*$ е решение. Тогава съгласно теорема 12 в двойките спрегнати условия

$$
\begin{array}{rcrcrcrcl}
3x_1 - x_2 + 2x_4 & \leq & 16 & \text{и} & y_1 & & & \geq & 0,\\
x_1 & \geq & 0 & \text{и} & 3y_1 - y_2 & & & \geq & 2,\\
x_2 & \geq & 0 & \text{и} & -y_1 - 2y_2 - y_3 & & & \geq & -1,\\
x_3 & \geq & 0 & \text{и} & y_2 - 3y_3 & & & \geq & 4,\\
x_4 & \geq & 0 & \text{и} & 2y_1 + 2y_2 + y_3 & & & \geq & -6
\end{array}
$$

едното е свободно, другото — закрепено, т.е.

$$
\text{от} \begin{cases} x_1^* = 3 > 0 \\ x_3^* = 1 > 0 \\ x_4^* = 3 > 0 \end{cases} \qquad \text{следва} \qquad \begin{cases} 3y_1^* - y_2^* = 2 \\ y_2^* - 3y_3^* = 4 \\ 2y_1^* + 2y_2^* + y_3^* = -6 \end{cases}
$$

за всеки оптимален план $\mathbf{y}^* = (y_1^*, y_2^*, y_3^*)$ на двойнствената задача. Решаваме системата и получаваме $\mathbf{y}^* = (0, -2, -2)$. Но $\mathbf{y}^*$ удовлетворява и останалите ограничения на двойнствената задача. Така, допускайки, че $\mathbf{x}^*$ е оптимален, намерихме един план на двойнствената задача. Понеже $l(\mathbf{x}^*) = g(\mathbf{y}^*) = -8$, то $\mathbf{x}^*$ наистина е оптимален съгласно следствие 1.

Пример 20. Да се провери дали $\mathbf{x}^* = (3, 0, 1, 3)$ е решение на задачата

$$
\begin{aligned}
& l(\mathbf{x}) = -x_1 + 3x_2 + x_4 \to \min,\\
& \begin{array}{rcrcrcrcr}
2x_1 & & & - & x_3 & + & 2x_4 & = & 11,\\
x_1 & + & x_2 & & & - & x_4 & = & 0,\\
& & x_2 & - & 2x_3 & + & 3x_4 & \geq & 7,
\end{array}\\
& x_1 \geq 0.
\end{aligned}
$$

Решение. Спрегнатата задача на дадената е:

$$g(\mathbf{y}) = 11y_1 + 7y_3 \to \max,$$

$$\begin{aligned} 2y_1 + y_2 \qquad &\le -1, \\ y_2 - \ y_3 &= \ \ 3, \\ -y_1 \qquad + 2y_3 &= \ \ 0, \\ 2y_1 - y_2 - 3y_3 &= \ \ 1, \\ y_3 &\ge \ \ 0. \end{aligned}$$

Системата ограничения на спрегнатата задача е несъвместима — трите уравнения дават

$$y_2 = 3 + y_3, \ y_1 = 2y_3 \text{ и } 2y_1 - y_2 - 3y_3 = 4y_3 - 3 - y_3 - 3y_3 = -3 \neq 1,$$

т.е. множеството ѝ от планове е празно. От теорема 11 следва, че и изходната задача е неразрешима.

Пример 21. Да се провери дали условието $x_2 \ge 0$ е свободно или закрепено в задачата

$$l(\mathbf{x}) = 3x_2 + 6x_3 + x_4 - 15x_5 \to \max,$$

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + x_3 \qquad - 2x_5 &\le 2, \\ -x_1 \qquad + x_3 + x_4 + 3x_5 &\le 1, \\ x_j \ge 0, \ j = 1, \dots, 5. \end{aligned}$$

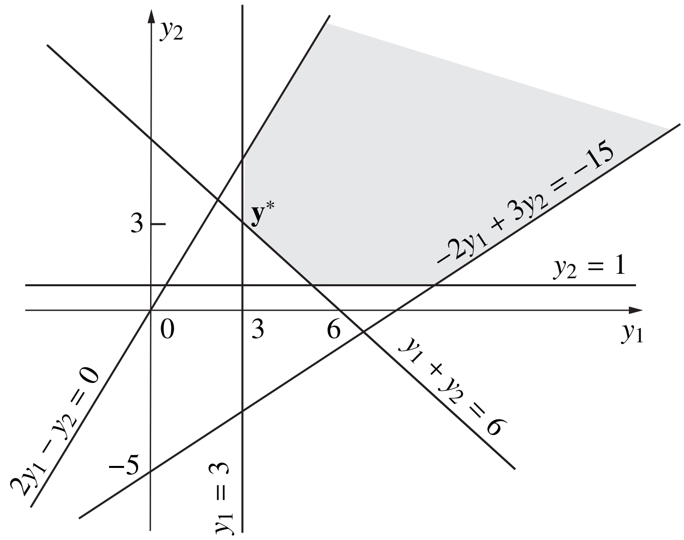
Решение. Двойнствената задача

$$g(\mathbf{y}) = 2y_1 + y_2 \to \min,$$

$$\begin{aligned} 2y_1 - \ y_2 &\ge \ \ 0, \\ y_1 \qquad &\ge \ \ 3, \\ y_1 + \ y_2 &\ge \ \ 6, \\ y_2 &\ge \ \ 1, \\ -2y_1 + 3y_2 &\ge -15, \\ y_1 \ge 0, \ y_2 \ge 0 \end{aligned}$$

може да бъде решена геометрично (фиг. 4). Решението е $\mathbf{y}^* = (3, 3)$, $g^* = 9$. Имаме

$$\begin{aligned} 2y_1^* - \ y_2^* &= 3 > \ \ 0, \\ y_2^* &= 3 > \ \ 1, \\ -2y_1^* + 3y_2^* &= 3 > -15, \\ y_1^* \qquad &= 3 > \ \ 0, \\ y_2^* &= 3 > \ \ 0. \end{aligned}$$



Фиг. 4

Следователно всеки оптимален план $\mathbf{x}^*$ на изходната задача удовлетворява съответните спрегнати условия като равенства

$$\begin{aligned}
&x_1^* = 0,\ x_4^* = 0,\ x_5^* = 0,\\
&2x_1^* + x_2^* + x_3^* \qquad - 2x_5^* = 2,\\
&-x_1^* \qquad + x_3^* + x_4^* + 3x_5^* = 1,
\end{aligned}$$

откъдето $\mathbf{x}^* = (0, 1, 1, 0, 0,)$. Понеже $x_2^* = 1 > 0$, условието $x_2^* \geq 0$ е свободно.

Пример 22. Да се реши задачата:

$$l(\mathbf{x}) = 3x_1 + x_2 + 2x_3 \to \max,$$

$$\begin{aligned}
x_1 + x_2 + 3x_3 &= 1,\\
x_1 \qquad - 2x_3 &\geq 3,\\
-x_1 \qquad + x_3 &\geq -2,\\
x_1 \geq 0,\ x_2 &\geq 0.
\end{aligned} \tag{61}$$

Да се напише спрегнатата ѝ задача и да се намери нейното решение, като се използува симплексната таблица на намерения оптимален план на изходната задача.

Решение. Ще използуваме следствие 4: ако $\mathbf{x}^*$ е опорно решение на изходната задача и $\mathbf{B}$ е базисната му матрица, то $\mathbf{y}^* = \mathbf{c}^B\mathbf{B}^{-1}$ е решение на двойнствената задача. Канонизираме задача (61), като полагаме $x_3 = x_3' - x_3''$:

$$
\tag{62}
\begin{aligned}
&\bar{l}(x) = 3x_1 + x_2 + 2x_3' - 2x_3'' \to \max,\\
&\begin{array}{rcrcrcrcrcl}
x_1 & + & x_2 & + & 3x_3' & - & 3x_3'' & & & & = 1,\\
x_1 & & & - & 2x_3' & + & 2x_3'' & - & x_4 & & = 3,\\
x_1 & & & - & x_3' & + & x_3'' & & & + x_5 & = 2,
\end{array}\\
&x_1, x_2, x_3', x_3'', x_4, x_5 \ge 0.
\end{aligned}
$$

Съответната M-задача е:

$$
\begin{aligned}
&l_M(\widetilde{x}) = 3x_1 + x_2 + 2x_3' - 2x_3'' - Mx_6,\\
&\begin{array}{rcrcrcrcrcrcl}
x_1 & + & x_2 & + & 3x_3' & - & 3x_3'' & & & & & & = 1,\\
x_1 & & & - & 2x_3' & + & 2x_3'' & - & x_4 & & & + x_6 & = 3,\\
x_1 & & & - & x_3' & + & x_3'' & & & + & x_5 & & = 2,
\end{array}\\
&x_1, x_2, x_3', x_3'', x_4, x_5, x_6 \ge 0.
\end{aligned}
$$

Последователните симплексни таблици са 26–28. В табл. 27 и 28 стълбът x_6 продължава да участва, защото обратната базисна матрица на всеки опорен план се намира в стълбовете, образуващи началния базис. В нашия случай начален базис е $\{x_2, x_6, x_5\}$ и съответните стълбове в табл. 26 съдържат елементите на обратната базисна матрица на решението $\widetilde{\mathbf{x}}^* = (1, 3, 0, 1, 0, 0, 0)$, съответно на решението $\mathbf{x}^* = (1, 3, 0, 1, 0, 0)$ на каноничната задача (62):

$$
B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -5 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}
$$

Решението на изходната задача е $\mathbf{x}_{\text{и}}^* = (1, 3, -1)$ и $l^* = \bar{l}^* = 4$.

Двойнствената задача на каноничната задача (62) е

$$
\tag{63}
\begin{aligned}
&g(\mathbf{y}) = y_1 + 3y_2 + 2y_3 \to \min,\\
&\begin{array}{rcrcrcl}
y_1 & + & y_2 & + & y_3 & \ge & 3,\\
y_1 & & & & & \ge & 1,\\
3y_1 & - & 2y_2 & - & y_3 & \ge & 2,\\
-3y_1 & + & 2y_2 & + & y_3 & \ge & -2,\\
& & -y_2 & & & \ge & 0,\\
& & & & y_3 & \ge & 0.
\end{array}
\end{aligned}
\qquad
\left.\begin{array}{l} 3y_1 - 2y_2 - y_3 \ge 2,\\ -3y_1 + 2y_2 + y_3 \ge -2 \end{array}\right\} \iff 3y_1 - 2y_2 - y_3 = 2,
$$

$\widetilde{\mathbf{x}}^0$

$\mathbf{B}$	$\mathbf{c}^B$	β	x_1	x_2	x_3'	x_3''	x_4	x_5	x_6
		0	3	1	2	-2	0	0	$-M$
x_2	1	1	1	1	3	-3	0	0	0
x_6	$-M$	3	1	0	-2	$\boxed{2}$	-1	0	1
x_5	0	2	1	0	-1	1	0	1	0
		-1	2	0	-1	1	0	0	0
$\widetilde{\mathbf{x}}'$		3	1	0	-2	2	-1	0	0
x_2	1	$11/2$	$5/2$	1	0	0	$-3/2$	0	$3/2$
x_3''	-2	$3/2$	$1/2$	0	-1	1	$-1/2$	0	$1/2$
x_5	0	$1/2$	$\boxed{1/2}$	0	0	0	$1/2$	1	$-1/2$
		$-5/2$	$3/2$	0	0	0	$1/2$	0	$-1/2$
$\widetilde{\mathbf{x}}^*$		0	0	0	0	0	0	0	-1
x_2	1	3	0	1	0	0	-4	-5	4
x_3''	-2	1	0	0	-1	1	-1	-1	1
x_1	3	1	1	0	0	0	1	2	-1
		-4	0	0	0	0	-1	-3	1

Таблици 26, 27, 28

От табл. 28 може да се намери решението $\mathbf{y}^*$ (следствие 4):

$$\mathbf{y}^* = \mathbf{c}^B\mathbf{B}^{-1} = (1, -2, 3)\begin{pmatrix} 1 & 4 & -5 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} = (1, -1, 3).$$

Двойнствената задача на изходната задача (61) (второто и третото ограничение в (61) са умножени предварително с -1) е:

$$g(\mathbf{y}) = y_1 - 3y_2 + 2y_3 \to \min,$$

$$(64) \qquad \begin{aligned} y_1 - \ y_2 + y_3 &\geq 3, \\ y_1 \qquad\qquad &\geq 1, \\ 3y_1 + 2y_2 - y_3 &= 2, \\ y_2 \geq 0,\ y_3 &\geq 0. \end{aligned}$$

Тя се различава от двойнствената задача (63) само по знаците пред променливата y_2, т.е. получава се от задача (63) при замяната на y_2 с $-y_2$. Следователно $\mathbf{y}^*_{\text{и}} = (1, 1, 3)$ е решение на двойнствената задача (64) и $g(\mathbf{y}^*_{\text{и}}) = l(\mathbf{x}^*_{\text{и}}) = 4$.

Задачи

1. Докажете, че за всеки план x на задача (51)–(53) и съответния му план y на спрегнатата ѝ задача (54)–(56) е изпълнено $l(\mathbf{x}) \leq g(\mathbf{y})$.

2. Докажете следствие 1.

3. Докажете следствие 2.

4. Докажете следствие 3.

5. За всяка от дадените задачи напишете спрегнатата ѝ задача:

5.1. $x_1 + 10x_2 - x_3 \to \max,$

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &\geq 1, \\ x_1 - x_2 - x_3 &\leq 2, \\ x_2 \qquad &\leq 0, \\ x_1 \geq 0,\ x_3 &\geq 0; \end{aligned}$$

5.2. $x_1 + 4x_4 \to \min,$

$$\begin{aligned} x_2 + x_3 \qquad &\leq 4, \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 &\geq 3, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 \qquad &\geq 5, \\ x_1 \geq 0,\ x_2 &\geq 0; \end{aligned}$$

5.3. $$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j - M \sum_{i=1}^{m} x_{n+i} \to \max,$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + x_{n+i} = b_i, \quad i = 1, \dots, m,$$

$$x_j \geq 0, \qquad j = 1, \dots, n + m;$$

5.4. $\min\{\langle \mathbf{c}, \mathbf{x} \rangle : \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b},\ \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}$;

5.5. $\min\{\langle \mathbf{c}, \mathbf{x} \rangle : \mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b},\ \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}$;

5.6. $\max\{\langle \mathbf{c}, \mathbf{x} \rangle : \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b},\ \mathbf{x} \leq \mathbf{0}\}$;

5.7. $\max\{\langle \mathbf{c}, \mathbf{x} \rangle : \mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b},\ \mathbf{x} \leq \mathbf{0}\}$;

5.8. $\min\{\langle \mathbf{c}, \mathbf{x} \rangle : \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b},\ \mathbf{x} \leq \mathbf{0}\}$;

6. Дайте пример за двойка спрегнати задачи:

а) всяка от които няма планове;

б) едната има планове, а другата няма.

7. Като използвате теоремите за двойнственост, проверете дали дадените планове $\bar{x}$ са оптимални:

7.1. $2x_1 - 7x_2 + 3x_3 \to \max,$
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 \phantom{{}+x_3} &\geq 2,\\ x_2 \phantom{{}+x_3} &\leq 4,\\ x_1 + x_2 + x_3 &= 3,\end{aligned}$$
$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0;$
$\overline{x} = (2, 0, 1);$

7.2. $x_1 + 4x_2 + x_3 \to \max,$
$$\begin{aligned} 4x_1 + 11x_2 + 3x_3 &= 7,\\ x_1 + x_2 - x_3 &= 0,\end{aligned}$$
$x_j \geq 0,\ j = 1, 2, 3,$
$\overline{x} = (1, 0, 1);$

7.3. $5x_1 + 54x_2 + 9x_3 \to \min,$
$$\begin{aligned} 9x_2 \phantom{{}+x_3} &\geq 9,\\ x_1 + 4x_2 + x_3 &\geq 5,\\ 4x_2 + x_3 &= 5,\end{aligned}$$
$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,$
$\overline{x} = (0, 1, 1);$

7.4. $16x_1 + 4x_2 \to \min,$
$$\begin{aligned} 3x_1 - x_2 \phantom{{}+x_3} &\geq 2,\\ x_1 + 2x_2 + x_3 &\leq 1,\\ x_2 - 3x_3 &\geq 4,\\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 &\geq -6,\end{aligned}$$
$x_1 \geq 0,$
$\overline{x} = (0, -2, -2);$

7.5. $x_1 - 3x_2 + 2x_3 \to \min,$
$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + x_3 &\geq 3,\\ x_1 &\geq 1,\\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 &= 2,\end{aligned}$$
$x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0,$
$\overline{x} = (1, 1, 3);$

7.6. $x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4 \to \max,$
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - 3x_3 - x_4 &= -3,\\ x_1 + 3x_4 &= 12,\\ x_2 + x_3 &= 1,\end{aligned}$$
$x_j \geq 0,\ j = 1, \ldots, 4,$
$\overline{x} = (3, 0, 1, 3);$

7.7. $2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 \to \max,$
$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 &= 15,\\ x_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_4 &= 0,\\ x_1 + x_2 + 3x_3 + 4x_4 &= 22,\end{aligned}$$
$x_j \geq 0,\ j = 1, \ldots, 4,$
$\overline{x} = (3, 4, 5, 0);$

7.8. $2x_1 - x_2 - x_3 \to \max$
$$\begin{aligned} -x_1 - x_2 + 2x_3 &= 5,\\ 2x_1 - x_3 &\leq 6,\\ x_1 + 2x_3 &\geq 4,\end{aligned}$$
$x_1 \geq 0,\ x_3 \geq 0,$
$\overline{x} = \left(\frac{16}{5}, -\frac{37}{5}, \frac{2}{5}\right).$

8. Като използувате теоремите за двойнственост, решете задачите:

8.1. $l(\mathbf{x}) = 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 \to \max,$
$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 &\leq 6,\\ x_1 + x_2 + 4x_3 &\leq 8,\end{aligned}$$
$x_j \geq 0,\ j = 1, 2, 3;$

8.2. $l(\mathbf{x}) = -4x_1 - 18x_2 - 30x_3 - 5x_4 \to \max,$

$$\begin{aligned} 3x_1 + x_2 - 4x_3 - x_4 &\le -3,\\ 2x_1 + 4x_2 + x_3 - x_4 &\ge 3,\\ x_j \ge 0,\ j = 1,\dots,4; \end{aligned}$$

8.3. $l(\mathbf{x}) = -4x_1 - 8x_2 - 4x_3 \to \max,$

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 - x_3 &= -3,\\ -2x_1 - x_2 + x_3 &= -1,\\ x_j \ge 0,\ j = 1,2,3; \end{aligned}$$

8.4. $l(\mathbf{x}) = x_1 + 8x_2 + 10x_3 \to \max,$

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 4x_3 &= 2,\\ x_1 - x_2 + 2x_3 &= 0,\\ x_j \ge 0,\ j = 1,2,3; \end{aligned}$$

8.5. $l(\mathbf{x}) = 2x_1 - 2x_2 + x_3 + 3x_4 \to \min,$

$$\begin{aligned} 2x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 &= 1,\\ -x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 &= 1,\\ x_j \ge 0,\ j = 1,2,3; \end{aligned}$$

8.6. $l(\mathbf{x}) = 3x_1 - 12x_2 + 4x_3 \to \max,$

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 + x_3 &\le -2,\\ x_1 - 4x_2 + 4x_3 &\ge 1,\\ x_j \ge 0,\ j = 1,2,3. \end{aligned}$$

9. В следващите задачи проверете дали условието $x_1 \ge 0$ е свободно:

9.1. $l(\mathbf{x}) = x_1 + x_2 + x_3 \to \max,$

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + x_3 &= 6,\\ x_1 + 7x_2 + 9x_3 &= 14,\\ x_j \ge 0,\ j = 1,2,3; \end{aligned}$$

9.2. $l(\mathbf{x}) = x_1 + x_2 + 3x_3 - 2x_4 \to \max,$

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 5x_3 - x_4 &= 3a,\\ 3x_1 - x_2 + x_3 - 10x_4 &= 2a,\\ x_j \ge 0,\ j = 1,2,3. \end{aligned}$$

10. Нека $\mathbf{x}^*$ е опорно решение на каноничната задача (13)–(15) и обратната му базисна матрица е $\mathbf{B}^{-1} = (\alpha^{s_1}|\alpha^{s_2}|\dots|\alpha^{s_m})$. Докажете, че $\mathbf{y}^* = (y_1,\dots,y_m)$, където $y_i = c_{s_i} - \Delta_{s_i}$, $i = 1,\dots,m$, е решение на спрегнатата ѝ задача (Δ_{s_i}, $i = 1,\dots,m$, са оценките на $x_{s_1},\dots,x_{s_m}$).

11. Да се решат с помощта на симплекс-метода дадените задачи. За всяка разрешима задача да се определи двойнствената ѝ задача и да се пресметне решението ѝ, като се използва следствие 4:

11.1. $l(\mathbf{x}) = -x_1 - 2x_2 - x_3 \to \max,$

$$\begin{aligned} -x_1 + x_2 - 2x_3 &\ge 4,\\ -x_1 - x_2 + x_3 &= -5,\\ x_2 &\le 6,\\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0; \end{aligned}$$

11.2. $l(\mathbf{x}) = -6x_1 + 4x_2 + 2x_3 \to \max,$

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 + x_3 &= 1,\\ x_1 - x_2 &\le 4,\\ -x_1 + 2x_2 &\le -3,\\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0; \end{aligned}$$

11.3. $l(\mathbf{x}) = -x_1 + 2x_2 + x_3 \to \max,$
$$\begin{array}{rcrcrcr} 2x_1 & + & x_2 & & & \geq & 3, \\ & & x_2 & & & \leq & 2, \\ -2x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = & -1, \end{array}$$
$$x_j \geq 0,\ j = 1, 2, 3;$$

11.4. $l(\mathbf{x}) = x_1 - x_2 + x_3 \to \min,$
$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & - & x_2 & & & \geq & 6, \\ x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & -2, \\ x_1 & & & & & \leq & 4, \end{array}$$
$$x_1 \geq 0,\ x_3 \geq 0;$$

11.5. $l(\mathbf{x}) = -2x_1 + x_2 + x_3 \to \min,$
$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & x_2 & - & 2x_3 & = & -5, \\ 2x_1 & & & - & x_3 & \leq & 6, \\ x_1 & & & + & 2x_3 & \geq & 4, \end{array}$$
$$x_1 \geq 0,\ x_3 \geq 0;$$

11.6. $l(\mathbf{x}) = x_1 - x_2 + x_3 \to \min,$
$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & - & x_2 & & & \geq & 6, \\ x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & -5, \\ x_1 & & & & & \leq & 4, \end{array}$$
$$x_1 \geq 0,\ x_3 \geq 0.$$

12. Да се намери минималната стойност на функцията $l(\mathbf{x})$:

12.1. $l(\mathbf{x}) = x_1 + 2x_2 + \cdots + nx_n,$
$$x_1 + x_2 + \cdots + x_i \geq i,\ \ i = 1, \ldots, n,$$
$$x_j \geq 0,\ j = 1, \ldots, n;$$

12.2. $l(\mathbf{x}) = x_1 + x_2 + \cdots + x_{100},$
$$x_i + x_{i+1} \geq \alpha_i, \quad i = 1, \ldots, 99,$$
$$x_1 + x_{100} \geq \alpha_{100};$$

12.3. $l(\mathbf{x}) = x_1 + x_2 + x_3,$
$$\begin{array}{rcrcrcl} \lambda x_1 & + & x_2 & + & x_3 & \geq & \mu_1, \\ x_1 & + & \lambda x_2 & + & x_3 & \geq & \mu_2, \\ x_1 & + & x_2 & + & \lambda x_3 & \geq & \mu_3; \end{array}$$

12.4. $l(\mathbf{x}) = x_1 + \lambda x_2 + \lambda^2 x_3,$
$$\begin{array}{rcrcrcl} (1-\lambda)x_1 & + & x_2 & + & x_3 & \geq & \mu, \\ x_1 & + & (1-\lambda)x_2 & + & x_3 & \geq & \mu, \\ x_1 & + & x_2 & + & (1-\lambda)x_3 & \geq & \mu. \end{array}$$

13. Докажете, че задачите

$$\text{I.}\quad \max\{\langle \mathbf{c}, \mathbf{x}\rangle : \mathbf{x} \in P_b\}, \quad P_b = \{\mathbf{x} : \mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b},\ \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\},$$
$$\text{II.}\quad \max\{\langle \mathbf{c}, \mathbf{x}\rangle : \mathbf{x} \in P_d\}, \quad P_d = \{\mathbf{x} : \mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{d},\ \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}$$

са едновременно разрешими и неразрешими, ако:

а) $b \neq d$, $b \geq 0$, $d \geq 0$;

б) $b \neq d$, $P_b \neq \emptyset$, $P_d \neq \emptyset$.

14. Нека $\max\{l(\mathbf{x}) : \mathbf{x} \in P\}$ и $\min\{g(\mathbf{y}) : \mathbf{y} \in Q\}$ са двойка спрегнати задачи. Кои от следните случаи са възможни:

а) $P \neq \emptyset$, $Q \neq \emptyset$ и съществуват $\mathbf{x}^* \in P$, $\mathbf{y}^* \in Q$, за които $l(\mathbf{x}^*) = g(\mathbf{y}^*)$;
б) $P \neq \emptyset$ и $g(\mathbf{y})$ е неограничена отдолу в Q;
в) $l(\mathbf{x})$ и $g(\mathbf{y})$ са неограничени съответно отгоре в P и отдолу в Q;
г) $P \neq \emptyset$, $Q \neq \emptyset$.

15. Задачата (P, l): $\max\{l(\mathbf{x}) = \langle \mathbf{c}, \mathbf{x}\rangle : \mathbf{x} \in P\}$, $P = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{Ax} = \mathbf{b},\ \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}$ е разрешима.

а) Може ли $l(\mathbf{x})$ да е неограничена отгоре в множеството $\widetilde{P} = \{\mathbf{x} : \mathbf{Ax} = \mathbf{d},\ \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}$, където $\mathbf{d} \neq \mathbf{b}$?
б) Може ли $\widetilde{P} \neq \emptyset$?
в) Може ли $\widetilde{l}(\mathbf{x}) = \langle \mathbf{a}, \mathbf{x}\rangle$ да е неограничена отгоре в P, ако $\mathbf{a} \neq \mathbf{c}$ ($\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$)?
г) Какво трябва да е множеството P, за да бъде задачата

$$\max(\min)\ \{\widetilde{l}(\mathbf{x}) = \langle \mathbf{a}, \mathbf{x}\rangle : \mathbf{x} \in P\}$$

разрешима за всяко $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$?

16. Докажете, че ако в задача (51)–(53) е изпълнено $a_{ik} = a_{il}$ за $k \neq l$, $k \leq p$, $l \leq p$, $i = 1, \ldots, m$ и $c_k < c_l$, то за оптималност на плана $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ е необходимо $x_k = 0$.

17. Решете зад. 6 от § 1, като използвате теоремите за двойственост.

18. Нека $\mathbf{x}'$, $\mathbf{y}'$ и $\mathbf{x}''$, $\mathbf{y}''$ са съответни решения на двойките спрегнати задачи

$$\max\{\langle \mathbf{c}', \mathbf{x}\rangle : \mathbf{Ax} = \mathbf{b},\ \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}, \qquad \min\{\langle \mathbf{b}, \mathbf{y}\rangle : \mathbf{yA} \geq \mathbf{c}'\}$$

и

$$\max\{\langle \mathbf{c}'', \mathbf{x}\rangle : \mathbf{Ax} = \mathbf{b},\ \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}, \qquad \min\{\langle \mathbf{b}, \mathbf{y}\rangle : \mathbf{yA} \geq \mathbf{c}''\}.$$

Докажете, че $\langle \mathbf{c}'' - \mathbf{c}', \mathbf{x}'\rangle \leq \langle \mathbf{c}, \mathbf{y}'' - \mathbf{y}'\rangle \leq \langle \mathbf{c}'' - \mathbf{c}', \mathbf{x}''\rangle$.

19. Нека $\mathbf{x}'$, $\mathbf{y}'$ и $\mathbf{x}''$, $\mathbf{y}''$ са съответни решения на двойките спретнати задачи

$$\max\{\langle \mathbf{c}, \mathbf{x}\rangle : \mathbf{Ax} = \mathbf{b}',\ \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}, \qquad \min\{\langle \mathbf{b}', \mathbf{y}\rangle : \mathbf{yA} \geq \mathbf{c}\}$$

и

$$\max\{\langle \mathbf{c}, \mathbf{x}\rangle : \mathbf{Ax} = \mathbf{b}'',\ \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}, \qquad \min\{\langle \mathbf{b}'', \mathbf{y}\rangle : \mathbf{yA} \geq \mathbf{c}\}.$$

Докажете, че $\langle \mathbf{y}'', \mathbf{b}'' - \mathbf{b}'\rangle \leq \langle \mathbf{c}, \mathbf{x}'' - \mathbf{x}'\rangle \leq \langle \mathbf{y}', \mathbf{b}'' - \mathbf{b}'\rangle$.

20. Да се докаже, че от двете системи I и II само едната има решение ($\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$):

20.1. I. $\mathbf{Ax} \leq \mathbf{0}$, $\langle \mathbf{c}, \mathbf{x} \rangle > 0$; II. $\mathbf{yA} = \mathbf{c}$, $\mathbf{y} \geq \mathbf{0}$;

20.2. I. $\mathbf{Ax} < \mathbf{0}$, II. $\mathbf{yA} = \mathbf{0}$, $\mathbf{y} \geq 0$, $\mathbf{y} \neq 0$;

20.3. I. $\mathbf{Ax} \geq \mathbf{0}$, $\langle \mathbf{c}, \mathbf{x} \rangle > 0$, $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$, II. $\mathbf{yA} \geq \mathbf{c}$, $\mathbf{y} \leq \mathbf{0}$;

20.4. I. $\mathbf{Ax} = \mathbf{c}$, II. $\mathbf{yA} = \mathbf{0}$, $\langle c, y \rangle = 1$.

21. Нека $\mathbf{x}^*$, $\mathbf{y}^*$ са решения съответно на спрегнатите задачи (51)–(53) и (54)–(56). Докажете, че $(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*)$ е седлова точка на функцията на Лагранж за задача (51)–(53).

§ 8. Двойнствен симплекс-метод

Зависимостта между двете спрегнати задачи (51)–(53) и (54)–(56) е в основата на *двойнствения симплекс-метод* за решаване на задачата на ЛО.

В матрична форма двете задачи се записват съответно във вида (16) и

$$\min\{g(\mathbf{y}) = \langle \mathbf{b}, \mathbf{y} \rangle : \mathbf{yA} \geq \mathbf{c}\},$$
$$(\mathbf{A} = (\mathbf{a}^1|\mathbf{a}^2|\dots|\mathbf{a}^n),\ \operatorname{rank}\mathbf{A} = m,\ m < n). \tag{65}$$

Определение 12. *Базис на опорен план* $\overline{\mathbf{y}}$ на задачата (65) е съвкупност от m линейно независими стълба $\{\mathbf{a}^{s_1}, \mathbf{a}^{s_2}, \dots, \mathbf{a}^{s_m}\}$ на матрицата $\mathbf{A}$, за които $\langle \mathbf{y}, \mathbf{a}^{s_i} \rangle = c_{s_i}$, $i = 1, \dots, m$.

Определение 13. Нека $\overline{\mathbf{y}}$ е опорен план на задача (65) и негов базис е $\{\mathbf{a}^{s_1}, \dots, \mathbf{a}^{s_m}\}$. Векторът $\overline{\mathbf{x}} = (\mathbf{x}^B, \mathbf{x}^N) = (\boldsymbol{\beta}, 0)$, който е решение на системата (23) при означенията (18)–(20), се нарича *псевдоплан* на задача (16).

В общия случай $\overline{\mathbf{x}}$ не е план на задача (16), защото не е изпълнено $\boldsymbol{\beta} \geq 0$. Променливите $x_{s_1}, \dots, x_{s_m}$ се наричат *базисни променливи* за псевдоплана $\overline{\mathbf{x}}$, а съответните компоненти на $\overline{\mathbf{x}}$ — *базисни компоненти*.

Когато е известен опорен план $\overline{\mathbf{y}}$ на задача (54)–(56) и негов базис $\{\mathbf{a}^{s_1}, \dots, \mathbf{a}^{s_m}\}$, двойнственият симплекс-метод решава задача (51)–(53) по следния начин:

Стъпка 0. Решава се системата (52) спрямо базисните променливи $x_{s_1}, \dots, x_{s_m}$ на съответния псевдоплан $\overline{\mathbf{x}}$, т. е. (52) се привежда във вида (23). Тогава $\overline{\mathbf{x}} = (\boldsymbol{\beta}, 0)$. Попълва се симплексната таблица на началния псевдоплан $\overline{\mathbf{x}}$. Числата Δ_j, $j = 0, \dots, n$, се пресмятат по формули (37).

Стъпка 1. Псевдопланът се проверява за оптималност, а ограниченията — за съвместимост:

а) ако $\boldsymbol{\beta} \geq 0$, $\overline{\mathbf{x}}$ е решение и $l^* = \Delta_0$;

б) ако има $\boldsymbol{\beta}_i < 0$ и $\alpha_{ij} \geq 0$, $i = 1, \dots, n$, задачата няма решение поради несъвместимост на условията (52) и (53).

Стъпка 2. Преминава се към съседен псевдоплан:

а) избира се ключов ред — редът p, $1 \leq p \leq m$, за който $\boldsymbol{\beta}_p < 0$;

б) избира се ключов стълб — стълбът x_q за който

$$t = \frac{\Delta_q}{\alpha_{pq}} = \min\left\{\frac{\Delta_j}{\alpha_{pj}}\,\middle|\,\alpha_{pj} < 0,\ j = 1, \dots, n\right\};$$

в) извършва се елементарно преобразуване с ключово число α_{pq} по формулите (38).

Преминава се към стъпка 1.

Пример 23. Да се реши задачата:

$$l(\mathbf{x}) = x_1 - 4x_2 \to \max,$$

$$\begin{aligned} x_1 - 3x_2 &\leq -6, \\ -2x_1 + x_2 &\leq 6, \\ 2x_1 - x_2 &\leq -1, \\ 2x_1 + x_2 &\leq 20, \\ x_1 \geq 0,\ x_2 &\geq 0. \end{aligned}$$

Решение. Привеждаме задачата в каноничен вид:

$$\bar{l}(\mathbf{x}) = -x_1 - 4x_2 \to \max,$$

$$\begin{aligned} x_1 - 3x_2 + x_3 \qquad\qquad &= -6, \\ -2x_1 + x_2 \qquad + x_4 \qquad\quad &= 6, \\ 2x_1 - x_2 \qquad\qquad + x_5 \quad &= -1, \\ 2x_1 + x_2 \qquad\qquad\qquad + x_6 &= 20, \\ x_j \geq 0,\ j = 1, \dots, 6.& \end{aligned}$$

Спрегнатата задача на каноничната е:

$$g(\mathbf{y}) = -6y_1 + 6y_2 - y_3 + 20y_4 \to \min,$$

$$\begin{aligned} y_1 - 2y_2 + 2y_3 + 2y_4 &\geq -1, \\ -3y_1 + y_2 - y_3 + y_4 &\geq -4, \\ y_i \geq 0,\ i = 1, \dots, 4.& \end{aligned}$$

Тя има опорен план $\mathbf{y}^0 = (0, 0, 0, 0)$ (той удовлетворява последните четири условия като равенства) с базис $\{\mathbf{a}^3, \mathbf{a}^4, \mathbf{a}^5, \mathbf{a}^6\}$. Следователно начален

B	$\mathbf{c}^B$	$\boldsymbol{\beta}$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
		0	−1	−4	0	0	0	0
x_3	0	−6	1	$\boxed{-3}$	1	0	0	0
x_4	0	6	−2	1	0	1	0	0
x_5	0	−1	2	−1	0	0	1	0
x_6	0	20	2	1	0	0	0	1
		0	−1	−4	0	0	0	0
x_2	−4	2	−1/3	1	−1/3	0	0	0
x_4	0	4	−1	0	1/3	1	0	0
x_5	0	1	1	0	−1/3	0	1	0
x_6	0	18	3	0	1/3	0	0	1
		8	−7/3	0	−4/3	0	0	0

Таблици 29, 30

псевдоплан е $\mathbf{x}^0 = (0, 0, -6, 6, -1, 20)$ с базисни променливи x_3, x_4, x_5, x_6 и $\bar{l}(\mathbf{x}^0) = 0$. Начална симплексна таблица е табл. 29. Решението $\mathbf{x}^0$ не е план на каноничната задача: $x_3 = -6 < 0$, $x_5 = -1 < 0$. За ключов ред може да се избере първият или третият ред. В табл. 29 е избран първият ред. В него само първият елемент е отрицателен, което определя еднозначно ключовия стълб. Новият псевдоплан $\mathbf{x}^1 = (0, 2, 0, 4, 1, 18)$ има неотрицателни компоненти и следователно е решение на каноничната задача, $\bar{l}^* = -8$. Решение на първоначалната задача е $\mathbf{x}^* = (0, 2)$ и $l^* = -8$.

Задачи

1. Решете с помощта на двойнствения симплекс-метод задачите:

1.1. $-2x_1 - x_2 \to \max$,

$$x_1 - 3x_2 \le 4,$$
$$x_1 + x_2 \ge 1,$$
$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0;$$

1.2. $-x_1 - x_2 \to \max$,

$$x_1 + x_2 \ge 1,$$
$$x_1 - 3x_2 \le 5,$$
$$x_1 - 2x_2 \le 6,$$
$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$$

Отговори и решения

§ 1. Задача на линейното оптимиране. Свойства

1.1. Опорен неизроден.

1.2. Опорен изроден.

1.3. Опорни неизродени.

1.4. $\overline{\mathbf{x}}$, $\overline{\mathbf{z}}$ са опорни неизродени; $\overline{\mathbf{y}}$ е неопорен; $\overline{\mathbf{u}}$ е опорен изроден.

1.5. $\overline{\mathbf{x}}$ е опорен изроден; $\overline{\mathbf{y}}$ е опорен изроден.

1.6. $\overline{\mathbf{x}}$, $\overline{\mathbf{u}}$ са неопорни; $\overline{\mathbf{y}}$, $\overline{\mathbf{z}}$ са опорни неизродени.

1.7. $\overline{\mathbf{y}}$ е неопорен; $\overline{\mathbf{w}}$ е опорен изроден; останалите са опорни неизродени.

2. Множеството от планове на всяка задача е ограничено.

2.1. Опорни: $\overline{\mathbf{x}} = (2, 0, 0)$, $\overline{\mathbf{y}} = (0, 0, 4)$, $\overline{\mathbf{z}} = (0, 4, 0)$; $l(\overline{\mathbf{x}}) = 2$, $l(\overline{\mathbf{y}}) = 20$, $l(\overline{\mathbf{z}}) = -16$. Решение е $\overline{\mathbf{z}}$, $l^* = -16$.

2.2. Опорни: $\overline{\mathbf{x}} = (0, 0, 10)$, $\overline{\mathbf{y}} = (1, 1, 0)$, $\overline{\mathbf{z}} = (0, 1, 0)$, $\overline{\mathbf{u}} = (1, 0, 0)$; $l(\overline{\mathbf{x}}) = 10$, $l(\overline{\mathbf{y}}) = 0$, $l(\overline{\mathbf{z}}) = -1$, $l(\overline{\mathbf{u}}) = 1$. Решение е $\overline{\mathbf{x}}$, $l^* = 10$.

2.3. Опорни: $\overline{\mathbf{x}} = (1, 0)$, $\overline{\mathbf{y}} = (0, 1)$, $\overline{\mathbf{z}} = (-1, 0)$, $\overline{\mathbf{u}} = (0, -1)$; $l(\overline{\mathbf{x}}) = l(\overline{\mathbf{y}}) = 1$, $l(\overline{\mathbf{z}}) = l(\overline{\mathbf{u}}) = -1$. Решения са $\mathbf{x}^\lambda = \lambda\overline{\mathbf{x}} + (1 - \lambda)\overline{\mathbf{y}} = (\lambda, 1 - \lambda)$, $0 \le \lambda \le 1$ и $l^* = 1$.

2.4. Опорни: $\overline{\mathbf{x}} = (0, 1)$, $\overline{\mathbf{y}} = (10, 1)$, $\overline{\mathbf{z}} = (10, 11)$; $l(\overline{\mathbf{x}}) = 1$, $l(\overline{\mathbf{y}}) = 41$, $l(\overline{\mathbf{z}}) = 51$. Решение е $\overline{\mathbf{z}}$, $l^* = 51$, при търсене на max и $\overline{\mathbf{x}}$, $l^* = 1$, при търсене на min.

2.5. Опорни: $O = (0, \dots, 0)$ и $\overline{\mathbf{x}}^k$, $k = 1, \dots, n$, с компоненти

$$\overline{x}_j^k = \begin{cases} 0 & \text{при } j \neq k, \\ n & \text{при } j = k; \end{cases}$$

$l(O) = 0$, $l(\overline{\mathbf{x}}^k) = kn$. Решение при max е $\overline{\mathbf{x}}^n = (0, \dots, 0, n)$, $l^* = n^2$, а при min е O, $l^* = 0$.

2.6. Опорни планове са $\overline{\mathbf{x}}^k$, $k = 1, \dots, n$, с компоненти

$$\overline{x}_j^k = \begin{cases} 0 & \text{при } j \neq k, \\ n & \text{при } j = k; \end{cases} \qquad l(\overline{\mathbf{x}}^k) = an.$$

Следователно $l^* = an$ и решенията са

$$\mathbf{x}^\lambda = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \overline{\mathbf{x}}^k = (\lambda_1 n, \dots, \lambda_n n), \quad \sum_{k=1}^{n} \lambda_k = 1, \quad \lambda_k \geq 0, \quad k = 1, \dots, n.$$

2.7. Опорни планове са $\overline{\mathbf{x}}^k$ от **2.6**; $l(\overline{\mathbf{x}}^1) = an$, $l(\overline{\mathbf{x}}^2) = bn$, $l(\overline{\mathbf{x}}^3) = cn$, $l(\overline{\mathbf{x}}^k) = 0$, $k = 4, \dots, n$. Ако означим $M = \max\{0, a, b, c\}$, решения са:

- $\overline{\mathbf{x}}^1$ ($l^* = an$) при $M = a$;
- $\overline{\mathbf{x}}^2$ ($l^* = bn$) при $M = b$;
- $\overline{\mathbf{x}}^3$ ($l^* = cn$) при $M = c$;
- $\overline{\mathbf{x}}^\lambda = \sum\limits_{k=4}^{n} \lambda_k \overline{\mathbf{x}}^k$, $\sum\limits_{k=4}^{n} \lambda_k = 1$, $\lambda_k \geq 0$, $k = 4, \dots, n$, ($l^* = 0$) при $M = 0$.

3. $l(\mathbf{x}) = -x_2$, $Q = \left\{ \mathbf{x} = (x_1, x_2) : x_1 \geq 1, \ x_2 \geq \dfrac{1}{x_1} \right\}$.

4. $F(x_1, x_2) = \dfrac{1}{x_1}$, $P = \{\mathbf{x} = (x_1, x_2) : x_1 \leq -1, \ x_2 \leq 0\}$.

5. Следва от твърдението, че всяко непразно компактно множество има крайни точки.

6. Следва от теорема 1: $O = (0, \dots, 0) \in P$ и

$$0 \leq x_j \leq \frac{b_k}{\min\{a_{kj} : 1 \leq j \leq k\}}.$$

Следователно P е непразно компактно множество и $l(\mathbf{x})$ е ограничена в него.

7. а) Следва от теорема 1. **б)** Допуснете противното и вземете c да съвпада с направляващ вектор на неограничения ръб на P.

8. Следва от теорема 1: $P \neq \emptyset$ и

$$l(\mathbf{x}) = \langle \mathbf{c}, \mathbf{x} \rangle = \sum_{j=1}^{n} x_j \sum_{i=1}^{m} \lambda_i a_{ij} = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq \sum_{i=1}^{m} \lambda_i b_i.$$

9. Вж. зад. 8.

10. Използвайте зад. 6 или зад. 8.

11. Следва от теорема 1.
Достатъчност.

$$l(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{m}\lambda_i a_{ij}\right)x_j = \sum_{i=1}^{m}\lambda_i\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j = \sum_{i=1}^{m}\lambda_i b_i.$$

Необходимост. Ако допуснем противното, то $\beta = \{\mathbf{x} : \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}, \langle\mathbf{c},\mathbf{x}\rangle = \lambda\} \neq \emptyset$ за всяко λ. Ако $\mathbf{x}\in\beta$, то $\mathbf{x}\in P$ и при $\lambda\to+\infty$ стигаме до противоречие с ограничеността отгоре на $l(\mathbf{x})$ в P.

12. Нека $l(\mathbf{x}^*) = l^*$. Допуснете противното: $\mathbf{x}^* = \lambda_1\mathbf{x}^1 + \lambda_2\mathbf{x}^2$, $\lambda_1+\lambda_2 = 1$, $\lambda_1,\lambda_2 \geq 0$, $\mathbf{x}^1 \in P$, $\mathbf{x}^2 \in P$, $l(\mathbf{x}^1) < l^*$, $l(\mathbf{x}^2) < l^*$; тогава $l(\mathbf{x}^*) = l(\lambda_1\mathbf{x}^1 + \lambda_2\mathbf{x}^2) < l^*$ — противоречие.

13. $K(P) = \{\mathbf{z}\in\mathbb{R}^n : \mathbf{x}+\lambda\mathbf{z}\in P, \mathbf{x}\in P, \lambda\geq 0\} = \Big\{\mathbf{z}\in\mathbb{R}^n : \sum_{j=1}^{n} a_{ij}z_j \leq 0,$ $i = 1,\ldots,s;\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = 0,\ i = s+1,\ldots,m;\ z_j\geq 0,\ j = 1,\ldots,p\Big\}.$

14. Следва от теорема 1: $P_1 \neq 0$, $P_2 \neq 0$, $(0\in P_1,\ 0\in P_2)$; P_1 и P_2 имат общ рецесивен конус $K = \{\mathbf{z}\in\mathbb{R}^n : \mathbf{A}\mathbf{z}\leq\mathbf{0}, \mathbf{z}\geq\mathbf{0}\}$ и ако $l(\mathbf{x})$ е ограничена в P_1 (P_2), тя е ограничена в K и следователно и в P_2 (P_1).

§ 2. Двумерна задача на ЛО. Геометричен метод за решаване

1.1. max: $\left(\frac{15}{4},\frac{3}{2}\right)$, $l^* = 9$; min: $(0,0)$, $l^* = 0$.

1.2. max: $l(\mathbf{x})\to+\infty$ в множеството от планове; min: $\mathbf{x}^\lambda = (2-\lambda, 0)$ за $0\leq\lambda\leq 1$, $l^* = 0$.

1.3. max: $\mathbf{x}^\lambda = (\lambda, 1+\lambda)$ за $\lambda\geq 0$, $l^* = 3$; min: $l(\mathbf{x})\to-\infty$ в множеството от планове.

1.4. max: $l(\mathbf{x})\to+\infty$ в множеството от планове; min: $(0,1)$, $l^* = 0$.

1.5. max: $(3,0,1,-1)$, $l^* = 4$; min: $(3,2,-1,-1)$, $l^* = 0$.

1.6. max: $\mathbf{x}^\lambda = (6-6\lambda, 4\lambda, 2\lambda-1)$, $0 \le \lambda \le 1$; min: $\left(\frac{1}{5}, 0, \frac{24}{5}\right)$, $l^* = -\frac{23}{5}$.

1.7. max: решения са всички точки от правата $x_1 - x_2 = 1$, в частност $\overline{\mathbf{x}} = (1,0)$; при направляващ вектор $\mathbf{p} = (1,1)$ на тази права решенията са $\mathbf{x}^\lambda = \overline{\mathbf{x}} + \lambda\mathbf{p} = (1+\lambda, \lambda)$, $\lambda \in (-\infty, \infty)$, $l^* = 2$; min: решения са всички точки от правата $-x_1 + x_2 = 1$, в частност $\overline{\mathbf{y}} = (0,1)$; общият вид на решенията е $\mathbf{x}^\lambda = \overline{\mathbf{y}} + \lambda\mathbf{p} = (\lambda, 1+\lambda)$, $\lambda \in (-\infty, \infty)$, $l^* = -2$.

1.8. max: $l(\mathbf{x}) \to +\infty$ в P; min: $\left(0, \frac{1}{2}, 0, 2\right)$, $l^* = -\frac{1}{2}$.

1.9. От системата уравнения имаме $x_{n-2} = 3 - (x_{n-1} + x_n)$ и $x_k = 1$ за $k = 1, \dots, n-3$; двумерната задача е

$$\max\left\{\bar{l}(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}(n^2+n-6) + x_{n-1} + 2x_n : x_{n-1} + x_n \le 3, x_{n-1} \ge 0, x_n \ge 0\right\},$$

откъдето получаваме решение за максимум $(1, 1, \dots, 1, 0, 0, 3)$, $l^* = \frac{1}{2}(n^2+n+6)$ и за минимум — $(1, 1, \dots, 1, 3, 0, 0)$, $l^* = \frac{1}{2}(n^2+n-6)$.

2.1. max: $\alpha \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$; при $\alpha = 0$ ($c_2 = 0$, $c_1 > 0$): $\mathbf{x}^\lambda = (0, -\lambda)$, $\lambda \ge 0$, $l^* = 0$; при $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$: $(0,0)$; при $\alpha = \frac{\pi}{4}$ ($c_1 = c_2 > 0$) $\mathbf{x}^\lambda = (-\lambda, \lambda)$, $\lambda \in [0,1]$, $l^* = 0$; при $\alpha \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$: $(-1, 1)$, $l^* = -c_1 + c_2$; при $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ($c_1 = 0$, $c_2 > 0$): $\mathbf{x}^\lambda = (-1-\lambda, 1)$, $\lambda \ge 0$, $l^* = c_2$; min: $\alpha \in \left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$.

2.2. max: $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right]$; при $\alpha = 0$ ($c_2 = 0$, $c_1 > 0$): $\mathbf{x}^\lambda = (1, \lambda)$, $\lambda \ge 0$, $l^* = c_1$; при $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$: $(1,0)$, $l^* = c_1$; при $\alpha = -\frac{\pi}{4}$ ($c_1 = -c_2 > 0$): $\mathbf{x}^\lambda = (\lambda, \lambda - 1)$, $0 \le \lambda \le 1$, $l^* = c_1$; при $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{4}, -\frac{\pi}{2}\right]$: $(0,1)$, $l^* = -c_2$; при $\alpha = -\frac{\pi}{2}$ ($c_1 = 0$, $c_2 < 0$): $\mathbf{x}^\lambda = (-\lambda, -1)$, $\lambda \ge 0$, $l^* = -c_2$; min: $\alpha \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$.

2.3. max: $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$; при $\alpha = -\frac{\pi}{2}$ ($c_1 = 0$, $c_2 < 0$): $\mathbf{x}^\lambda = (1-\lambda, 0)$, $\lambda \ge 0$, $l^* = 0$; при $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}\right)$: $(1,0)$, $l^* = c_1$; при $\alpha = \frac{\pi}{4}$ ($c_1 = c_2 > 0$): $\mathbf{x}^\lambda = (\lambda, 1-\lambda)$, $0 \le \lambda \le 1$, $l^* = c_1$; при $\alpha \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$: $(0,1)$, $l^* = c_2$; при $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ($c_1 = 0$, $c_2 > 0$) $\mathbf{x}^\lambda = (-\lambda, 1)$, $\lambda \ge 0$, $l^* = c_2$; min: $\alpha \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$.

2.4. max: $\alpha \in \left[\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right]$; при $\alpha = \frac{3\pi}{4}$: $\mathbf{x}^\lambda = (\lambda, \lambda)$, $\lambda \ge 0$; при $\alpha \in \left[\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right]$: $(0,0)$; при $\alpha = \frac{5\pi}{4}$: $\mathbf{x}^\lambda = (\lambda, -\lambda)$ за $\lambda \ge 0$; във всички случаи $l^* = 0$; min: $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$.

2.5. max: $\alpha \in \left[\frac{3\pi}{4}, \frac{3\pi}{2}\right]$; при $\alpha = \frac{3\pi}{4}$ $(c_1 = -c_2 < 0)$: $\mathbf{x}^\lambda = \left(\frac{1}{2} + \lambda, \frac{1}{2} + \lambda\right)$, $\lambda \geq 0$; $l^* = 0$; при $\alpha \in \left(\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right)$: $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, $l^* = \frac{1}{2}(c_1 + c_2)$; при $\alpha = \frac{5\pi}{4}$ $(c_1 = c_2 < 0)$: $\mathbf{x}^\lambda = \left(1 - \frac{1}{2}\lambda, \frac{1}{2}\lambda\right)$, $\lambda \in [0, 1]$, $l^* = c_1$; при $\alpha \in \left(\frac{5\pi}{4}, \frac{3\pi}{2}\right)$: $(1, 0)$, $l^* = c_1$; при $\alpha = \frac{3\pi}{2}$ $(c_1 = 0,\ c_2 < 0)$: $\mathbf{x}^\lambda = (1 + \lambda, 0)$, $\lambda \geq 0$, $l^* = 0$; min: $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$.

2.6. max: $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}\right]$; при $\alpha = -\frac{\pi}{2}$ $(c_1 = 0,\ c_2 < 0)$: $\mathbf{x}^\lambda = (-\lambda, 1)$, $\lambda \geq 0$, $l^* = c_2$; при $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}\right)$: $(1, 0)$, $l^* = c_1$; при $\alpha = \frac{\pi}{4}$ $(c_1 = c_2 > 0)$: $\mathbf{x}^\lambda = (1 - \lambda, \lambda)$, $\lambda \geq 0$, $l^* = c_2$; min: $\alpha \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{4}\right]$.

3.1. **а)** $\alpha \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{3\pi}{2}, \frac{7\pi}{4}\right]$; **б)** при $c_1 = c_2 = k < 0$, т.е. $c = (k, k)$: $\mathbf{x}^\lambda = \left(4 - \frac{9}{2}\lambda, \frac{9}{2}\lambda\right)$, $\lambda \in [0, 1]$.

3.2. **а)** $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right]$; **б)** при $c_1 = -\frac{c_2}{2} = k > 0$, т.е. $c = (k, -2k)$ за $k > 0$: $\mathbf{x}^\lambda = (-4\lambda, 2 - 2\lambda)$, $\lambda \in [0, 1]$.

4.1. $-\frac{4}{3} \leq a \leq 2$.

4.2. $a \geq 2$.

4.3. $a > -1$.

4.4. $-\frac{1}{4} \leq a < \frac{1}{3}$; $P = \emptyset$ за $-\infty < a < \frac{1}{4}$.

4.5. $\frac{1}{2} \leq a < 2$.

4.6. $a = 0$; $P = \emptyset$ за $a < 0$.

5. $0 \leq a \leq 1$; при $a = 0$; $\mathbf{x}^\lambda = (0, -\lambda)$, $\lambda \geq 0$; при $a = 1$: $\mathbf{x}^\lambda = (\lambda - 1, 1 - \lambda)$, за $\lambda \in [0, 1]$; при $a \in (0, 1)$: $(0, 0)$.

6.1. $a \in \left[\frac{1}{3}, 1\right]$: $l^* = 2a - 3$, $\mathbf{x}^* = (2, 3)$; $a \in (1, \infty)$: $l^* = -\infty$.

6.2. $a \in (-\infty, -1)$: $l^* = +\infty$; $a \in \left[-1, -\frac{1}{3}\right]$: $l^* = 2a + 1$, $\mathbf{x}^* = (2, -1)$.

7.1. **а)** върховете: $(5, 0)$ за $a \in \left(-\infty, -\frac{2}{3}\right)$, $(6, 3)$ за $a \in \left[-\frac{2}{3}, 4\right]$, $(2, 5)$ за $a \in [4, +\infty)$; **б)** няма такива a; **в)** $a = -\frac{2}{3}$, $a = 4$.

7.2. **а)** върховете: $(0, 0)$ за $a \in (-\infty, 0)$, $(0, 2)$ за $a \in [0, 1]$; **б)** $a \in (1, +\infty)$; **в)** $a = 0$, $a = 1$.

8. **а)** например зад. 1.1; **б)** например зад. 1.6 за максимум; **в)** например зад. 1.4; **г)** например зад. 1.7, но със $c_1 \neq -c_2$ в $l(\mathbf{x})$: например $l(\mathbf{x}) = 2x_1 + 3x_2$; **д)** например $P = \{\mathbf{x} = (x_1, x_2) : -x_1 + x_2 \geq 1,\ x_1 - x_2 \geq 1\}$; **е)** например зад. 1.3.

9. **1.** $\mathbf{x}^* = (75, 75)$, $l^* = 225$. **2.** $\mathbf{x}^* = \left(\frac{7}{3}, \frac{8}{3}\right)$, $l^* = \frac{19}{3}$.

§ 3. Канонична задача на ЛО. Опорни планове на КЗ

4.1. $\overline{\mathbf{x}}$, $\overline{\mathbf{y}}$ — неизродени опорни.

4.2. $\overline{\mathbf{x}}$ — изроден опорен, $\overline{\mathbf{y}}$ — неизроден опорен.

4.3. $\overline{\mathbf{x}}$ — неизроден опорен.

4.4. $\overline{\mathbf{x}}$ — изроден опорен.

5.1. $\mathbf{B}_{\overline{\mathbf{x}}} = \{x_2\}$: $\frac{3}{2}x_1 + x_2 = \frac{1}{2}$; $\mathbf{B}_{\overline{\mathbf{y}}} = \{x_1\}$: $x_1 + \frac{2}{3}x_2 = \frac{1}{3}$.

5.2. $\mathbf{B}_{\overline{\mathbf{x}}} = \{x_1, x_2\}$: $x_2 = 1$, $x_1 = 1$.

5.3.

$$\mathbf{B}_{\overline{\mathbf{x}}} = \{x_1, x_3\} : \quad \left|\begin{array}{rcrcrcl} & & \frac{1}{2}x_2 & + & x_3 & = & \frac{1}{2} \\ x_1 & + & \frac{1}{2}x_2 & & & = & \frac{1}{2}, \end{array}\right.$$

$$\mathbf{B}^1_{\overline{\mathbf{y}}} = \{x_2, x_1\} : \quad \left|\begin{array}{rcrcrcl} & & x_2 & + & 2x_3 & = & 1 \\ x_1 & & & - & x_3 & = & 0, \end{array}\right.$$

$$\mathbf{B}^2_{\overline{\mathbf{y}}} = \{x_2, x_3\} : \quad \left|\begin{array}{rcrcrcl} 2x_1 & + & x_2 & & & = & 1 \\ -x_1 & & & + & x_3 & = & 0. \end{array}\right.$$

5.4. $\mathbf{B}^1_{\overline{\mathbf{x}}} = \{x_1, x_2\}$ и $\mathbf{B}^2_{\overline{\mathbf{x}}} = \{x_2, x_3\}$: $x_1 + x_3 = 0$, $x_2 = 0$.

5.5.

$$\mathbf{B}_{\overline{\mathbf{x}}} = \{x_3, x_4\} : \quad \left|\begin{array}{rcrcrcrcl} \frac{5}{7}x_1 & & & + & x_3 & & & = & 1 \\ \frac{13}{14}x_1 & + & \frac{1}{2}x_2 & & & + & x_4 & = & 1, \end{array}\right.$$

$$\mathbf{B}_{\overline{\mathbf{y}}} = \{x_1, x_3\} : \quad \left|\begin{array}{rcrcrcrcl} & - & \frac{5}{13}x_2 & + & x_3 & - & \frac{10}{13}x_4 & = & \frac{3}{13} \\ x_1 & + & \frac{7}{13}x_2 & & & + & \frac{14}{13}x_4 & = & \frac{14}{13}. \end{array}\right.$$

5.6.

$$\mathbf{B}_{\overline{\mathbf{x}}} = \{x_1, x_2, x_4\} : \quad \left|\begin{array}{rcrcrcrcl} x_1 & & & - & x_3 & & & = & 0 \\ & & & & x_3 & + & x_4 & = & 1 \\ & & x_2 & - & x_3 & & & = & 0, \end{array}\right.$$

$$\mathbf{B}_{\overline{\mathbf{x}}} = \{x_1, x_3, x_4\}: \quad \left| \begin{array}{rrrrrrrrr} x_1 & - & x_2 & & & & & = & 0 \\ & - & x_2 & + & x_3 & & & = & 0 \\ & & x_2 & & & + & x_4 & = & 1, \end{array} \right.$$

$$\mathbf{B}_{\overline{\mathbf{x}}} = \{x_2, x_3, x_4\}: \quad \left| \begin{array}{rrrrrrrrr} x_1 & & & & & + & x_4 & = & 1 \\ -x_1 & & & + & x_3 & & & = & 0 \\ x_1 & + & x_2 & & & & & = & 0, \end{array} \right.$$

$$\mathbf{B}_{\overline{\mathbf{y}}} = \{x_1, x_2, x_3\}: \quad \left| \begin{array}{rrrrrrrrr} x_1 & & & & & + & x_4 & = & 1 \\ & & & & x_3 & + & x_4 & = & 1 \\ & & x_2 & & & + & x_4 & = & 1. \end{array} \right.$$

6.1. $\overline{\mathbf{x}} = (0, 2)$, $\overline{\mathbf{y}} = (1, 0)$.

6.2. $\overline{\mathbf{x}} = (3, 0, 5, 0, 0, 0)$, $\overline{\mathbf{y}} = (0, 3, 8, 0, 0, 0)$, $\overline{\mathbf{z}} = (0, 0, 2, 3, 0, 0)$.

6.3. $\overline{\mathbf{x}} = \left(\frac{5}{2}, \frac{5}{2}, \frac{5}{2}, 0\right)$, $\overline{\mathbf{y}} = \left(0, \frac{15}{7}, \frac{25}{7}, \frac{15}{7}\right)$.

6.4. $\overline{\mathbf{x}} = (7, 0, 0, 12, 0, 10)$, $\overline{\mathbf{y}} = (10, 0, 3, 0, 0, 1)$, $\overline{\mathbf{z}} = (0, 4, 5, 0, 0, 11)$.

7. Ако $\min\{f(\mathbf{x}) : \mathbf{x} \in Q\} = f(\mathbf{x}^*)$ за всяко $\mathbf{x} \in Q$, тогава $-f(\mathbf{x}) \leq -f(\mathbf{x}^*)$ за всяко $\mathbf{x} \in Q$, т. е. $\max\{-f(\mathbf{x}) : \mathbf{x} \in Q\} = -f(\mathbf{x}^*)$; аналогично е и доказателството в обратната посока.

8. Следва от теорема 4; горна граница $C_n^m = \binom{n}{m}$: толкова са всички подматрици от ред m на $\mathbf{A} = (a_{ij})_{m \times n}$.

9. От определение 4 следва, че ако между първите n компоненти на $\widetilde{\mathbf{x}}$ има k положителни, то $\operatorname{rank} \mathbf{A} \geq k$ ($\mathbf{A} = (a_{ij})_{m \times n}$); тогава има n линейно независими неравенства, определящи P, които $\overline{\mathbf{x}}$ удовлетворява като равенства и съгласно определение 1, $\overline{\mathbf{x}}$ е опорен.

10.

$$L(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{m} \lambda_i a_{ij} \right) x_j = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i b_i.$$

11. Следва от $\left\langle c^1 + c^2, \mathbf{x} \right\rangle = \left\langle c^1, \mathbf{x} \right\rangle + \left\langle c^2, \mathbf{x} \right\rangle \leq l_1^* + l_2^*$ за всяко $\mathbf{x} \in P$.

12. Например: $P = \{\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) : x_1 + x_2 + x_3 = 1,\ x_i \geq 0,\ i = 1, 2, 3\}$, $c^1 = (1, 1, 0)$, $c^2 = (-1, -1, 0)$, $c^1 + c^2 = (0, 0, 0)$, $l^* = 0 < l_1^* + l_2^* = 1 + 0 = 1$.

13. Нека $\mathbf{x}^* \in P_1$ и $\mathbf{x}^{**} \in P_2$ са решения на съответните задачи. От $\mathbf{Ax}^* + \mathbf{Ax}^{**} = \mathbf{A}(\mathbf{x}^* + \mathbf{x}^{**}) = \mathbf{b}^1 + \mathbf{b}^2$ следва, че $\mathbf{y}^* = \mathbf{x}^* + \mathbf{x}^{**} \in P_{12}$ и $l^* \geq \langle \mathbf{c}, \mathbf{y}^* \rangle = \langle \mathbf{c}, \mathbf{x}^* + \mathbf{x}^{**} \rangle = l_1^* + l_2^*$.

14. Например

$$\mathbf{c} = (1, -1, 0, 0), \quad \mathbf{b}^1 = (5, 1), \quad \mathbf{b}^2 = (0, 2), \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$l^* = 3 > l_1^* + l_2^* = 1 + 0 = 1$.

15. Следва от теорема 1 и от това, че двете задачи имат общ рецесивен конус $K = \{\mathbf{x} : \mathbf{Ax} = 0,\ \mathbf{x} \geq 0\}$.

16. Нека $\mathbf{b}^1 \in K_b$, $\mathbf{b}^2 \in K_b$, $\mathbf{Ax}^1 = \mathbf{b}^1$, $\mathbf{x}^1 \geq 0$, $\mathbf{Ax}^2 = \mathbf{b}^2$, $\mathbf{x}^2 \geq 0$ и $\overline{\mathbf{b}} = \lambda_1 \mathbf{b}^1 + \lambda_2 \mathbf{b}^2$ $(\lambda^1 \geq 0,\ \lambda^2 \geq 0)$. Тогава $\mathbf{A}(\lambda_1 \mathbf{x}^1 + \lambda_2 \mathbf{x}^2) = \lambda_1 \mathbf{Ax}^1 + \lambda_2 \mathbf{Ax}^2 = \lambda_1 \mathbf{b}^1 + \lambda_2 \mathbf{b}^2 = \overline{\mathbf{b}}$ и $\mathbf{x} = \lambda_1 \mathbf{x}^1 + \lambda_2 \mathbf{x}^2 \geq 0$, т. е. множеството от планове на задача (16) при $\overline{\mathbf{b}} = \lambda_1 \mathbf{b}^1 + \lambda_2 \mathbf{b}^2$ не е празно и от твърдението в зад. 16 следва, че $\overline{\mathbf{b}} \in K_b$. При $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ имаме $\mathbf{b} = \mathbf{0} \in K_b$.

17. От зад. 16 следва, че $\mathbf{b}_0 = \mathbf{0}$. Нека $\overline{\mathbf{x}} = (\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_n)$ и $\overline{x}_j > 0$, $j = 1, \ldots, n$. Тогава $\overline{\mathbf{b}} = \mathbf{A}\overline{\mathbf{x}} \neq \mathbf{0}$ и понеже множеството от планове на каноничната задача (16) не е празно при $\mathbf{b} = \overline{\mathbf{b}}$, то $\overline{\mathbf{b}} \in K_b$ (противоречие).

18. Нека $\mathbf{c}^1 \in K_c$, $\mathbf{c}^2 \in K_c$ и $\mathbf{x}^*$, $\mathbf{x}^{**}$ са решения на задачата съответно при $\mathbf{c} = \mathbf{c}^1$, $\mathbf{c} = \mathbf{c}^2$. Тогава за $\overline{\mathbf{c}} = \lambda_1 \mathbf{c}^1 + \lambda_2 \mathbf{c}^2$ $(\lambda_1 \geq 0,\ \lambda_2 \geq 0)$ и за всеки план $\mathbf{x}$ имаме: $\langle \overline{\mathbf{c}}, \mathbf{x} \rangle = \left\langle \lambda_1 \mathbf{c}^1 + \lambda_2 \mathbf{c}^2, \mathbf{x} \right\rangle = \lambda_1 \left\langle \mathbf{c}^1, \mathbf{x} \right\rangle + \lambda_2 \left\langle \mathbf{c}^2, \mathbf{x} \right\rangle \leq \lambda_1 \left\langle \mathbf{c}^1, \mathbf{x}^* \right\rangle + \lambda_2 \left\langle \mathbf{c}^2, \mathbf{x}^{**} \right\rangle$. Следователно (теорема 1) задачата има решение при $\mathbf{c} = \overline{\mathbf{c}}$ и $\overline{\mathbf{c}} \in K_c$. Освен това $\mathbf{0} = 0\mathbf{c}_1 + 0\mathbf{c}_2 \in K_c$.

19. Нека $\mathbf{c}^1 \in K_c$, $\mathbf{c}^2 \in K_c$, $\overline{\mathbf{c}} = \lambda \mathbf{c}^1 + (1 - \lambda)\mathbf{c}^2 \in K_c$, $\lambda \in [0, 1]$ (вж. зад. 18). Тогава

$$l^*(\overline{\mathbf{c}}) = \langle \overline{\mathbf{c}}, \overline{\mathbf{x}} \rangle = \lambda \left\langle \mathbf{c}^1, \overline{\mathbf{x}} \right\rangle + (1 - \lambda) \left\langle \mathbf{c}^2, \overline{\mathbf{x}} \right\rangle \leq \lambda l^*(\mathbf{c}^1) + (1 - \lambda) l^*(\mathbf{c}^2)$$

(в общия случай $\overline{\mathbf{x}}$ не е решение при $\mathbf{c} = \mathbf{c}^1$, $\mathbf{c} = \mathbf{c}^2$).

20. Нека $\mathbf{b}^1 \in K_b$, $\mathbf{b}^2 \in K_b$, $l^*(\mathbf{b}^1) = \langle \mathbf{c}, \mathbf{x}^* \rangle$, $l^*(\mathbf{b}^2) = \langle \mathbf{c}, \mathbf{x}^{**} \rangle$ и $\overline{\mathbf{b}} = \lambda \mathbf{b}^1 + (1 - \lambda)\mathbf{b}^2 \in K_b$ (вж. зад. 16), $\lambda \in [0, 1]$. Ако $\overline{\mathbf{x}} = \lambda \mathbf{x}^* + (1 - \lambda)\mathbf{x}^{**}$, получаваме $\overline{\mathbf{x}} \geq 0$ и $\mathbf{A}\overline{\mathbf{x}} = \lambda \mathbf{Ax}^* + (1 - \lambda)\mathbf{Ax}^{**} = \lambda \mathbf{b}^1 + (1 - \lambda)\mathbf{b}^2 = \mathbf{b}$, т. е. $\overline{\mathbf{x}}$ е план на задачата при $\mathbf{b} = \overline{\mathbf{b}}$. Следователно $l^*(\overline{\mathbf{b}}) \geq \langle \mathbf{c}, \overline{\mathbf{x}} \rangle = \langle \mathbf{c}, \lambda \mathbf{x}^* + (1 - \lambda)\mathbf{x}^{**} \rangle = \lambda l^*(\mathbf{b}^1) + (1 - \lambda) l^*(\mathbf{b}^2)$.

21. За всеки вектор на условията $\mathbf{a}^j$, $j = 1, \ldots, n$, както и за вектора $\mathbf{b}$ трябва да се решат съответно системите

$$(*) \qquad \sum_{k=1}^{m} \alpha_{kj} \mathbf{a}^{s_k} = \mathbf{a}^j, \qquad \sum_{k=1}^{m} \beta_k \mathbf{a}^{s_k} = \mathbf{b}$$

с неизвестни α_{kj} и β_k, $k = 1, \ldots, m$. Ако означим $\boldsymbol{\alpha}^j = (\alpha_{1j}, \ldots, \alpha_{mj})$, $\overline{\boldsymbol{\beta}} = (\beta_1, \ldots, \beta_m)$, $\mathbf{B} = [\mathbf{a}^{s_1} \mid \cdots \mid \mathbf{a}^{s_m}]$, системите (*) се записват така: $\mathbf{B}\boldsymbol{\alpha}^j = \mathbf{a}^j$, $\mathbf{B}\boldsymbol{\beta} = \mathbf{b}$, откъдето $\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{a}^j$, $j = 1, \ldots, n$, $\overline{\boldsymbol{\beta}} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$. В частност за базисните вектори $\mathbf{a}^{s_i}$, $i = 1, \ldots, m$, се получава $\mathbf{a}^{s_i} = \mathbf{e}^{s_i}$ — единичен вектор с единица на i-то място, т. е. $[\mathbf{a}^{s_1} \mid \cdots \mid \mathbf{a}^{s_m}] = \mathbf{E}$. Ако означим с $\mathbf{A}_N$ матрицата от небазисните вектори на условията $\mathbf{a}^j$, т. е. $\mathbf{A} = [\mathbf{B}, \mathbf{A}_N]$, а с $\overline{\boldsymbol{\alpha}}_N$ — матрицата от съответните на $\mathbf{a}^j$ вектори $\boldsymbol{\alpha}^i$ на разлагане, то $\overline{\boldsymbol{\alpha}}_N = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}_N$. Сравняването с (18) и (20) показва, че в базисния вид (22)–(24) на КЗ спрямо $\overline{\mathbf{x}}$ имаме $\boldsymbol{\alpha}_N = \overline{\boldsymbol{\alpha}}_N$, $\boldsymbol{\beta} = \overline{\boldsymbol{\beta}}$.

22. Не са интересни теоретично: нека $m \geq n$ и $\operatorname{rank}\mathbf{A} = \rho \leq n$; ако $\operatorname{rank}[\mathbf{A}|\mathbf{b}] \neq \rho$, системата (14) няма решение; ако $\operatorname{rank}[\mathbf{A}|\mathbf{b}] = \rho$, при $m = n$ системата (14) има единствено решение, а при $n > m$ всяка подсистема на (14) от ранг ρ има същите решения както и (14).

§ 4. Свойства на опорните планове на КЗ

1.1. Съседни опорни: $\overline{\mathbf{y}} = (4, 0, 0, 0, 2)$, $\overline{\mathbf{z}} = (0, 2, 0, 0, 0)$ — неоптимални.

1.2. Неограничен ръб при $x_3 = t \to +\infty$: $\mathbf{x}_t = (9 + 3t, 3 + t, t, 0)$, $t \geq 0$, $l(\mathbf{x}^t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} +\infty$.

1.3. Съседни опорни: $\overline{\mathbf{y}} = (1, 5, 0, 0, 3)$, $\overline{\mathbf{z}} = (0, 3, 1, 0, 0)$. Решения $\mathbf{x}^\lambda = \lambda\overline{\mathbf{x}} + (1 - \lambda)\overline{\mathbf{z}}$ и $l^* = 3$.

1.4. Съседен опорен $\overline{\mathbf{y}} = (0, 1, 3, 0, 0)$. Неограничен оптимален ръб при $x_4 = t \to +\infty$: $\mathbf{x}^t = (0, 0, 4, t, 1 + t)$, $t \geq 0$, $l^* = 2$. Неограничен ръб при $x_1 = t \to +\infty$: $\mathbf{x}^t = (t, 0, 4 + 2t, 0, 1 + t)$, $t \geq 0$, $l(\mathbf{x}^t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} -\infty$.

1.5. $\overline{\mathbf{x}}$ е решение. Съседно оптимално решение $\overline{\mathbf{y}} = (0, 1, 3, 0, 0)$. Неограничен ръб при $x_1 = t \to +\infty$: $\mathbf{x}^t = (t, 0, 4 + 2t, 0, 1 + t)$, $t \geq 0$, $l(\mathbf{x}^t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} -\infty$. Неограничен оптимален ръб при $x_4 = t \to +\infty$: $\mathbf{x}^t = (0, 0, 4, t, 1 + t)$, $t \geq 0$. Съгласно теорема 5 решенията са $\mathbf{x}^{\lambda t} = \lambda\overline{\mathbf{x}} + (1 - \lambda)\overline{\mathbf{y}} + t\mathbf{p}$, $\lambda \in [0, 1]$, $t \geq 0$, $\mathbf{p} = (0, 0, 0, 1, 1)$.

1.6. Съседен опорен $\overline{\mathbf{y}} = (0, 1, 3, 0, 0)$. Неограничен ръб при $x_1 = t \to +\infty$: $\mathbf{x}^t = (t, 0, 4 + 2t, 0, 1 + t)$, $t \geq 0$, $l(\mathbf{x}^t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} +\infty$.

1.7. Съседен опорен $\overline{\mathbf{y}} = (0, 2, 0, 47)$. Решения $\mathbf{x}^\lambda = \lambda\overline{\mathbf{x}} + (1-\lambda)\overline{\mathbf{y}}$, $\lambda \in [0, 1]$ и $l^* = 12$. Неограничен ръб при $x_3 = t \to +\infty$: $\mathbf{x}^t = (6 + t, 0, t, 79 + 3t)$, $t \geq 0$, $l(\mathbf{x}^t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} +\infty$.

2.1. $l(\mathbf{x}) = 3 + 4(a - 1)x_3 + 2(1 - a)x_4$: $x_1 + ax_3 = 1$, $x_2 - 2ax_3 - x_4 = 1$. **а)** Няма такова $a \neq 0$. **б)** $a = 1$. Съседен опорен $\overline{\mathbf{y}} = (0, 3, 1, 0)$. Неограничен ръб при $x_4 = t \to +\infty$ с направляващ вектор $\mathbf{p} = (0, 1, 0, 1)$. Решения $\mathbf{x}^{\lambda t} = \lambda\overline{\mathbf{x}} + (1 - \lambda)\overline{\mathbf{y}} + t\mathbf{p}$, $\lambda \in [0, 1]$, $t \geq 0$. **в)** $a < 1$: $\mathbf{x}^t = (1, 1 + t, 0, t)$, $t \geq 0$. **г)** $a > 1$: $\overline{\mathbf{z}} = \left(0, 3, \frac{1}{a}, 0\right)$.

2.2. $l(\mathbf{x}) = \left(a + \frac{1}{a}\right) + (b-2)x_3 + \left(2 - a^2 - \frac{1}{a^2}\right)x_4$, $x_1 + \frac{1}{a}x_3 + ax_4 = 1$, $x_2 + ax_3 + \frac{1}{a}x_4 = 1$. **а)** $b < 2$; **б)** $b = 2$ и/или $a = \pm 1$. При $b = 2$, $a \geq 1$: съседен опорен $\overline{\mathbf{y}} = \left(1 - \frac{1}{a^2}, 0, \frac{1}{a}, 0\right)$; решения $\mathbf{x}^\lambda = \lambda\overline{\mathbf{x}} + (1-\lambda)\overline{\mathbf{y}}$, $\lambda \in [0, 1]$. При $b = 2$, $0 < a \leq 1$: съседен опорен $\overline{\mathbf{z}} = (0, 1 - a^2, a, 0)$; решения $\mathbf{x}^\lambda = \lambda\overline{\mathbf{x}} + (1 - \lambda)\overline{\mathbf{z}}$, $\lambda \in [0, 1]$. При $b \neq 2$, $a = 1$: съседен опорен $\overline{\mathbf{u}} = (0, 0, 0, 1)$; решения $\mathbf{x}^\lambda = \lambda\overline{\mathbf{x}} + (1 - \lambda)\overline{\mathbf{u}}$, $\lambda \in [0, 1]$. При $b \neq 2$, $a = -1$: $\mathbf{x}^t = (1 + t, 1 + y, 0, t)$. **в)** $b \geq 2$, $a < 0$: $\mathbf{x}^t = \left(1 - \frac{1}{a}t, 1 - at, t, 0\right)$. **г)** $b \geq 2$ и/или $a > 0$: $\overline{\mathbf{y}} = \left(1 - \frac{1}{a^2}, 0, \frac{1}{a}, 0\right)$, $\overline{\mathbf{z}} = (0, 1 - a^2, a, 0)$.

2.3. $\bar{l}(\mathbf{x}) = -l(\mathbf{x}) = 1 + (2a+1)x_1 - (b+2)x_2$, $2x_1 - x_2 + x_3 = 1$, $x_1 + x_2 + x_4 = 1$. **а)** $a < -\frac{1}{2}$, $b > -2$. **б)** $a \leq -\frac{1}{2}$ и/или $b = -2$. При $a = -\frac{1}{2}$, $b > -2$: съседен опорен $\overline{\mathbf{y}} = \left(\frac{1}{2}, 0, 0, \frac{3}{2}\right)$; решения $\mathbf{x}^\lambda = \lambda\overline{\mathbf{x}} + (1 - \lambda)\overline{\mathbf{y}}$, $\lambda \in [0, 1]$. При $a < -\frac{1}{2}$, $b = -2$: съседен опорен $\overline{\mathbf{z}} = \left(0, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, 0\right)$; решения $\mathbf{x}^\lambda = \lambda\overline{\mathbf{x}} + (1 - \lambda)\overline{\mathbf{z}}$, $\lambda \in [0, 1]$. При $a = -\frac{1}{2}$, $b = -2$; съседни опорни са $\overline{\mathbf{y}}$ и $\overline{\mathbf{z}}$; решения $\mathbf{x}^\lambda = \lambda_1\overline{\mathbf{x}} + \lambda_2\overline{\mathbf{y}} + \lambda_3\overline{\mathbf{z}}$, $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \geq 0$, $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1$. **в)** Няма такива a и b. **г)** $a > -\frac{1}{2}$ и/или $b < -2$. При $a > -\frac{1}{2}$: $\overline{\mathbf{y}} = \left(\frac{1}{2}, 0, 0, \frac{3}{2}\right)$. При $b < -2$: $\overline{\mathbf{z}} = \left(0, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, 0\right)$.

2.4. $l(\mathbf{x}) = (-1-2a+b)x_1 + (1+a-2b)x_2$, $2x_1 - x_2 + x_3 = 1$, $-x_1 + 2x_2 + x_4 = 1$. **а)** $-2a + b < 1$, $a - 2b < 1$, т. е. $\frac{b-1}{2} < a < 2b + 1$. **б)** $\Delta_1 = -2a + b - 1$ и/или $\Delta_2 = a - 2b - 1 = 0$. При $\Delta_1 = 0$, $\Delta_2 \neq 0$: съседен опорен $\overline{\mathbf{y}} = \left(\frac{1}{2}, 0, 0, \frac{3}{2}\right)$; решения $\mathbf{x}^\lambda = \lambda\overline{\mathbf{x}} + (1 - \lambda)\overline{\mathbf{y}}$, $\lambda \in [0, 1]$. При $\Delta_1 \neq 0$, $\Delta_2 = 0$: съседен $\overline{\mathbf{z}} = \left(0, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, 0\right)$; решения $\mathbf{x}^\lambda = \lambda\overline{\mathbf{x}} + (1 - \lambda)\overline{\mathbf{z}}$, $\lambda \in [0, 1]$. При $\Delta_1 = \Delta_2 = 0$, т. е. $a = b = 1$: решения $\mathbf{x}^\lambda = \lambda_1\overline{\mathbf{x}} + \lambda_2\overline{\mathbf{y}} + \lambda_3\overline{\mathbf{z}} = \left(\frac{1}{2}\lambda_2, \frac{1}{2}\lambda_3, \lambda_1 + \frac{3}{2}\lambda_3, \lambda_1 + \frac{3}{2}\lambda_2\right)$, $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1$, $\lambda_i \geq 0$, $i = 1, 2, 3$. **в)** Няма такива a и b. **г)** При $-2a + b - 1 > 0$: $\overline{\mathbf{y}}$; при $a - 2b - 1 > 0$: $\overline{\mathbf{z}}$.

2.5. При базис $\{x_2, x_3\}$: $l(\mathbf{x}) = -a + (1-2a)x_1$, $-x_1 + x_3 = 1$, $-x_1 + x_2 = 1$. **а)** $a > \frac{1}{2}$. **б)** $a = \frac{1}{2}$: $\mathbf{x}^t = (t, t, 1+t)$, $t \geq 0$. **в)** $a < \frac{1}{2}$: $\mathbf{x}^t = (t, t, 1+t)$, $t \geq 0$. **г)** Няма такива.

2.6. $\bar{l}(\mathbf{x}) = -l(\mathbf{x}) = 1 + (1+2b)x_3 + (2+a)x_4$, $x_2 - bx_3 + 2ax_4 = 1$, $x_1 + 2bx_3 - ax_4 = 1$. **а)** $b > -\frac{1}{2}$, $a < -2$, $l^* = -\bar{l}^* = 1$. **б)** $b = -\frac{1}{2}$ и/или $a = -2$. При $b = -\frac{1}{2}$, $a < -1$: съседен опорен $\overline{\mathbf{y}} = (2, 0, 2, 0)$; решения $\mathbf{x}^\lambda = \lambda\overline{\mathbf{x}} + (1-\lambda)\overline{\mathbf{y}}$; $\lambda \in [0, 1]$. При $a = -2$, $b > -\frac{1}{2}$: съседен опорен $\overline{\mathbf{z}} = \left(0, 3, 0, \frac{1}{2}\right)$; решения $\overline{\overline{\mathbf{x}}}^\lambda = \lambda\overline{\mathbf{x}} + (1-\lambda)\overline{\mathbf{z}}$, $\lambda \in [0, 1]$. При $a = -2$, $b = -\frac{1}{2}$: съседни опорни $\overline{\mathbf{y}}$, $\overline{\mathbf{z}}$; решения $\mathbf{x}^\lambda = \lambda_1\overline{\mathbf{x}} + \lambda_2\overline{\mathbf{y}} + \lambda_3\overline{\mathbf{z}}$, $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1$, $\lambda_i \geq 0$, $i = 1, 2, 3$. **в)** Няма такива a, b. **г)** При $b < -\frac{1}{2}$: $\overline{\mathbf{y}}$; при $a > -2$: $\overline{\mathbf{z}}$.

2.7. $l(\mathbf{x}) = 2 + (a+2)x_2 + (2b-1)x_3$, $x_1 - (a+1)x_2 - 2bx_3 = 2$, $(2a+1)x_2 + bx_3 + x_4 = 1$. **а)** $a < -2$, $b < \frac{1}{2}$. **б)** $a = -2$ и/или $b = \frac{1}{2}$. При $a = -2$, $b < \frac{1}{2}$: съседен опорен $\overline{\mathbf{y}} = (0, 2, 0, 7)$; решения $\overline{\mathbf{x}}^\lambda = \lambda\overline{\mathbf{x}} + (1-\lambda)\overline{\mathbf{y}}$, $\lambda \in [0, 1]$. При $a < -2$, $b = \frac{1}{2}$: съседен опорен $\overline{\mathbf{z}} = (4, 0, 2, 0)$; решения $\overline{\overline{\mathbf{x}}}^\lambda = \lambda\overline{\mathbf{x}} + (1-\lambda)\overline{\mathbf{z}}$, $\lambda \in [0, 1]$. При $a = -2$, $b = \frac{1}{2}$: съседни опорни решения са $\overline{\mathbf{y}}$, $\overline{\mathbf{z}}$. От $\overline{\mathbf{y}}$ излиза неограничен ръб $\overline{\mathbf{x}}^t = \left(0, 2+t, t, 7+\frac{5}{2}t\right)$, $t \geq 0$, а от $\overline{\mathbf{z}}$ — неограничен ръб $\overline{\overline{\mathbf{x}}}^t = (4+5t, t, 2+6t, 0)$, $t \geq 0$; решения $\mathbf{x}^{\lambda t} = \lambda_1\overline{\mathbf{x}} + \lambda_2\overline{\mathbf{y}} + \lambda_3\overline{\mathbf{z}} + t_1\overline{\mathbf{p}} + t_2\overline{\overline{\mathbf{p}}}$ за $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1$, $\lambda_i \geq 0$, $i = 1, 2, 3$, $t_1 \geq 0$, $t_2 \geq 0$, и $\overline{\mathbf{p}} = \left(0, 1, 1, \frac{5}{2}\right)$, $\overline{\overline{\mathbf{p}}} = (5, 1, 6, 0)$. **в)** $-1 \leq a \leq \frac{1}{2}$: $\mathbf{x}^t = (4 - (3a+1)t, t, 2 - (4a+4)t, 0)$. **г)** $a \in (-2, -1)$ или $a > -\frac{1}{2}$, или $b > \frac{1}{2}$. При $a \in (-2, -1)$: $\overline{\mathbf{u}} = \left(0, -\frac{2}{a+1}, 0, \frac{5a+3}{a+1}\right)$. При $a > -\frac{1}{2}$: $\overline{\mathbf{v}} = \left(\frac{5a+3}{2a+1}, \frac{1}{2a+1}, 0, 0\right)$. При $b > \frac{1}{2}$: $\mathbf{w} = \left(4, 0, \frac{1}{b}, 0\right)$.

2.8. $l(\mathbf{x}) = 9 + (2-a)x_3 + (1+a)x_4$, $x_1 - 2x_3 - x_4 = 4$, $x_2 + x_3 = 5$. **а), б)** Няма такива a. **в)** $a > -1$: $\mathbf{x}^t = (4+t, 5, 0, t)$, $t \geq 0$. **г)** При $a < 2$: $\overline{\mathbf{y}} = (14, 0, 5, 0)$.

2.9. $l(\mathbf{x}) = a + 4 + (a-5)x_2 + (2a-2)x_3$, $x_1 - x_2 - 2x_3 = 1$, $3x_2 + x_3 + x_4 = 2$, $x_3 + x_5 = 1$. **а)** $a < 1$. **б)** $a = 1$: $\overline{\mathbf{y}} = (3, 0, 1, 1, 0)$; решения $\mathbf{x}^\lambda = \lambda\overline{\mathbf{x}} + (1-\lambda)\overline{\mathbf{y}}$, $\lambda \in [0, 1]$. **в)** $a > 5$: $\mathbf{x}^t = (1+t, t, 0, 2+3t, 1)$, $t \geq 0$. **г)** $a > 1$: $\overline{\mathbf{y}} = (3, 0, 1, 1, 0)$.

2.10. $\bar{l}(\mathbf{x}) = -l(\mathbf{x}) = a - 2 + (3a-2)x_2 + (a+2)x_5$, $x_1 - x_2 + 2x_5 = 3$, $-3x_2 + x_4 - x_5 = 1$, $x_3 + x_5 = 1$. **а)** $a < -2$. **б)** $a = -2$ или $a = \frac{2}{3}$. При $a = -2$: $\overline{\mathbf{y}} = (1, 0, 0, 2, 1)$; решения $\mathbf{x}^\lambda = \lambda\overline{\mathbf{x}} + (1-\lambda)\overline{\mathbf{y}}$, $\lambda \in [0, 1]$. При $a = \frac{2}{3}$: $\mathbf{x}^t = (3+t, t, 1, 1+3t, 0)$, $t \geq 0$. **в)** При $a > \frac{2}{3}$: $\mathbf{x}^t = (3+t, t, 1, 1+3t, 0)$, $t \geq 0$. **г)** $a > -2$: $\overline{\mathbf{y}} = (1, 0, 0, 2, 1)$.

3. $l(\mathbf{x}) = 4 + (a+3)x_4 - x_5$, $x_1 + (a+1)x_4 + ax_5 = 1$, $x_2 + (2a+1)x_4 + 3x_5 = 2$, $x_3 + (a+2)x_4 + x_5 = 1$, $x_j \geq 0$, $j = 1, \ldots, 5$. **а)** При $a \in (-3, -2)$: $\mathbf{x}^t = (1 + (a+1)t, 2 - (2a+1)t, 1 + (a+2)t, t, 0)$. **б)** $a = \frac{3}{2}$.

4.1. **а)** $a \le 1$. **б)** $a \ge 5$. **в)** $1 < a \le 5$.

4.2. **а)** $a \le -2$. **б)** $a > \frac{2}{3}$. **в)** $-2 < a \le \frac{2}{3}$.

5. $c_1 a + c_2 b + c_3 \ge 0$, $c_1 a - c_2 b - c_4 \ge 0$, $c_1 b - c_2 a \le 0$, $c_1 b + c_2 a \ge 0$.

6. $\widetilde{\mathbf{x}}^*$ е опорен план на задачата (защо?), чиято базисна матрица е базисната матрица $\mathbf{B}$ на $\mathbf{x}^*$; при означения $\mathbf{x}^* = (\mathbf{x}^*_{\mathbf{B}}, 0) = (\boldsymbol{\beta}, 0)$, $\mathbf{x} = (\mathbf{x}_{\mathbf{B}}, \mathbf{x}_N)$, $\widetilde{\mathbf{x}}^* = (\mathbf{x}^*_{\mathbf{B}}, 0, 0) = (\boldsymbol{\beta}, 0, 0)$, $\widetilde{\mathbf{x}} = (\mathbf{x}_{\mathbf{B}}, \mathbf{x}_N, x_{n+1})$, $\mathbf{c} = (\mathbf{c}_{\mathbf{B}}, \mathbf{c}_N, c_{n+1})$ базисният вид на задачата спрямо $\widetilde{\mathbf{x}}^*$ е $l(\widetilde{\mathbf{x}}) = \Delta_0 + \langle \Delta_N, x_N \rangle + \Delta_{n+1} x_{n+1}$, $\mathbf{x}_{\mathbf{B}} + \boldsymbol{\alpha}_N \mathbf{x}_N + \boldsymbol{\alpha}_N^{n+1} x_{n+1} = \boldsymbol{\beta}$, $\widetilde{\mathbf{x}} = (\mathbf{x}_{\mathbf{B}}, \mathbf{x}_N, x_{n+1}) \ge 0$, който се различава от базисния вид (22)–(24) на зад. (17) само по $\alpha_N^{n+1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{a}^{n+1}$ и $\Delta_{n+1} = c_{n+1} - c_{\mathbf{B}}\alpha_N^{n+1} = c_{n+1} - c_{\mathbf{B}}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{a}^{n+1}$. **а)** $\Delta_{n+1} = c_{n+1} - c_{\mathbf{B}}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{a}^{n+1} \le 0$. **б)** $\Delta_{n+1} > 0$ и $\boldsymbol{\alpha}_N^{n+1} \le 0$.

7. Да, ако всички планове на задачата са оптимални, т. е. $\mathbf{c} = \mathbf{c}^{\mathbf{B}}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}$ ($\mathbf{c}$ е линейна комбинация на редовете на матрицата $\mathbf{A}$). Наистина от (18), (20), (21) имаме $\boldsymbol{\Delta}^N = \mathbf{c}^N - \mathbf{c}^{\mathbf{B}}\alpha_N = \mathbf{c}^N - \mathbf{c}^{\mathbf{B}}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}_N$; очевидно $\mathbf{c}^{\mathbf{B}} = \mathbf{c}^{\mathbf{B}}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{B}$, т. е. $\mathbf{c} = (\mathbf{c}^{\mathbf{B}}, \mathbf{c}^N) = \mathbf{c}^{\mathbf{B}}\mathbf{B}^{-1}(\mathbf{B}|\mathbf{A}_N) = \mathbf{c}^{\mathbf{B}}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}$; $l(\mathbf{x}) = \langle c, x \rangle = \left\langle \mathbf{c}^{\mathbf{B}}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}, \mathbf{x} \right\rangle = \left\langle \mathbf{c}^{\mathbf{B}}\mathbf{B}^{-1}, \mathbf{A}\mathbf{x} \right\rangle = \left\langle \mathbf{c}^{\mathbf{B}}\mathbf{B}^{-1}, \mathbf{b} \right\rangle$ (вж. зад. 12, § 3).

8. Нека (22)–(24) е базисен вид на задачата, съответстващ на $\bar{\mathbf{x}}$ при означенията (18), (20)–(21). **а)** Трябва да изберем $\mathbf{c} = (\mathbf{c}_{\mathbf{B}}, \mathbf{c}_N)$ така, че $\boldsymbol{\Delta}_N = \mathbf{c}_N - \mathbf{c}_{\mathbf{B}}\alpha_N \le \mathbf{0}$, например при $\mathbf{c}_{\mathbf{B}} = \mathbf{0}$ и $\mathbf{c}_N \le \mathbf{0}$. **б)** Необходимо и достатъчно е да съществува индекс q ($1 \le q \le n-m$), за който $\alpha_N^q \le \mathbf{0}$; тогава достатъчно е да изберем $\mathbf{c}_{\mathbf{B}} = \mathbf{0}$ и $(\mathbf{c}_N)_q > 0$. **в)** Необходимо и достатъчно е да съществуват индекси q ($1 \le q \le n - m$) и p ($1 \le p \le m$) такива, че $(\alpha_N^q)_p > \mathbf{0}$; тогава достатъчно е да изберем $\mathbf{c}_{\mathbf{B}} = \mathbf{0}$ и $(\mathbf{c}_N)_q > \mathbf{0}$.

9. Нека $\bar{\mathbf{x}}$ е опорен план и съответстващият му базисен вид на задачата е (22)–(24) при означенията (18), (20), (21). **а)** $\bar{\mathbf{x}}$ е оптимален, ако $\boldsymbol{\Delta}_N \ge \mathbf{0}$. **б)** Съществува $(\boldsymbol{\Delta}_N)_q < 0$ и $\boldsymbol{\alpha}_N^q \le \mathbf{0}$.

§ 5. Симплекс-метод

1.1. $l^* = 1$. Максимизира се $\bar{l}(\mathbf{x}) = x_4 + x_5$. При влизане на x_4 в базиса решение е $\mathbf{x}^* = (0, 3, 4, 2, 0)$. При влизане на x_5 в базиса решение е $\mathbf{x}^{**} = (0, 1, 8, 0, 2)$. Всички решения са $\mathbf{x}^\lambda = \lambda\mathbf{x}^* + (1-\lambda)\mathbf{x}^{**} = (0, 2\lambda+1, 8-4\lambda, 2\lambda, 2-2\lambda)$, $\lambda \in [0, 1]$.

1.2. От $\bar{\mathbf{x}} = (3, 0, 5, 0, 0, 0)$ излиза неограничен ръб $\mathbf{x}^t = (3 + t, 0, 5, 0, 0, t)$, $t \ge 0$; $l(\mathbf{x}^t) = 50 + 4t \xrightarrow[t\to\infty]{} +\infty$.

1.3. $\overline{\mathbf{x}} = (7, 0, 2, 0, 0)$ е решение, $l^* = 16$. Оптимални неограничени ръбове ($\Delta_4 = 0$) $\mathbf{x}^t = (7+t, 0, 2+3t, t, 0)$, $t \geq 0$, с направляващ вектор $\mathbf{p} = (1, 0, 3, 1, 0)$ и ($\Delta_5 = 0$) $\mathbf{x}^r = (7+5r, 0, 2+2r, 0, r)$, $r \geq 0$, с направляващ вектор $\mathbf{q} = (5, 0, 2, 0, 1)$. Всички решения са $\mathbf{x}^\mu = \overline{\mathbf{x}} + \mu_1\mathbf{p} + \mu_2\mathbf{q} = (7 + \mu_1 + 5\mu_2, 0, 2 + 3\mu_1 + 2\mu_2, \mu_1, \mu_2)$, $\mu_1 \geq 0$, $\mu_2 \geq 0$.

1.4. $\overline{\mathbf{x}} = (7, 0, 2, 0, 0)$ е решение, $l^* = 16$. Неограничени ръбове с точки $\mathbf{x}^t$ ($\Delta_4 = 0$) и $\mathbf{x}^r$ ($\Delta_5 = 0$) от вида в зад. 1.3. $\overline{\mathbf{x}}$ има съседно опорно решение ($\Delta_2 = 0$) $\overline{\mathbf{y}} = (3, 2, 0, 0, 0)$. Решения са $\mathbf{x}^{\lambda\mu} = \lambda\overline{\mathbf{x}} + (1 - \lambda)\overline{\mathbf{y}} + \mu_1\mathbf{p} + \mu_2\mathbf{q} = (3 + 4\lambda + \mu_1 + 5\mu_2, 2 - 2\lambda, 2\lambda + 3\mu_1 + 2\mu_2, \mu_1, \mu_2)$, $\lambda \in [0, 1]$, $\mu_1 \geq 0$, $\mu_2 \geq 0$ (това не са всички решения — от $\overline{\mathbf{y}}$ също излиза неограничен оптимален ръб).

1.5. $l^* = \frac{5}{3}$, $\mathbf{x}^* = \left(\frac{17}{6}, \frac{5}{3}, 0\right)$.

1.6. $l^* = 0$, $\mathbf{x}^* = \left(0, \frac{1}{2}, 0, 0\right)$.

1.7. $l^* = 6$, $\mathbf{x}^* = (3, 3, 1, 1)$.

1.8. $l^* = 3$, $\mathbf{x}^* = (3, 0, 1)$.

1.9. l^* е неограничена отгоре.

1.10. $l^* = 108$, $\mathbf{x}^* = (2, 5, 4)$.

2.1. $a > 0$: $l^* = a + 3$, $\mathbf{x}^* = (3, a, 0)$; $a < 0$: $l^* = a + 1$, $\mathbf{x}^* = \mathbf{x}^0 = (0, 1, 1)$.

2.2. $a > 0$: $l^* = 3a$, $\mathbf{x}^* = (a, 2, 0)$; $a < 0$: $l^* = a$, $\mathbf{x}^* = (-a, 0, 2)$.

2.3. $2a + 1 > 0$: $l(\mathbf{x})$ расте неограничено в множеството от планове; $2a + 1 < 0$: $l^* = a + 2$, $vx^* = \mathbf{x}^0 = (2, 1, 0)$; $2a + 1 = 0$: $l^* = a + 2$, $\mathbf{x}^t = (2 + t, 1 + t, t)$, $t \geq 0$.

2.4. $a \leq 2$: $l^* = -1$, $\mathbf{x}^* = x^0 = (1, 2, 0)$; $a > 2$: $l^* = a - 3$, $\mathbf{x}^* = (0, 1, 1)$.

2.5. $a > 0$: $l^* = a + 2$, $\mathbf{x}^* = (a, 2, 0)$; $a < 0$: $l^* = 2$, $\mathbf{x}^* = \mathbf{x}^0 = (0, 1, 1)$.

§ 6. Решаване на КЗ при неизвестен начален базис

1.1. Допълнителни променливи x_3, x_4. Начален базис $\{x_3, x_4, x_5\}$, x_5 изкуствена променлива. Решение на M-зад. $(0, 1, 2, 0, 0)$, на КЗ $\mathbf{x}^* = (0, 1, 2, 0)$, на изходната задача $\mathbf{x}^*_И = (0, 1)$, $l^* = 16$. **а)** За КЗ съседно на $\mathbf{x}^*$ опорно решение $(\Delta_1 = 0)$ $\mathbf{x}^{**} = \left(\frac{56}{17}, \frac{10}{17}, \frac{104}{17}, 0\right)$, за изходната задача $\mathbf{x}^{**}_И = \left(\frac{56}{17}, \frac{10}{17}\right)$. **б)** Няма. **в)** $\mathbf{x}^\lambda = \lambda\mathbf{x}^*_И + (1-\lambda)\mathbf{x}^{**}_И = \left(\frac{56}{17} - \lambda\frac{56}{17}, \frac{10}{17} + \lambda\frac{7}{17}\right)$, $\lambda \in [0, 1]$.

1.2. Допълнителни променливи x_4, x_5, $x_3 = x_3' - x_3''$. Начален базис $\{x_2, x_6, x_5\}$, x_6 изкуствена променлива. Решение на M-зад. $(1, 3, 0, 1, 0, 0, 0)$, на КЗ $\mathbf{x}^* = (1, 3, 0, 1, 0, 0)$, на изходната зад. $\mathbf{x}^*_И = (1, 3, -1)$, $l^* = 4$. **а)** Няма. **б)** Няма. Оптимален неограничен ръб на КЗ, излизащ от $\mathbf{x}^*$ $(\Delta_3' = 0,\ x_3' = t \to +\infty)$ $\mathbf{x}^t = (1, 3, t, 1+t, 0, 0)$, $t \geq 0$, но за изходната задача $\mathbf{x}^t_И = (1, 3, t - (1+t)) = (1, 3, -1) = \mathbf{x}^*_И$.

1.3. Допълнителни променливи x_4, x_5, $x_1 = x_1' - x_1''$. Начален базис $\{x_1', x_6, x_5\}$, x_6 изкуствена променлива. Решение на M-задачата $(1, 0, 2, 0, 0, 2, 0)$, на КЗ $\mathbf{x}^* = (1, 0, 2, 0, 0, 2)$, на изходната задача $\mathbf{x}^*_И = (1, 2, 0)$, $l^* = 14$. **а)** За КЗ съседно на $\mathbf{x}^*$ опорно решение $(\Delta_3 = 0)$ е $\mathbf{x}^{**} = (7, 0, 0, 2, 0, 2)$, на $\mathbf{x}^*_И$ — $\mathbf{x}^{**}_И = (7, 0, 2)$. **б)** Няма. Оптимален неограничен ръб на КЗ, излизащ от $\mathbf{x}^*$ $(\Delta_1'' = 0,\ x_1'' = t \to +\infty)$ $\mathbf{x}^t = (1+t, t, 2, 0, 0, 2)$, $t \geq 0$, но за изходната задача $\mathbf{x}^t_И = (1+t-t, 2, 0) = (1, 2, 0) = \mathbf{x}^*_И$. **в)** $\mathbf{x}^\lambda = \lambda\mathbf{x}^*_И + (1-\lambda)\mathbf{x}^{**}_И = (7-6\lambda, 2\lambda, 2-2\lambda)$.

1.4. Допълнителни променливи x_3, x_4, x_5, $x_1 = x_1' - x_1''$, $\bar{l}(\mathbf{x}) = -l(\mathbf{x}) \to \max$. Начален базис $\{x_6, x_4, x_7\}$, x_6, x_7 изкуствени променливи. M-задачата няма решение (вж. например стълба x_5 от табл. 31 за $\widetilde{\mathbf{x}}$), следователно КЗ

$\widetilde{\mathbf{x}}$; $\bar{x}$

B	β	x_1'	x_1''	x_5
x_2	2	1	−1	−1
x_4	4	6	−6	−2
x_3	3	3	−3	−2
	−20	−14	14	10

Таблица 31

и изходната задача са неразрешими. От стълба x_5 от табл. 31 за опорния план $\bar{\mathbf{x}} = (0, 0, 2, 3, 4, 0)$ на КЗ е ясно, че $\bar{l}(\mathbf{x}) \to +\infty$ (съответно $l(\mathbf{x}) \to -\infty$) в множеството от планове.

1.5. Допълнителни променливи x_4, x_5, $x_2 = x_2' - x_2''$, $\bar{l}(\mathbf{x}) = -l(\mathbf{x}) \to \max$. Начален базис $\{x_3, x_6, x_5\}$, x_6 изкуствена променлива. Решение на M-задачата (табл. 32) $\widetilde{\mathbf{x}}^* = \left(\frac{3}{5}, \frac{8}{5}, 0, \frac{36}{5}, 0, 0, 0\right)$, $l_M(\mathbf{x}) = 4$, на КЗ $\mathbf{x}^* = \left(\frac{3}{5}, \frac{8}{5}, 0, \frac{36}{5}, 0, 0\right)$, на из-

$\widetilde{\mathbf{x}}^*$; $\mathbf{x}^*$

B	β	x_2''	x_4	x_5
x_3	36/5	0	−2/5	9/5
x_1	3/5	0	−1/5	−3/5
x_2'	8/5	−1	−1/5	2/5
	−4	0	0	−1

Таблица 32

ходната задача $\mathbf{x}^*_{И} = \left(\frac{3}{5}, \frac{8}{5}, \frac{36}{5}\right)$, $l^* = -4$. **а)** Няма. **б)** Оптимални неограничени ръбове на КЗ, излизащи от $\mathbf{x}^*$ ($\Delta_2'' = 0$, $x_2'' = t \to +\infty$) $\mathbf{x}^t = \left(\frac{3}{5}, \frac{8}{5} + t, t, \frac{36}{5}, 0, 0\right)$, $t \geq 0$ и ($\Delta_4 = 0$, $x_4 = r \to +\infty$) $\mathbf{x}^r = \left(\frac{3}{5} + \frac{1}{5}r, \frac{8}{5} + \frac{1}{5}r, 0, \frac{36}{5} + \frac{2}{5}r, r, 0\right)$, $r \geq 0$. За изходната задача оптимален неограничен ръб $\mathbf{x}^r_{И} = \left(\frac{3}{5} + \frac{1}{5}r, \frac{8}{5} + \frac{1}{5}r, \frac{36}{5} + \frac{2}{5}r\right)$, $r \geq 0$. **в)** Точките $\mathbf{x}^r_{И}$, $r \geq 0$.

1.6. Допълнителни променливи x_3, x_4, x_5, $x_1 = x_1' - \xi$, $x_2 = x_2' - \xi$. Начален базис $\{x_3, x_6, x_5\}$, x_6 изкуствена променлива. Решение на M-задачата

$\widetilde{\mathbf{x}}^*$; $\mathbf{x}^*$

B	β	x_1'	x_2'	ξ	x_3	x_4
x_3	33	0	11	−11	1	−4
x_1'	6	1	3	−4	0	−1
x_5	79	0	16	−16	0	−3
	12	0	0	0	0	−2

Таблица 33

(табл. 33) $\widetilde{\mathbf{x}}^* = (6, 0, 0, 33, 0, 79, 0)$, на КЗ $\mathbf{x}^* = (6, 0, 0, 33, 0, 79)$, на изходната задача $\mathbf{x}^*_{И} = (6, 0)$, $l^* = -12$. **а)** За КЗ съседно на $\mathbf{x}^*$ опорно решение ($\Delta_2' = 0$) $\mathbf{x}^{**} = (0, 2, 0, 11, 0, 47)$, за изходната задача $\mathbf{x}^{**}_{И} = (0, 2)$. **б)** Оптимален неограничен ръб на КЗ, излизащ от $\mathbf{x}^*$ ($\Delta_\xi = 0$, $\xi = t \to +\infty$) с направляващ вектор $\overline{\mathbf{p}} = (4, 0, 1, 11, 0, 16)$, съответно за изходната задача $\mathbf{p} = (3, -1)$, $t \geq 0$. **в)** $\mathbf{x}^{\lambda t} = \lambda \mathbf{x}^*_{И} + (1 - \lambda)\mathbf{x}^{**}_{И} + t\mathbf{p} = (6\lambda + 3t, 2 - 2\lambda - t)$, $\lambda \in [0, 1]$, $t \geq 0$.

1.7. Допълнителна променлива x_4. Изкуствен начален базис $\{x_5, x_6, x_7\}$. M-задачата няма решение, следователно КЗ и изходната задача са неразрешими.

1.8. Допълнителни променливи x_3, x_4. Начален базис $\{x_3, x_5, x_4\}$, x_5 изкуствена променлива. Решение на M-задачата $(1, 0, 0, 1, 0)$, на КЗ $\mathbf{x}^* = (1, 0, 0, 1)$, на изходната задача $\mathbf{x}^*_{\text{И}} = (1, 0)$, $l^* = 1$. **а)** За КЗ съседно на $\mathbf{x}^*$ опорно решение $(\Delta_2 = 0)$ $\mathbf{x}^{**} = (0, 1, 2, 0)$, на $\mathbf{x}^*_{\text{И}} - \mathbf{x}^{**}_{\text{И}} = (0, 1)$. **б)** Няма. **в)** $\mathbf{x}^\lambda = \lambda\mathbf{x}^*_{\text{И}} + (1 - \lambda)\mathbf{x}^{**}_{\text{И}} = (\lambda, 1 - \lambda)$.

1.9. Допълнителни променливи x_4, x_5, $\bar{l}(\mathbf{x}) = -l(\mathbf{x}) \to \max$. Начален базис $\{x_3, x_6, x_5\}$, x_6 изкуствена променлива. M-задача: стига се до едно от двете опорни решения $(1, 0, 2, 0, 4, 0)$ или $(0, 1, 6, 0, 1, 0)$, $l^*_M = -4$. **а)** Съответни опорни решения на КЗ $\mathbf{x}^* = (1, 0, 2, 0, 4)$, $\mathbf{x}^{**} = (0, 1, 6, 0, 1)$, на изходната задача $\mathbf{x}^*_{\text{И}} = (1, 0, 2)$, $\mathbf{x}^{**}_{\text{И}} = (0, 1, 6)$, $l^* = 4$. **б)** Няма. **в)** $\mathbf{x}^\lambda = \lambda\mathbf{x}^*_{\text{И}} + (1 - \lambda)\mathbf{x}^{**}_{\text{И}} = (\lambda, 1 - \lambda, 6 - 4\lambda)$.

1.10. Допълнителни променливи x_3, x_4, x_5; начален базис $\{x_3, x_6, x_5\}$, x_6 изкуствена променлива. M-задача: стига се до едно от двете опорни решения $(4, 5, 5, 0, 0, 0)$ или $(7, 3, 0, 2, 1, 0)$. **а)** Съответни опорни решения на КЗ $\mathbf{x}^* = (4, 5, 5, 0, 0)$, $\mathbf{x}^{**} = (7, 3, 0, 2, 1)$, на изходната задача $\mathbf{x}^*_{\text{И}} = (4, 5)$, $\mathbf{x}^{**}_{\text{И}} = (7, 3)$, $l^* = 46$. **б)** Няма. **в)** $\mathbf{x}^\lambda = \lambda\mathbf{x}^*_{\text{И}} + (1 - \lambda)\mathbf{x}^{**}_{\text{И}} = (7 - 3\lambda, 3 + 2\lambda)$.

1.11. Допълнителни променливи x_3, x_4, x_5, $x_2 = x_2' - x_2''$, $\bar{l}(\mathbf{x}) = -l(\mathbf{x}) \to \max$. Начален базис $\{x_3, x_6, x_5\}$, x_6 изкуствена променлива. Решение на M-

$\widetilde{\mathbf{x}}^*$; $\mathbf{x}^*$

B	$\boldsymbol{\beta}$	x_2''	x_3	x_5
x_4	9	0	$-6/5$	$7/5$
x_2	5	-1	$-1/5$	$2/5$
x_1	3	0	$-4/5$	$3/5$
	-34	0	0	-2

Таблица 34

задача (табл. 34) $\widetilde{\mathbf{x}}^* = (3, 5, 0, 0, 9, 0, 0)$, $l^*_{\text{М}} = 34$, на КЗ $\mathbf{x}^* = (3, 5, 0, 0, 9, 0)$, на изходната задача $\mathbf{x}^*_{\text{И}} = (3, 5)$, $l^* = -34$. **а)** Няма. **б)** Оптимални неограничени ръбове на КЗ, излизащи от $\mathbf{x}^*$ $(\Delta_2'' = 0,\ x_2'' = t \to +\infty)$: $\mathbf{x}^t = (3, 5 + t, t, 0, 9, 0)$, $t \geq 0$, и $(\Delta_3 = 0,\ x_3 = r \to +\infty)$, $\mathbf{x}^r = \left(3 + \frac{4}{5}r, 5 + \frac{1}{5}r, 0, r, 9 + \frac{6}{5}r, 0\right)$, $r \geq 0$; за изходната задача оптимален неограничен ръб $\mathbf{x}_{\text{И}}^r = \left(3 + \frac{4}{5}r, 5 + \frac{1}{5}r\right)$, $r \geq 0$. **в)** Точките $\mathbf{x}_{\text{И}}^r$, $r \geq 0$.

1.12. Допълнителни променливи x_4, x_5, $x_3 = x_3' - x_3''$. Начален базис $\{x_3', x_4, x_6\}$, x_6 изкуствена променлива. Решение на M-задачата (табл. 35) $\widetilde{\mathbf{x}}^* =$

$\widetilde{\mathbf{x}}^*; \mathbf{x}^*$

B	β	x_2	x_3'	x_5
x_1	3	−2	0	−1
x_4	1	1	0	1
x_3''	2	−5	−1	−1
	22	−18	0	−8

Таблица 35

$(3, 0, 0, 2, 1, 0, 0)$, на КЗ $\mathbf{x}^* = (3, 0, 0, 2, 1, 0)$, на изходната задача $\mathbf{x}_{\text{И}}^* = (3, 0, -2)$, $l^* = -22$. **а)** Няма. **б)** Няма; оптимален неограничен ръб на КЗ, излизащ от $\mathbf{x}^*$, е $(\Delta_3,\ x_3' = t \to +\infty)$ $\mathbf{x}^t = (3, 0, t, 2 + t, 1, 0, 0)$, $t \geq 0$, но за изходната задача $\mathbf{x}_{\text{И}}^t = (3, 0, t - (2 + t)) = (3, 0, -2) = \mathbf{x}_{\text{И}}^*$.

2.1. $\widetilde{\mathbf{x}} = (1, 0, 0, 2, b)$, $b \geq 0$. За x_2, x_3: $\Delta_2 = 2a - aM$, $\Delta_3 = 6 - 2M$. **а)** $a \leq 0$. **б)** $a = 0$. Съседно опорно решение $\widetilde{\mathbf{x}}' = (1, 2, 0, 0, b)$. Решения: $\widetilde{\mathbf{x}}^\lambda = \lambda\widetilde{\mathbf{x}} + (1-\lambda)\widetilde{\mathbf{x}}' = (1, 2-2\lambda, 0, 2\lambda, b)$, $\lambda \in [0, 1]$. **в)** За $b \neq 0$, $a \leq 0$ множеството от планове на КЗ е празно. **г)** $b = 0$, $a \leq 0$. При $a = 0$ $\widetilde{\mathbf{x}}^\lambda = (1, 2 - 2\lambda, 0, 2\lambda)$, $\lambda \in [0, 1]$; при $a < 0$ $\widetilde{\mathbf{x}}^* = (1, 0, 0, 2)$. **д)** $b = 0$.

2.2. $\widetilde{\mathbf{x}} = (b, 0, 3, a)$, $a \geq 0$, $b \geq 0$. За x_2: $\Delta_2 = 1 - b + 2aM$. **а)** $\Delta_2 \leq 0$, т. е. $a = 0$, $b \geq 1$. **б)** $a = 0$, $b = 1$; оптимален неограничен ръб ($x_2 = t \to \infty$): $\mathbf{x}^t = (1 + 3t, t, 3 + t, 0)$. **в)** $a = 0$, $0 \leq b < 1$: M-задача и следователно и КЗ нямат решение. **г)** $a = 0$, $b \geq 1$. При $b = 1$ $\mathbf{x}^t = (1 + 3t, t, 3 + t)$, при $b > 1$ $\mathbf{x}^* = (1, 0, 3)$. **д)** $a = 0$ и/или $b = 0$.

2.3. $\widetilde{\mathbf{x}} = (0, 1, 0, a - 1)$, $a \geq 1$. За x_1, x_3: $\Delta_1 = (a - 1)M$, $\Delta_3 = b$. **а)** $a = 1$, $b \leq 0$; **б)** $a = 1$, $b \leq 0$. При $a = 1$, $b < 0$ съседно опорно решение $\widetilde{\mathbf{x}}' = (1, 0, 0, 0)$; решения: $\mathbf{x}^\lambda = \lambda\widetilde{\mathbf{x}} + (1-\lambda)\widetilde{\mathbf{x}}' = (1-\lambda, \lambda, 0, 0)$, $\lambda \in [0, 1]$. При $a = 1$, $b = 0$ опорни решения: $\widetilde{\mathbf{x}}'$ и $\widetilde{\mathbf{x}}'' = (0, 0, 1, 0)$; решения: $\widetilde{\mathbf{x}}^\lambda = \lambda_1\widetilde{\mathbf{x}} + \lambda_2\widetilde{\mathbf{x}}' + \lambda_3\widetilde{\mathbf{x}}'' = (\lambda_2, \lambda_1, \lambda_3, 0)$ за $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1$, $\lambda_1 \geq 0$, $\lambda_2 \geq 0$, $\lambda_3 \geq 0$. **в)** $b > 1$. M-задачата и КЗ нямат решение. **д)** $a = 1$.

2.4. $\widetilde{\mathbf{x}} = (0, 0, a, 1, b)$, $a, b \geq 0$. За x_1, x_2: $\Delta_1 = -b^2 + bM$, $\Delta_2 = (1 - ab) + bM$. **а)**, **б)** Няма такива a, b. **в)** $b = 0$, $a = 0$. M-задачата и КЗ нямат решение. **г)** a, b не могат да се определят от таблицата, понеже $\widetilde{\mathbf{x}}$ не е решение за никои a, b. **д)** $a = 0$ и/или $b = 0$.

3. Решава се задачата

$$
\begin{aligned}
&L(\mathbf{x}) = 2x_1 - x_2 \to \max,\\
&\begin{array}{rcrcrcrcr}
x_1 & - & x_2 & - & x_3 & & & = & 4,\\
-x_1 & - & x_2 & & & + & x_4 & = & 3,\\
2x_1 & - & x_2 & & & & & = & 20,
\end{array}\\
&x_j \geq 0,\ j = 1, \ldots, 4.
\end{aligned}
$$

M-задача: начален базис $\{x_5, x_4, x_6\}$, x_5 и x_6 изкуствени променливи. Достига се до едно от двете съседни опорни решения $\mathbf{x}^* = (16, 12, 0, 31)$ или $\mathbf{x}^{**} = (10, 0, 6, 13)$. Всички решения са $\mathbf{x}^\lambda = \lambda\mathbf{x}^* + (1 - \lambda)\mathbf{x}^{**} = (10 + 6\lambda, 12\lambda, 6 - 6\lambda, 13 + 18\lambda)$, $\lambda \in [0, 1]$ и за тях $l^* = l(\mathbf{x}^\lambda) = 20$.

4. Решава се задачата

$$
\begin{aligned}
&\bar{l}(\mathbf{x}) = -4x_1 + 10x_2 \to \max,\\
&\begin{array}{rcrcr}
x_1 & - & 2x_2 & \leq & -1,\\
-4x_1 & + & 2x_2 & \geq & 0,\\
-x_1 & - & x_2 & \leq & -2,\\
-4x_1 & + & 10x_2 & = & 100,\\
 & & x_2 & \geq & 0.
\end{array}
\end{aligned}
$$

Допълнителни променливи x_3, x_4, x_5, $x_1 = x_1' - x_1''$. Начален базис $\{x_6, x_4, x_7, x_8\}$, x_6, x_7, x_8 изкуствени променливи. При решаване на M-задачата се достига до две съседни опорни решения $\widetilde{\mathbf{x}}' = (0, 0, 10, 19, 20, 8, 0, 0, 0)$ и $\widetilde{\mathbf{x}}'' = \left(0, \frac{40}{7}, \frac{54}{7}, \frac{141}{7}, \frac{268}{7}, 0, 0, 0, 0\right)$. Съответните опорни решения на КЗ са $\mathbf{x}^* = (0, 0, 10, 19, 20, 8)$ и $\mathbf{x}^{**} = \left(0, \frac{40}{7}, \frac{54}{7}, \frac{141}{7}, \frac{268}{7}, 0\right)$, $\bar{l}^* = 100$. Всички решения на КЗ са $\lambda\mathbf{x}^* + (1 - \lambda)\mathbf{x}^{**} = \left(0, \frac{40}{7} - \frac{40}{7}\lambda, \frac{54}{7} + \frac{16}{7}\lambda, \frac{141}{7} - \frac{8}{7}\lambda, \frac{268}{7} - \frac{128}{7}\lambda, 8\lambda\right)$, $\lambda \in [0, 1]$. Съответните решения на изходната задача са $\mathbf{x}^\lambda = \left(-\frac{40}{7} + \frac{40}{7}\lambda, \frac{54}{7} + \frac{16}{7}\lambda\right)$, $\lambda \in [0, 1]$ и за тях $l^* = l(\mathbf{x}^\lambda) = -100$.

5.1. $\widetilde{\mathbf{x}} = (3, 0, 0, 0)$. **а)** $\bar{\mathbf{x}} = (3, 0, 0)$. **б)** Едно: въвеждане на x_2 или x_3 в базиса; и в двата случая само се сменя базисът на $\widetilde{\mathbf{x}}$ ($\widetilde{\mathbf{x}}' = \widetilde{\mathbf{x}}$).

5.2. $\widetilde{\mathbf{x}} = (0,0,2,0)$. **а)** $\overline{\mathbf{x}} = (0,0,2)$. **б)** Едно: въвеждане на x_1 в базиса; сменя се само базисът на $\widetilde{\mathbf{x}}$ ($\widetilde{\mathbf{x}}' = \widetilde{\mathbf{x}}$).

5.3. $\widetilde{\mathbf{x}} = (5,0,0,0,0)$. **а)** $\overline{\mathbf{x}} = (5,0,0)$; **б)** Две: въвеждат се x_2 (ключово число -1) и x_3 (ключово число -4): получават се само други базиси на $\widetilde{\mathbf{x}}$ ($\widetilde{\mathbf{x}}'' = \widetilde{\mathbf{x}}' = \widetilde{\mathbf{x}}$).

5.4. $\widetilde{\mathbf{x}} = (3,0,0,0,0)$. **а)** $\overline{\mathbf{x}} = (3,0,0)$. **б)** Две: въвеждат се x_3 на мястото на x_4 ($\widetilde{\mathbf{x}}' = \widetilde{\mathbf{x}}$) и x_2 — на x_5 (ключово число -2): $\widetilde{\mathbf{x}}'' = \widetilde{\mathbf{x}}' = \widetilde{\mathbf{x}}$.

6. **а)** Следва от теорема 1: $\widetilde{\mathbf{x}}' = (0,\dots,0,b_1,\dots,b_m) \in \overline{P}$, $l(\widetilde{\mathbf{x}}) \le 0$. **б)** От допускането $x' = (x'_1,\dots,x'_n) \in P \ne \emptyset$ следва, че $\widetilde{\mathbf{x}}' = (x'_1,\dots,x'_n, 0,\dots,0) \in \overline{P}$, откъдето се стига до противоречие: $\bar{l}(\widetilde{\mathbf{x}}) = 0 > \bar{l}^*$. **в)** $\overline{\mathbf{x}} \in P$. $\overline{\mathbf{x}}$ е опорен, защото на ненулевите му елементи съответстват линейно независими вектори на условията.

7. Решаваме задача (*) при начален опорен план $\widetilde{\mathbf{x}}^0 = (0,\dots,0,b_1,\dots, b_m)$, $\mathbf{B}_{\widetilde{\mathbf{x}}^0} = \{x_{n+1},\dots,x_{n+m}\}$.

1) Ако $\bar{l}^* < 0$, задача (13)–(15) няма решение.

2) $\bar{l}^* = 0$, $\widetilde{\mathbf{x}}^* = (\widetilde{x}^*_1,\dots,\widetilde{x}^*_{n+m})$. Ако в $\mathbf{B}_{\widetilde{\mathbf{x}}^*}$ има изкуствени променливи, те са базисни нули, които изключваме от базиса (вж. забележка 3). Решаваме задачата (13)–(15) при начален опорен план $\mathbf{x}^0 = (\widetilde{x}^*_1,\dots,\widetilde{x}^*_n)$ и $\mathbf{B}_{\mathbf{x}^0} = \mathbf{B}_{\widetilde{\mathbf{x}}^*}$. За начален симплексна таблица може да се използва тази на $\widetilde{\mathbf{x}}^*$ (в нея стълбовете x_{n+i}, $i = 1,\dots,m$, ги няма), като се впишат $c_1,\dots,c_n$ (вместо нулите) в стълба $\mathbf{c}^B$ и над стълбовете x_j, $j = 1,\dots,n$, и се изчислят съответните оценки на $\mathbf{x}^0$.

8. Имаме $x_{n+p} = \boldsymbol{\beta}_p = 0$. От формули (38) следва, че $\boldsymbol{\beta}'_i = \boldsymbol{\beta}_i$, $i = 1,\dots,m$, за всяко $\alpha_{pq} \ne 0$ (сменя се само базисът на опорния план).

§ 7. Двойнственост в ЛО

1. $$l(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \le \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i\right) x_j = \sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j\right) y_i \le \sum_{i=1}^{m} b_i y_i = g(\mathbf{y}).$$

2. *Необходимост*. Следва от теорема 11. *Достатъчност*. Следва от теорема 1 и твърдението в задача 1.

3. *Необходимост*. Очевидна. *Достатъчност*. Ако двете задачи имат поне по един план, то за тези планове е изпълнено твърдението на задача 1. Следователно целевите функции на двете задачи са ограничени. Прилагаме теорема 1.

4. Нека например $l(\mathbf{x})$ е неограничена отгоре в множеството от планове (52), (53). Тогава съществува редица от планове $\{\mathbf{x}^k\}$, за която $l(\mathbf{x}^k) \geq k$, $k > 0$. Ако допуснем, че спрегнатата задача има поне един план $\mathbf{y}'$, то (вж. задача 1) $l(\mathbf{x}^k) \leq g(\mathbf{y}')$ и при $k > g(\mathbf{y}')$ — противоречие: $l(\mathbf{x}^k) \leq g(\mathbf{y}') < k$.

5.1.
$$\begin{array}{l} -y_1 + 2y_2 \to \min, \\ \begin{array}{rcrcrcr} -y_1 & + & y_2 & & & \geq & 1, \\ -y_1 & - & y_2 & + & y_3 & = & 10, \\ -y_1 & - & y_2 & & & \geq & -1, \end{array} \\ y_i \geq 0,\ i = 1,2,3. \end{array}$$

5.2.
$$\begin{array}{l} -4y_1 + 3y_2 + 5y_3 \to \max, \\ \begin{array}{rcrcrcr} & & y_2 & + & y_3 & \leq & 1, \\ -y_1 & - & y_2 & - & y_3 & \leq & 0, \\ -y_1 & + & y_2 & + & 2y_3 & = & 0, \\ & & y_2 & & & = & 4, \end{array} \\ y_i \geq 0,\ i = 1,2,3. \end{array}$$

5.3.
$$\begin{array}{l} b_1y_1 + \cdots + b_my_m \to \min, \\ \sum\limits_{i=1}^{m} a_{ij}y_i \geq c_j, \quad j = 1,\ldots,n, \\ y_i \geq -M,\ i = 1,\ldots,m. \end{array}$$

5.4. $\max\{\langle \mathbf{b}, \mathbf{y}, :\rangle\, \mathbf{yA} \leq \mathbf{c}\}$.

5.5. $\min\{\langle \mathbf{b}, \mathbf{y}, :\rangle\, \mathbf{yA} \geq -\mathbf{c},\ \mathbf{y} \geq \mathbf{0}\}$.

5.6. На $\min\{\langle \mathbf{c}, -\mathbf{x}\rangle : \mathbf{A}(-\mathbf{x}) = -\mathbf{b},\ -\mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}$ спрегнатата е

$$\max\{\langle -\mathbf{b}, y\rangle : \mathbf{yA} \leq \mathbf{c}\} \iff \min\{\langle \mathbf{b}, \mathbf{y}\rangle : \mathbf{yA} \leq \mathbf{c}\}.$$

5.7. На $\min\{\langle \mathbf{c}, -\mathbf{x}\rangle : \mathbf{A}(-\mathbf{x}) \geq -\mathbf{b},\ -\mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}$ спрегнатата е

$$\max\{\langle -\mathbf{b}, \mathbf{y}\rangle : \mathbf{yA} \leq \mathbf{c},\ \mathbf{y} \geq \mathbf{0}\} \iff \min\{\langle \mathbf{b}, \mathbf{y}, :\rangle\, \mathbf{yA} \leq \mathbf{c},\ \mathbf{y} \geq \mathbf{0}\}.$$

5.8. На $\max\{\langle \mathbf{c}, -\mathbf{x}\rangle : \mathbf{A}(-\mathbf{x}) = -\mathbf{b},\ -\mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}$ спрегнатата е

$$\min\{\langle -\mathbf{b}, \mathbf{y}\rangle : \mathbf{yA} \geq \mathbf{c}\} \iff \max\{\langle \mathbf{b}, \mathbf{y}\rangle : \mathbf{yA} \geq \mathbf{c}\}.$$

6. а) Например

$$\begin{aligned} 5x_1 + x_2 &\to \max, \\ x_1 - x_2 &\le 1, \\ -x_1 + x_2 &\le -2, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 &\ge 0, \end{aligned} \qquad \begin{aligned} y_1 - 2y_2 &\to \min, \\ y_1 - y_2 &\ge 5, \\ -y_1 + y_2 &\ge 1, \\ y_1 \ge 0,\ y_2 &\ge 0. \end{aligned}$$

б) Достатъчно е да се вземе ЗЛО, чиято функция е неограничена отгоре (или отдолу) в множеството от планове (следствие 3.

7.1. Да, $\mathbf{y}^* = (1, 0, 3)$.

7.2. Не.

7.3. Да, $\mathbf{y}^* = (2, 0, 9)$.

7.4. Да, $\mathbf{y}^* = (3, 0, 1, 3)$.

7.5. Да, $\mathbf{y}^* = (1, 3, -1)$.

7.6. Да, $\mathbf{y}^* = (1, 0, 6)$.

7.7. Да, $\mathbf{y}^* = \left(\frac{19}{13}, -\frac{2}{13}, -\frac{10}{13}\right)$.

7.8. Да, $\mathbf{y}^* = \left(1, \frac{9}{5}, \frac{3}{5}\right)$.

8.1. $\mathbf{y}^* = \left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right)$, $\mathbf{x}^* = \left(0, \frac{4}{5}, \frac{9}{5}\right)$.

8.2. $\mathbf{y}^* = (6, 6)$, $\mathbf{x}^* = \left(0, \frac{9}{17}, \frac{15}{17}, 0\right)$.

8.3. $\mathbf{y}^* = (6, 2)$, $\mathbf{x}^* = (0, 2, 1)$.

8.4. $\mathbf{y}^* = \left(\frac{9}{2}, -\frac{7}{2}\right)$, $\mathbf{x}^* = (1, 1, 0)$.

8.5. $\mathbf{y}^* = (-1, 0)$, $\mathbf{x}^* = \left(0, \frac{4}{7}, \frac{1}{7}, 0\right)$.

8.6. Няма решение.

9.1. Да.

9.2. При $a > 0$ — свободно, при $a = 0$ — закрепено, при $a < 0$ — множеството от планове е празно.

$\widetilde{\mathbf{x}}^*; \mathbf{x}^*$

$\mathbf{B}$	$\mathbf{c}^B$	$\boldsymbol{\beta}$ 0	x_1'' 1	x_3 -1	x_4 0	x_6 $-M$	x_7 $-M$
x_2	-2	$9/2$	0	-1	$-1/2$	$1/2$	$1/2$
x_1'	-1	$1/2$	-1	$1/2$	$1/2$	$-1/2$	$1/2$
x_5	0	$3/2$	0	$3/2$	$1/2$	$-1/2$	$-1/2$
		$19/2$	0	$-5/2$	$-1/2$	$1/2$	$3/2$

Таблица 36

10. Съгласно следствие cor:3.7.4 $\mathbf{y}^* = \mathbf{c}^B\mathbf{B}^{-1}$, т. е. $y_i = \mathbf{c}^B\boldsymbol{\alpha}^{s_i}$, $i = 1, \dots, m$. Понеже $\Delta_{s_i} = c_{s_i} - \mathbf{c}^B\boldsymbol{\alpha}^{s_i}$, то $y_i = c_{s_i} - \Delta_{s_i}$, $i = 1, \dots, m$ (за пример вж. задача 11).

11.1. $l^* = -\frac{19}{2}$, $\mathbf{x}^*_{\text{И}} = \left(\frac{1}{2}, \frac{9}{2}, 0\right)$, $\mathbf{y}^*_{\text{И}} = \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, 0\right)$. За КЗ допълнителни променливи x_4 и x_5, $x_1 = x_1' - x_1''$; за M-задача: начален базис $\{x_6, x_7, x_5\}$, x_6 и x_7 изкуствени променливи; решение $\widetilde{\mathbf{x}}^*$ от табл. 36. Решение на КЗ: $\mathbf{x}^* = \left(\frac{1}{2}, 0, \frac{9}{2}, 0, 0, \frac{3}{2}\right)$; на спрегнатата ѝ задача: $\mathbf{y}^* = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, 0\right)$ (използвайте задача 10: $y_1 = c_6 - \Delta_6 = -M - \left(\frac{1}{2} - M\right) = -\frac{1}{2}$, $y_2 = c_7 - \Delta_7 = -M - \left(\frac{3}{2} - M\right) = -\frac{3}{2}$, $y_3 = c_5 - \Delta_5 = 0$). Спрегнатата задача на изходната задача е $\min\{-4y_1 - 5y_2 + 6y_3 : y_1 - y_2 = -1, -y_1 - y_2 + y_3 \geq -2, 2y_1 + y_2 \geq -1, y_1 \geq 0, y_3 \geq 0\}$ и при смяна на y_1 и y_2 съответно с $-y_1$ и $-y_2$ тя съвпада със спрегнатата задача на КЗ.

11.2. $l^* = -22$, $\mathbf{x}^*_{\text{И}} = (3, 0, -2)$, $\mathbf{y}^*_{\text{И}} = (2, 0, 8)$. За КЗ: допълнителни променливи x_4 и x_5, $x_3 = x_3' - x_3''$; за M-задачата: начален базис $\{x_3', x_4, x_5\}$, x_6 — изкуствена променлива; решение $\widetilde{\mathbf{x}}^*$ от табл. 37; решение на КЗ: $\mathbf{x}^* = (3, 0, 0, 2, 1, 0)$, на спрегнатата ѝ задача $\mathbf{y}^* = (2, 0, -8)$; спрегнатата задача на

$\widetilde{\mathbf{x}}^*; \mathbf{x}$

$\mathbf{B}$	$\mathbf{c}^B$	$\boldsymbol{\beta}$ 0	x_2 4	x_3' 2	x_5 0	x_6 $-M$
x_1	-6	3	-2	0	-1	1
x_4	0	1	1	0	1	-1
x_3''	-2	2	-5	-1	-1	1
		22	-18	0	-8	8

Таблица 37

изходната задача е $\min\{y_1 + 4y_2 - 3y_3 : y_1 + y_2 - y_3 \geq -6,\ 3y_1 - y_2 + 2y_3 \geq 4,\ y_1 = 2,\ y_2 \geq 0,\ y_3 \geq 0\}$ и при смяна на y_3 с $-y_3$ тя съвпада със спрегнатата задача на КЗ.

11.3. $l^* = \frac{11}{2}$, $\mathbf{x}^*_И = \left(\frac{1}{2}, 2, 2\right)$, $\mathbf{y}^*_И = \left(\frac{3}{2}, \frac{9}{2}, -1\right)$. За КЗ: допълнителни променливи x_4 и x_5; за M-задачата: начален базис $\{x_6, x_5, x_3\}$, x_6 — изкуствена променлива; $\widetilde{\mathbf{x}}^*$ — от табл. 38; решение на КЗ: $\mathbf{x}^* = \left(\frac{1}{2}, 2, 2, 0, 0\right)$, на спрег-

$\widetilde{\mathbf{x}}^*; \mathbf{x}^*$

B	$\mathbf{c}^B$	$\boldsymbol{\beta}$ 0	x_4 0	x_5 0	x_6 $-M$
x_1	-1	$1/2$	$-1/2$	$-1/2$	$1/2$
x_2	2	2	0	1	0
x_3	1	2	1	2	-1
		$-11/2$	$-3/2$	$-3/2$	$3/2$

Таблица 38

натата ѝ задача: $\mathbf{y}^* = \left(-\frac{3}{2}, \frac{9}{2}, 1\right)$; спрегнатата задача на изходната задача е $\min\{-3y_1 + 2y_2 - y_3 : -2y_1 - 2y_3 \geq -1,\ -y_1 + y_2 + y_3 \geq 2,\ -y_3 \geq 1,\ y_1 \geq 0,\ y_2 \geq 0\}$ и при смяна на y_1 и y_3 съответно с $-y_1$, $-y_3$ тя съвпада със спрегнатата задача на КЗ.

11.4. $l^* = 6$, $\mathbf{x}^*_И = (2, -4, 0)$, $\mathbf{y}^*_И = (1, 0, 0)$. За КЗ: допълнителни променливи x_4, x_5, $x_2 = x_2' - x_2''$; $\bar{l}(\mathbf{x}) = -l(\mathbf{x}) \to \max$; за M-задачата: начален базис $\{x_6, x_7, x_5\}$, x_6, x_7 — изкуствени променливи; решение $\widetilde{\mathbf{x}}^*$ от табл. 39; решение

$\widetilde{\mathbf{x}}^*; \mathbf{x}^*$

B	$\mathbf{c}^B$	$\boldsymbol{\beta}$ 0	x_2' 1	x_3 -1	x_4 0	x_6 $-M$	x_7 $-M$
x_1	-1	2	0	$1/2$	$-1/2$	$1/2$	$-1/2$
x_2''	-1	4	-1	$-1/2$	$-1/2$	$1/2$	$1/2$
x_5	0	2	0	$-1/2$	$1/2$	$-1/2$	$1/2$
		-6	0	-1	-1	1	0

Таблица 39

на КЗ: $\mathbf{x}^* = (2, 0, 4, 0, 0, 2)$; на спрегнатата ѝ задача: $\mathbf{y}^* = (-1, 0, 0)$; спрегнатата задача на изходната задача е $\max\{6y_1 - 2y_2 - 4y_3 : y_1 + y_2 - y_3 \le 1, -y_1 + y_2 = -1, y_2 \le 1, y_1 \ge 0, y_3 \ge 0\}$ и при смяна на y_1 с $-y_1$ тя съвпада със спрегнатата задача на КЗ.

11.5. $l^* = -\frac{67}{5}$, $\mathbf{x}^*_И = \left(\frac{16}{5}, -\frac{37}{5}, \frac{2}{5}\right)$, $\mathbf{y}^*_И = \left(1, \frac{9}{5}, \frac{3}{5}\right)$. За КЗ: допълнителни променливи x_4, x_5, $x_2 = x_2' - x_2''$; $\bar{l}(\mathbf{x}) = -l(\mathbf{x}) \to \max$; за M-задача: начален базис $\{x_2'', x_4, x_6\}$; решение $\widetilde{\mathbf{x}}^*$ от табл. 40; решение на КЗ: $\mathbf{x}^* = \left(\frac{16}{5}, 0, \frac{37}{5}, \frac{2}{5}, 0, 0\right)$; на

$\widetilde{\mathbf{x}}^*; \mathbf{x}$

B	$\mathbf{c}^B$	$\boldsymbol{\beta}$ 0	x_2' -1	x_4 0	x_5 0	x_6 $-M$
x_2''	1	$37/5$	-1	$4/5$	$3/5$	$-3/5$
x_1	2	$16/5$	0	$2/5$	$-1/5$	$1/5$
x_3	-1	$2/5$	0	$-1/5$	$-2/5$	$2/5$
		$-67/5$	0	$-9/5$	$-3/5$	$3/5$

Таблица 40

спрегнатата ѝ задача: $y^* = \left(1, \frac{9}{5}, -\frac{3}{5}\right)$; спрегнатата задача на изходната задача е $\max\{-5y_1 - 6y_2 + 4y_3 : y_1 - 2y_2 + y_3 \le -2, y_1 = 1, -2y_1 + y_2 + 2y_3 \le 1, y_2 \ge 0, y_3 \ge 0\}$ и при смяна на y_3 с $-y_3$ тя съвпада с двойнствената задача на КЗ.

11.6. $l^* = 6$, $\mathbf{x}^*_И = \left(\frac{1}{2}, -\frac{11}{2}, 0\right)$, $\mathbf{y}^*_И = (1, 0, 0)$. За КЗ: допълнителни променливи x_4 и x_5, $x_2 = x_2' - x_2''$; $\bar{l}(\mathbf{x}) = -l(\mathbf{x}) \to \max$; за M-задачата: начален базис $\{x_6, x_7, x_5\}$; x_6, x_7 — изкуствени променливи; решение $\widetilde{\mathbf{x}}^*$ от табл. 41; решение на КЗ: $\mathbf{x}^* = \left(\frac{1}{2}, 0, \frac{11}{2}, 0, 0, \frac{7}{2}\right)$; на спрегнатата ѝ задача: $\mathbf{y}^* = (-1, 0, 0)$; спрегнатата задача на изходната задача е $\max\{6y_1 - 5y_2 - 4y_3 : y_1 + y_2 - y_3 \le 1, -y_1 + y_2 = -1, y_2 \le 1, y_1 \ge 0, y_3 \ge 0\}$ и при смяна на y_1 с $-y_1$ тя съвпада със спрегнатата зад на КЗ.

12.1. $l^* = n$. Спрегнатата задача е

$$\max\{g(\mathbf{x}) = y_1 + 2y_2 + \cdots + ny_n : y_i + y_{i+1} + \cdots + y_n \le i,\ y_i \ge 0,\ i = 1, \ldots, n\}.$$

От

$$(*) \qquad y_1 + y_2 + \cdots + y_n \le 1,\ y_i \ge 0,\ i = 1, \ldots, m,$$

следват останалите ограничения, т. е. множеството от планове се определя от (*). То е компактно и опорно решение е $\mathbf{y}^* = (0, 0, \ldots, 0, 1)$, $l^* \ge g(\mathbf{y}^*) = n$.

$\widetilde{x^*}; x^*$

$\mathbf{B}$	$\mathbf{c}^B$	$\boldsymbol{\beta}$ 0	x_2' 1	x_3 -1	x_4 0	x_6 $-M$	x_7 $-M$
x_1	-1	$1/2$	0	$1/2$	$-1/2$	$1/2$	$-1/2$
x_2''	-1	$11/2$	-1	$-1/2$	$-1/2$	$1/2$	$1/2$
x_5	0	$7/2$	0	$-1/2$	$1/2$	$-1/2$	$1/2$
		6	0	-1	-1	1	0

Таблица 41

12.2. Двойствената задача е $\max\{g(\mathbf{y}) = \alpha_1 y_1 + \cdots + \alpha_{100} y_{100} : y_i + y_{i+1} = 1$, $i = 1, \ldots, 99$, $y_i \geq 0$, $i = 1, \ldots, 100\}$. От уравненията следва, че $y_i = 1 - y_1$, $i = 2, \ldots, 100$, $y_i = y_1$, $i = 1, 3, \ldots, 99$, и $0 \leq y_1 \leq 1$. Следователно $g(\mathbf{y}) = \sum_{i=1}^{50} \alpha_{2i-1} y_1 + \sum_{i=1}^{50} \alpha_{2i}(1 - y_1) = \sum_{i=1}^{50} \alpha_{2i} + y_1 \sum_{i=1}^{50} (\alpha_{2i-1} - \alpha_i)$ и

$$l^* = \begin{cases} \sum_{i=1}^{50} \alpha_{2i-1} & \text{при } \sum_{i=1}^{50} (\alpha_{2i-1} - \alpha_i) \geq 0 \quad (y_1 = 1), \\ \sum_{i=1}^{50} \alpha_{2i} & \text{в противен случай} \quad (y_1 = 0). \end{cases}$$

12.3. $l^* = \dfrac{\mu_1 + \mu_2 + \mu_3}{\lambda + 2}$ при $\lambda \neq 1$, $\lambda \neq -2$; $l^* = \max(\mu_1, \mu_2, \mu_3)$ при $\lambda = 1$; $l^* = -\infty$ при $\lambda = -2$. Спрегнатата задача е $\max\{\mu_1 y_1 + \mu_2 y_2 + \mu_3 y_3 : \mathbf{Ay} = \mathbf{b},\ \mathbf{y} \geq \mathbf{0}\}$, $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = (1, 1, 1)$; $\det \mathbf{A} = (\lambda - 1)^2(\lambda - 2)$. При $\lambda \neq 1$, $\lambda \neq -2$ решение е $\mathbf{y}^* = \frac{1}{\lambda+2}(1, 1, 1)$. При $\lambda = 1$ множеството от планове $\{\mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3) : y_1 + y_2 + y_3 = 1,\ y_i \geq 0,\ i = 1, 2, 3\}$ е компактно с върхове $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$. При $\lambda = -2$ задачата няма планове и понеже множеството от планове на изходната задача не е празно, то $l(\mathbf{x}) \to -\infty$ в него.

12.4. $l^* = \dfrac{\lambda\mu(\lambda^2 + \lambda + 1)}{\lambda(3 - \lambda)}$ при $\lambda \neq 0$, $\lambda \neq 3$; $l(x) \to -\infty$ при $\lambda = 0$ и $\lambda = 3$. Спрегнатата задача е $\max\{\mu(y_1 + y_2 + y_3) : \mathbf{Ay} = \mathbf{b},\ \mathbf{y} \geq \mathbf{0}\}$, $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 - \lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1 - \lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1 - \lambda \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = (1, \lambda, \lambda^2)$; $\det \mathbf{A} = -\lambda^2(\lambda - 3)$. При $\lambda \neq 0$, $\lambda \neq 3$

решение е $\mathbf{y}^* = \frac{1}{\lambda(3-\lambda)}(\lambda^2 + 2\lambda - 2, \lambda^3 - 2\lambda^2 + \lambda + 1, 2\lambda^2 - 2\lambda + 1)$. При $\lambda = 0$ или $\lambda = 3$ задачата няма планове и понеже множеството от планове на изходната задача не е празно, то $l(\mathbf{x}) \to -\infty$ в него.

13. Съответните спрегнати задачи имат общо множество от планове $Q(\mathbf{x}) = \{\mathbf{y} : \mathbf{yA} \geq \mathbf{c},\ \mathbf{y} \geq \mathbf{0}\}$. **а)** $\mathbf{0} = (0, \dots, 0) \in P_b \neq \emptyset$, $\mathbf{0} = (0, \dots, 0) \in P_d \neq \emptyset$. Нека задача I е разрешима, тогава и спрегнатата ѝ задача е разрешима, т. е. $Q \neq \emptyset$. Ако допуснем, че задача II е неразрешима, то $\langle \mathbf{c}, \mathbf{x} \rangle$ е неограничена в P_d ($P_d \neq \emptyset$), откъдето (следствие 3) стигаме до противоречието $Q = \emptyset$. Ако задача I е неразрешима и допуснем, че задача II има решение, ще стигнем до същото противоречие. **б)** Нека задача I е разрешима, тогава $Q \neq \emptyset$ и ако допуснем, че задача II няма решение, то $\langle \mathbf{c}, \mathbf{x} \rangle$ е неограничена в P_d ($P_d \neq \emptyset$), т. е. стигаме (следствие 3) до противоречието $Q = \emptyset$. Аналогично се доказва и случаят за неразрешимост.

14. а) Да. **б)** Не (следствие 3). **в)** Не (следствие 3). **д)** Да.

15. а) Не. Спрегнатите задачи на задачите (P, l) и $(P, \widetilde{l})$ имат общо множество от планове $Q = \{\mathbf{y} : \mathbf{yA} \geq \mathbf{c}\}$; $Q \neq \emptyset$, защото задача (P, l) е разрешима. Ако допуснем, че задача $(P, \widetilde{l})$ е неразрешима, то $\widetilde{l} \to +\infty$ в $\widetilde{P}$ ($\widetilde{P} \neq \emptyset$) и стигаме до противоречието $Q = \emptyset$. **б)** Да. При $\operatorname{rank} \mathbf{A} \neq \operatorname{rank}(\mathbf{A} \mid \mathbf{d})$. **в)** Да, ако P е неограничено. Тогава е достатъчно $\mathbf{c}$ да бъде неотрицателна линейна комбинация на направляващи вектори на неограничени ръбове на P. **г)** Ограничено.

16. Допускаме, че за някое решение $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ имаме $x_k > 0$, т. е. условието $x_k \geq 0$ е свободно. Тогава за всяко решение $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_m)$ на спрегнатата задача (54)–(56) ще бъде изпълнено (теорема 2):

$$\begin{aligned} x_k > 0, &\quad a_{1k}y_1 + a_{2k}y_2 + \dots + a_{mk}y_m = c_k, \\ x_l \geq 0, &\quad a_{1l}y_1 + a_{2l}y_2 + \dots + a_{ml}y_m \geq c_l, \end{aligned}$$

което води до противоречието $c_l \leq c_k$.

17. Спрегнатата задача е $\min\Big\{g(\mathbf{y}) = \sum\limits_{i=1}^{m} b_i y_i : \sum\limits_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \geq c_j,\ j = 1, \dots, n,$ $y_i \geq 0,\ i = 1, \dots, m\Big\}$. От $b_i \geq 0$, $y_i \geq 0$, $i = 1, \dots, m$, следва, че $g(\mathbf{y}) \geq 0$, а от $a_{kj} > 0$, $j = 1, \dots, n$ — че множеството от плановете ѝ не е празно: $\overline{\mathbf{y}} = (0, \dots, 0, \overline{y}_k, 0, \dots, 0)$ е план при $y_k > \max\left(0, \max\limits_{1 \leq j \leq n} \frac{c_j}{a_{kj}}\right)$. Следователно (теорема 1) спрегнатата задача, а оттам и изходната задача (теорема 11) са разрешими.

18. Двете изходни задачи имат общо множество от планове, двете спрегнатата задачи — също. Следователно

$$\begin{array}{lll} & \langle \mathbf{c}', \mathbf{x}'' \rangle \leq \langle \mathbf{c}', x' \rangle = \langle \mathbf{b}, \mathbf{y}' \rangle, & \langle \mathbf{c}'', \mathbf{x}' \rangle \leq \langle \mathbf{c}'', \mathbf{x}'' \rangle = \langle \mathbf{b}, \mathbf{y}'', , \rangle \\ & \langle \mathbf{c}'', \mathbf{x}'' \rangle = \langle \mathbf{b}, \mathbf{y}'' \rangle \quad \text{и} & \langle \mathbf{c}', \mathbf{x}' \rangle = \langle \mathbf{b}, \mathbf{y}' \rangle, \\ \text{т. е.} & \langle \mathbf{c}' - \mathbf{c}'', \mathbf{x}'' \rangle \leq \langle \mathbf{b}, \mathbf{y}' - \mathbf{y}'' \rangle \quad \text{и} & \langle \mathbf{c}'' - \mathbf{c}', \mathbf{x}' \rangle \leq \langle \mathbf{b}, \mathbf{y}'' - \mathbf{y}' \rangle, \end{array}$$

откъдето следва твърдението.

19. Понеже двойките спрегнати задачи имат общо множество от планове, то

$$\begin{array}{lll} & \langle \mathbf{b}', \mathbf{y}'' \rangle \geq \langle \mathbf{b}', \mathbf{y}' \rangle = \langle \mathbf{c}, \mathbf{x}' \rangle, & \langle \mathbf{b}'', \mathbf{y}' \rangle \geq \langle \mathbf{b}'', \mathbf{y}'' \rangle = \langle \mathbf{c}, \mathbf{x}'' \rangle, \\ & \langle \mathbf{b}'', \mathbf{y}'' \rangle = \langle \mathbf{c}, \mathbf{x}'' \rangle \quad \text{и} & \langle \mathbf{b}', \mathbf{y}' \rangle = \langle \mathbf{c}', \mathbf{x}' \rangle, \\ \text{т. е.} & \langle \mathbf{b}' - \mathbf{b}'', \mathbf{y}'' \rangle \geq \langle \mathbf{c}, \mathbf{x}' - \mathbf{x}'' \rangle \quad \text{и} & \langle \mathbf{b}'' - \mathbf{b}', \mathbf{y}' \rangle \geq \langle \mathbf{c}', \mathbf{x}' \rangle, \end{array}$$

откъдето следва твърдението.

20.1. Образуваме спрегнатите задачи: I^{a} — $\max\{\langle \mathbf{c}, \mathbf{x} \rangle : \mathbf{x} \in P_1\}$, $P_1 = \{\mathbf{x} : \mathbf{Ax} \leq \mathbf{0}\}$ и II^{a} — $\min\{\langle \mathbf{0}, \mathbf{y} \rangle : \mathbf{y} \in P_2\}$, $P_2 = \{\mathbf{y} : \mathbf{yA} = \mathbf{c}, \mathbf{y} \geq \mathbf{0}\}$. Нека система I има решение. Ако допуснем, че I^{a} има решение $\mathbf{x}^*$, то II^{a} има решение $\mathbf{y}^*$ и $\langle \mathbf{c}, \mathbf{x}^* \rangle = \langle \mathbf{0}, \mathbf{y}^* \rangle = 0$ — противоречие; следователно I^{a} е неразрешима, откъдето и II^{a} е неразрешима поради $P_2 = \emptyset$, т. е. система II няма решение; нека система II има решение: ако допуснем, че II^{a} има решение $\mathbf{y}^*$, то I^{a} има решение $\mathbf{x}^*$ и $\langle \mathbf{c}, \mathbf{x} \rangle \leq \langle \mathbf{c}, \mathbf{x}^* \rangle = \langle \mathbf{0}, \mathbf{y}^* \rangle = 0$, т. е. система I няма решение.

20.2. Образуваме спрегнатите задачи: I^{a} — $\max\{\langle \mathbf{0}, \mathbf{x} \rangle : \mathbf{x} \in P_1\}$, $P_1 = \{\mathbf{x} : \mathbf{Ax} \leq \mathbf{0}\}$ и II^{a} — $\min\{\langle \mathbf{0}, \mathbf{y} \rangle : \mathbf{y} \in P_2\}$, $P_2 = \{\mathbf{y} : \mathbf{yA} = \mathbf{0}, \mathbf{y} \geq \mathbf{0}\}$. Нека система I има решение: понеже $P_1 \neq \emptyset$, то в задача I^{a} всички планове са решения; следователно ограниченията $\mathbf{Ax} \leq \mathbf{0}$ са свободни, откъдето $\mathbf{y} = \mathbf{0}$, т. е. система II няма решение. Нека система II има решение: понеже $P_2 \neq \emptyset$ и $\mathbf{y} \neq \mathbf{0}$, то има поне едно закрепено ограничение в P_2, т. е. система I няма решение.

20.3. Образуваме спрегнатите задачи: I^{a} — $\min\{\langle -\mathbf{c}, \mathbf{x} \rangle : \mathbf{x} \in P_1\}$, $P_1 = \{\mathbf{x} : \mathbf{Ax} \geq 0, \mathbf{x} \geq 0\}$ и II^{a} — $\max\{\langle \mathbf{0}, -\mathbf{y} \rangle : -\mathbf{y} \in P_2\}$, $P_2 = \{-\mathbf{y} : -\mathbf{yA} \leq -\mathbf{c}, -\mathbf{y} \geq \mathbf{0}\}$. Нека система I има решение. Ако допуснем, че задача I^{a} е разрешима, то и задача II^{a} е разрешима и $0 = \langle \mathbf{0}, -\mathbf{y} \rangle \leq \langle -\mathbf{c}, \mathbf{x} \rangle < 0$ — противоречие; следователно I^{a} няма решение поради неограниченост отдолу на $\langle -\mathbf{c}, \mathbf{x} \rangle$ ($P_1 \neq \emptyset$), откъдето II^{a} е неразрешима поради $P_2 = \emptyset$, т. е. система II няма решение. Нека система II има решение: ако допуснем, че задача II^{a} има решение, то и I^{a} е разрешима и $\min\{\langle -\mathbf{c}, \mathbf{x} \rangle : \mathbf{x} \in P_1\} = \max\{\langle \mathbf{0}, -\mathbf{y} \rangle : -\mathbf{y} \in P_2\} = 0$, т. е. система I няма решение.

20.4. Образуваме спрегнатите задачи: I^{a} — $\min\{\langle \mathbf{0}, \mathbf{x}\rangle : \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{c}\}$ и II^{a} — $\max\{g(\mathbf{y}) = \langle \mathbf{c}, \mathbf{y}\rangle : \mathbf{y}\mathbf{A} = \mathbf{0}\}$. Нека система I има решение: тогава задача I^{a}, съответно II^{a}, имат решение и $\langle \mathbf{c}, \mathbf{y}\rangle \leq \langle \mathbf{0}, \mathbf{x}\rangle = 0 < 1$, следователно система II няма решение. Нека система II има решение: ако допуснем, че задача II^{a}, съответно I^{a}, са разрешими, то $g^* \geq 1 > \langle \mathbf{0}, \mathbf{x}\rangle = 0$ — противоречие; следователно I^{a} и II^{a} са неразрешими, т. е. система II няма решение.

21. Функцията на Лагранж е

$$L(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{j=1}^{n}(-c_j)x_j + \sum_{i=1}^{m} y_i \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j - b_i \right),$$

условията на Кун — Такър са условията (52), (53), (55), (56) и

$$(**) \qquad \begin{aligned} x_j \left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij}y_j - c_j \right) &= 0, \qquad j = 1, \dots, n, \\ y_i \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_i - b_i \right) &= 0, \qquad i = 1, \dots, m. \end{aligned}$$

Ако $\mathbf{x}^*$ и $\mathbf{y}^*$ са съответно решения на задачи (51)–(53) и (54)–(56), те удовлетворяват (52), (53), (55), (56), защото са планове, а (**) — поради теорема 12.

§ 8. Двойнствен симплекс-метод

1.1. $\mathbf{x}^* = (0, 1)$, $l^* = -1$; опорен план на спрегнатата задача на КЗ: $\overline{\mathbf{y}} = (0, 0)$ с базис $\{x_3, x_4\}$; съответен псевдоплан на КЗ: $\mathbf{x}^0 = (0, 0, 0, 4, -1)$.

1.2. $\mathbf{x}^* = (0, 1)$, $\mathbf{x}^{**} = (1, 0)$, $l^* = 1$; опорен план на спрегната задача на КЗ: $\overline{\mathbf{y}} = (0, 0, 0)$ с базис $\{x_3, x_4, x_5\}$; съответен псевдоплан на КЗ: $\mathbf{x}^0 = (0, 0, 0, -1, 5, 6)$.

Глава 4

Специални класове задачи на линейното оптимиране

Между задачите на линейното оптимиране могат да се отделят някои класове задачи, които имат определени структурни особености. За тези задачи общите методи на линейното оптимиране могат съществено да се опростят или да се построят методи, по-ефективни от симплекс-метода.

Първата задача, на която ще се спрем, е била формулирана около 1941 г. от няколко автори, в частност от Ф. Л. Хичкок и носи неговото име. Наред с това тя е известна и като класическа транспортна задача. При специален избор на параметрите на задачата ($a_i = b_i = 1$) тя е известна като задача за назначенията.

Втората задача, на която ще се спрем, е за търсене на минимум на линейна функция върху полиматроид. Включването ѝ тук се дължи на факта, че множеството от допустими решения на транспортната задача е сечение на два полиматроида и това позволява по-пълно да бъдат обяснени част от свойствата на транспортната задача.

§ 1. Класическа транспортна задача

Между специалните *линейни оптимизационни задачи* най-известна е така наречената *транспортна задача* (*ТЗ*), която се формулира по следния начин :

$$l(x_{11}, \dots, x_{mn}) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \to \min \tag{1}$$

при условия (транспортни ограничения)

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, \qquad i = 1, \dots, m,$$
$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, \qquad j = 1, \dots, n,$$
$$x_{ij} \geq 0.$$

Ето една интерпретация на задачата, която обяснява името ѝ: да се състави план на превозите $\{x_{ij}\}$, $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$, при който потребностите b_j на обектите B_j (потребители) се задоволяват от наличностите a_i на обектите A_i (производители) при минимални сумарни транспортни разходи. Разходите за превоз на единица продукт от A_i до B_j са c_{ij}, $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$.

Твърдение 1. Задача (1) има решение тогава и само тогава, когато

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j. \tag{2}$$

Забележка. Понякога се решават ТЗ, за които условието (2) е нарушено (т. нар. ТЗ от отворен тип). Въпреки това може да се окаже смислено търсенето на план на превозите, минимизиращ сумарните транспортни разходи. Свеждаме задачата към такава, в която условието (2) е изпълнено, като въведем „фиктивен потребител“ B_{n+1} (в случая $\sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_j$) с потребност $b_{n+1} = \sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{j=1}^{n} b_j$ и транспортни разходи до всеки „производител“ съответно $c_{i,n+1} = 0$, $i = 1, \dots, m$. Аналогично в случая $\sum_{i=1}^{m} a_i < \sum_{j=1}^{n} b_j$ се въвежда „фиктивен производител“ A_{m+1} с наличност $a_{m+1} = -\sum_{i=1}^{m} a_i + \sum_{j=1}^{n} b_j$ и транспортни разходи до всеки „потребител“ съответно $c_{m+1,j} = 0$, $j = 1, \dots, n$. Условие (2) ще наричаме *условие за баланс*.

Задача (1) очевидно може да се запише във вида $\min\{\langle \mathbf{c}, \mathbf{y} \rangle : \mathbf{Ay} = \mathbf{d}, \mathbf{y} \geq \mathbf{0}\}$, където $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^{nm}$, $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^{nm}$, $\mathbf{A}$ е матрица $(m+n)\times mn$, $\mathbf{d} \in \mathbb{R}^{m+n}$, $\mathbf{d} = (\mathbf{a}, \mathbf{b})$. Матрицата $\mathbf{A}$ се състои от нули и единици, като във всеки стълб има точно два ненулеви елемента и $\operatorname{rank} \mathbf{A} = m+n-1$. Това, че рангът на $\mathbf{A}$ не е по-голям от $m + n - 1$, следва от твърдение 1.

При различните методи за решаване на ТЗ се използуват правоъгълни таблици и някои понятия, свързани с тях. Правоъгълната таблица има редове и стълбове, образуващи клетки. Всяка клетка се определя с двойка индекси (i, j), където i е номерът на реда, а j — номерът на стълба на клетката. Всички данни за транспортната задача могат да бъдат подредени в правоъгълна таблица (ще я наричаме транспортна таблица), както е показано на табл. 1.

c_{11} x_{11}	c_{12} x_{12}	....	c_{1n} x_{1n}	a_1
c_{21} x_{21}	c_{22} x_{22}	....	c_{2n} x_{2n}	a_2
$\vdots$	$\vdots$	....	$\vdots$	$\vdots$
c_{m1} x_{m1}	c_{m2} x_{m2}	....	c_{mn} x_{mn}	a_m
b_1	b_2	....	b_n	a b

Таблица 1

Ако за даден опорен план $\mathbf{x} = \{x_{ij}\}$ компонентата x_{ij} е базисна, клетката (i, j) също ще наричаме *базисна*. Ако $x_{ij} = 0$, клетката (i, j) ще наричаме *празна* клетка (за този план).

Определение 1. Последователност от клетки на транспортната таблица ще наричаме *цикъл*, ако начупената линия, образувана от отсечки с върхове в тези клетки, е затворена и удовлетворява условията:

а) всяка отсечка лежи изцяло в ред или стълб на таблицата;

б) две отсечки, излизащи от един и същ връх, лежат едната в ред, другата в стълб на таблицата.

Твърдение 2. Необходимо и достатъчно условие произволна съвкупност от вектори-стълбове на матрицата на транспортните ограничения да бъде линейно независима е съответните ѝ клетки да не съдържат цикъл.

Твърдение 3. Необходимо и достатъчно условие планът $\mathbf{x} = \{x_{ij}\}$ да бъде опорен за ТЗ е клетките (i, j), за които $x_{ij} > 0$, да не съдържат цикъл.

Твърдение 4. Нека $\mathbf{x} = \{x_{ij}\}$ е опорен план за задача (1). За всяка празна клетка (i, j) съществува точно един цикъл, който я свързва с базисните клетки на $\mathbf{x}$.

Нека $\mathbf{x}'$ е опорен план и (k, l) е празна клетка. Образуваме единствения цикъл γ_{kl}, който я свързва с клетките от базиса на $\mathbf{x}'$:

$$\gamma_{kl} : (k, l)(k, j_1) \ldots (i_s, j_s)(i_s, l).$$

На клетките от цикъла алтернативно приписваме знаци "+" и "−", започвайки от клетката (k,l), на която присвояваме "+". Определяме разликата

$$\Delta_{kl} = \sum_{(i,j)\in\gamma_{kl}^{+}} c_{ij} - \sum_{(i,j)\in\gamma_{kl}^{-}} c_{ij},$$

където $\gamma_{kl}^{+} = \{(i,j) \in \gamma_{kl},$ означени с "+"$\}$, $\gamma_{kl}^{-} = \{(i,j) \in \gamma_{kl},$ означени с "−"$\}$.

Теорема 1. Опорен план на задача (1) е оптимален тогава и само тогава, когато $\Delta_{kl} \geq 0$ за всички празни клетки (k,l).

Теорема 1 следва непосредствено от условията за оптималност на общата линейна задача.

Теорема 2. Нека $\mathbf{x}'$ е опорен план на задача (1). Тогава векторът $\mathbf{x}''$, получен от $\mathbf{x}'$ по формулите

$$(3) \qquad \begin{aligned} x''_{ij} &= x'_{ij} + x'_{i_p j_p}, \quad && (i,j) \in \gamma_{kl}^{+}, \\ x''_{ij} &= x'_{ij} - x'_{i_p j_p}, \quad && (i,j) \in \gamma_{kl}^{-}, \\ x''_{ij} &= x'_{ij}, && (i,j) \notin \gamma_{kl}, \quad x'_{i_p j_p} = \min_{(i,j)\in\gamma_{kl}^{-}} x'_{ij}, \end{aligned}$$

е опорен план на задача (1).

Теорема 2 следва непосредствено от формулите за преминаване от един опорен план на общата задача на линейното оптимиране към друг.

Двойнствената задача на задача (1) е

$$\max\left\{\sum_{j=1}^{n} b_j v_j - \sum_{i=1}^{m} a_i u_i : v_j - u_i \leq c_{ij},\ i = 1,\dots,m,\ j = 1,\dots,n\right\}.$$

Теорема 3. Необходимо и достатъчно условие планът x да бъде решение на задача (1) е съществуването на вектор $(-u_1,\dots,-u_m,v_1,\dots,v_n)$ такъв, че $v_j - u_i \leq c_{ij}$ за $i = 1,\dots,m$, $j = 1,\dots,n$, $v_j - u_i = c_j$ за $x_{ij} > 0$.

Теорема 3 следва от теоремите за двойнственост на общата задача на линейното оптимиране.

Първа стъпка при решаване на ТЗ е построяването на начален опорен план. За разлика от общата задача на линейното оптимиране при транспортната задача това се осъществява лесно. Има различни методи за построяване на начален опорен план. Спираме се на два от тях — метод на северозападния ъгъл и метод на минималния елемент.

Метод на северозападния ъгъл. Определяме $\min(a_1,b_1)$. Ако $\min(a_1,b_1) = a_1$, полагаме $x_{11} = a_1$, $x_{1j} = 0$, $j = 2,\dots,n$. Преминаваме към нова транспортна таблица, получена от старата чрез отстраняване на първия ред и коригиране на b_1: $b'_1 = b_1 - a_1$. Ако $\min(a_1,b_1) = b_1$, полагаме $x_{11} = b_1$, $x_{i1} = 0$,

$i = 2, \dots, m$. Преминаваме към нова транспортна таблица, получена от старата чрез отстраняване на първия стълб и коригиране на a_1: $a'_1 = a_1 - b_1$. (Ако $a_1 = b_1$, отстраняваме или първия стълб, или първия ред, но само единия от тях.)

С получената таблица повтаряме описаните процедури.

Наименованието на метода идва от това, че x_{11} е разположена в „северозападната“ клетка на таблицата.

Метод на минималния елемент. Намираме $c_{i_0 j_0} = \min_{i,j} c_{ij}$. Определяме $\min(a_{i_0}, b_{j_0})$. Ако $\min(a_{i_0}, b_{j_0}) = a_{i_0}$, полагаме $x_{i_0 j_0} = a_{i_0}$, $x_{i_0 j} = 0$, $j \neq j_0$. Преминаваме към нова транспортна таблица, получена от старата чрез отстраняване на реда i_0 и коригиране на b_{j_0}: $b'_{j_0} = b_{j_0} - a_{i_0}$. Ако $\min(a_{i_0}, b_{j_0}) = b_{j_0}$, полагаме $x_{i_0 j_0} = b_{j_0}$, $x_{i j_0} = 0$, $i \neq i_0$. Преминаваме към нова транспортна таблица, получена от старата чрез отстраняване на стълба j_0 и коригиране на a_{i_0}: $a'_{i_0} = a_{i_0} - b_{j_0}$. (Ако $a_{i_0} = b_{j_0}$, отстраняваме или j_0-я стълб, или i_0-я ред, но само единия от тях.)

С получената таблица повтаряме описаните процедури.

Пример 1. Да приложим метода на северозападния ъгъл за намиране на опорен план на транспортната задача, дадена с табл. 2.

3	5	7	11	100
1	4	6	3	130
5	8	12	7	170
150	120	80	50	

Таблица 2

Решението е илюстрирано с табл. 3. Редът за отстраняване на редове (респ. стълбове) при получаване на редуцираните таблици е означен отляво (за редовете) и отгоре (за стълбовете) на таблицата. Транспортните разходи за намерения план са 2300.

Намирането на опорен план на същата задача по метода на минималния елемент е илюстрирано на табл. 4. Транспортните разходи за този план са 2220. (За оптималния план те са 2040.)

Разпределителен метод за решаване на ТЗ. Този метод е вариант на симплекс-метода за решаване на общата задача на линейното оптимиране и

	II	IV	V	VI			
I	3 100	5	7	11	100		
III	1 50	4 80	6	3	130	80	
VI	5	8 40	12 80	7 50	170	130	50
	150	120	80	50			
	50	40					

Таблица 3

	II	V	VI	IV			
III	3 20	5 80	7	11	100	80	
I	1 130	4	6	3	130		
VI	5	8 40	12 80	7 50	170	120	80
	150	120	80	50			
	2	40					

Таблица 4

може да се опише с помощта на следния алгоритъм:

1. Построяваме начален опорен план x по някой от изложените методи.

2. За всяка празна клетка (i, j) построяваме цикъла γ_{ij} и изчисляваме Δ_{ij}. Проверяваме условието (критерия) за оптималност (Теорема 1). Ако е изпълнено — планът е оптимален, задачата е решена. Ако не — преминаваме към т. 3.

3. Намираме $\Delta_{i_0j_0} = \min\{\Delta_{ij} : \Delta_{ij} < 0\}$. Построяваме нов опорен план по формулите (3) с помощта на цикъла $\gamma_{i_0j_0}$, свързващ клетката (i_0, j_0) с базисните клетки. Преминаваме към т. 2.

Метод на потенциалите. Този метод е вариант на двойнствения симплекс-метод и може да се опише с помощта на следния алгоритъм:

1. Построяваме начален опорен план $\mathbf{x}$ по някой от изложените методи.

2. Решаваме системата $v_j - u_i = c_{ij}$ за $x_{ij} > 0$.

3. Проверяваме условието за оптималност (теорема 3). Ако е изпълне-

но — планът е оптимален, задачата е решена. Ако не — преминаваме към т. 4.

4. Определяме $c_{i_0 j_0} - v_{j_0} + u_{i_0} = \min\{c_{ij} - v_j + u_i : x_{ij} = 0\}$. Свързваме клетката (i_0, j_0) с базисните клетки чрез единствения цикъл. Построяваме нов опорен план по формулите (3) и преминаваме към т. 2.

Забележка. Изборът на клетката (i_0, j_0) по начина, изложен в т. 3 на разпределителния метод (респ. т. 4 от метода на потенциалите), не е съществен, но се прави, за да има еднозначност при описанието на алгоритъма. Клетката (i_0, j_0) може да бъде фиксирана между клетките (i, j), за които $\Delta_{ij} < 0$ (респ. $c_{ij} - v_j + u_i < 0$).

Пример 2. Да се приложи методът на потенциалите за решаване на задачата, дадена с табл. 2.

Решение.

Итерация 0:

1. За начален опорен план $\mathbf{x}^{(0)}$ използуваме намерения в табл. 3.

2. Решаваме системата

$$\begin{aligned} &v_1 - u_1 = 3, \quad v_1 - u_2 = 1, \quad v_2 - u_2 = 4,\\ &v_2 - u_3 = 8, \quad v_3 - u_3 = 12, \quad v_4 - u_3 = 7. \end{aligned}$$

Като положим $u_1 = 0$, намираме $v_1 = 3$, $u_2 = 2$, $v_2 = 6$, $u_3 = -2$, $v_3 = 10$, $v_4 = 5$.

3. Проверяваме условията за оптималност:

$$\begin{aligned} &v_2 - u_1 = 6 > 5 = c_{12}, \quad v_3 - u_1 = 10 > 7 = c_{13}, \quad v_4 - u_1 = 5 < 11 = c_{14},\\ &v_3 - u_2 = 8 > 6 = c_{23}, \quad v_4 - u_2 = 3 = c_{24}, \quad v_1 - u_3 = 5 = c_{31}. \end{aligned}$$

Планът не е оптимален.

4. Определяме $\min\{c_{ij} - v_j + u_i : x_{ij} = 0\} = 7 - 10 + 0 = -3$; $(i_0, j_0) = (1, 3)$. Цикълът γ_{13} на клетката $(1, 3)$ е отбелязан на табл. 5. Пресмятаме $\min\limits_{(i,j)\in\gamma_{13}^-} x_{ij}^{(0)} = 80 = x_{22}^{(0)} = x_{33}^{(0)}$.

Итерация 1:

1. Определяме компонентите на новия опорен план $\mathbf{x}^{(1)}$ (вж. табл. 6) по формули (3).

Забележка. Планът $\mathbf{x}^{(1)}$ е изроден. Допълваме базисните клетки с клетката $(2, 2)$. Това означаваме, като записваме в нея количеството 0 и не я считаме за празна. Формулирайте правила за правилно избиране на празните клетки, които причисляваме към базисните, в случай на изроден план!

2. Решаваме системата

$$v_1 - u_1 = 3, \quad v_3 - u_1 = 7, \quad v_1 - u_2 = 1,$$

v_j / u_j	3	6	10	5
0	− 3 100	5	+ 7	11
2	1 50 +	− 4 80	6	3
−2	5	8 40 +	12 80 −	7 50

Таблица 5

v_j / u_i	3	6	7	5
0	− 3 20	+ 5	7 80	11
2	1 130 +	4 0 −	6	3
−2	5	8 120	12	7 50

Таблица 6

$$v_2 - u_2 = 4, \quad v_2 - u_3 = 8, \quad v_4 - u_3 = 7.$$

Като положим $u_1 = 0$, намираме $v_1 = 3$, $v_2 = 6$, $v_3 = 7$, $v_4 = 5$, $u_2 = 2$, $u_3 = -2$.

3. Проверяваме условията за оптималност:

$$\begin{aligned} &v_2 - u_1 = 6 > 5 = c_{12}, && v_4 - u_1 = 5 < 11 = c_{14}, && v_3 - u_2 = 5 < 6 = c_{23}, \\ &v_4 - u_2 = 3 = c_{24}, && v_1 - u_3 = 5 = c_{31}, && v_3 - u_3 = 9 < 12 = c_{33}. \end{aligned}$$

Планът не е оптимален.

4. Определяме $\min\{c_{ij} - v_j + u_i : x_{ij} = 0\} = 5 - 6 + 0 = -1$; $(i_0, j_0) = (1, 2)$. Цикълът γ_{12} е отбелязан на табл. 6. Пресмятаме $\min\limits_{(i,j)\in\gamma_{12}^-} x_{ij}^{(1)} = x_{22}^{(1)} = 0$.

Итерация 2:

1. Поради изродеността на плана $\mathbf{x}^{(1)}$ се оказва $x_{i_p j_p} = x_{22} = 0$ и прилагането на формули (3) не довежда до нов план ($\mathbf{x}^{(2)} = \mathbf{x}^{(1)}$). Сменя се само базисът на този план (вж. табл. 7).

$u_i \backslash v_j$	3	5	7	4
0	3 / 20 $-$	5 / 0 $+$	7 / 80	11
2	1 / 130	4	6	3
-3	5 $+$	8 / 120 $-$	12	7 / 50

Таблица 7

2. Решаваме системата

$$\begin{aligned} v_1 - u_1 &= 3, \quad v_2 - u_1 = 5, \quad v_3 - u_1 = 7, \\ v_1 - u_2 &= 1, \quad v_2 - u_3 = 8, \quad v_4 - u_3 = 7. \end{aligned}$$

При $u_1 = 0$ намираме $v_1 = 3$, $v_2 = 5$, $v_3 = 7$, $v_4 = 4$, $u_2 = 2$, $u_3 = -3$.

3. Проверяваме условията за оптималност. Планът не е оптимален, тъй като $v_1 - u_3 = 6 > 5$.

4. Определяме клетката $(i_0, j_0) = (3, 1)$, чийто цикъл намираме (вж. табл. 7). Пресмятаме $x_{i_p j_p} = \min\limits_{(i,j)\in\gamma_{31}^-} x_{ij}^{(2)} = x_{11}^{(2)} = 20$.

Итерация 3:

1. Компонентите на плана $\mathbf{x}^{(3)}$, пресметнати по формули (3), са дадени на табл. 8.

2. Системата, която получаваме за този план, е:

$$\begin{aligned} v_2 - u_1 &= 5, \quad v_3 - u_1 = 7, \quad v_1 - u_2 = 1, \\ v_1 - u_3 &= 5, \quad v_2 - u_3 = 8, \quad v_4 - u_3 = 7. \end{aligned}$$

Намираме решение $u_1 = 0$, $u_2 = 1$, $u_3 = -3$, $v_1 = 2$, $v_2 = 5$, $v_3 = 7$, $v_4 = 4$.

3. Проверяваме условията за оптималност.

$$v_1 - u_1 = 2 < 3 = c_{11}, \quad v_4 - u_1 = 5 < 11 = c_{14}, \quad v_2 - u_2 = \;\; 4 = c_{22},$$

u_i \ v_j	2	5	7	4
0	3	5 20	7 80	11
1	1 130	4	6	3
−3	5 20	8 100	12	7 50

Таблица 8

$$v_3 - u_2 = 6 = c_{23}, \qquad v_4 - u_2 = 3 = c_{24} \qquad v_3 - u_3 = 10 < 12 = c_{33}.$$

Планът е оптимален.

Единствен ли е намереният оптимален план (сравнете с условието за единственост на решението при симплекс-метода, гл. 3, § 5)? Ако не — намерете поне още един. Решете задачата, като приложите разпределителния метод. В този случай решаването на системата $v_j - u_i = c_{ij}$, образувана за базисните клетки (i, j), се заменя с определянето на циклите γ_{ij} за празните клетки (i, j).

Задачи

1. Докажете, че задачата (1) е изродена тогава и само тогава, когато съществуват индекси $i_1, \dots, i_p$, $p < m$, $j_1, \dots, j_q$, $q < n$, такива че $a_{i_1} + \dots + a_{i_p} = b_{j_1} + \dots + b_{j_q}$.

2. Докажете, че ако ТЗ е изродена, то съществува $\mu > 0$, такова че за всяко $\varepsilon \le \mu$ задачата $T(\varepsilon)$, за която $a(\varepsilon) = (a_1 + \varepsilon, \dots, a_m + \varepsilon)$, $b(\varepsilon) = (b_1, \dots, b_{n-1}, b_n + m\varepsilon)$, е неизродена.

3. Докажете, че ако a и b са целочислени в (1), то задачата, за която $\mathbf{a}' = (a_1, \dots, a_{m-1}, a_m + 1)$, $\mathbf{b}' = \left(b_1 + \frac{1}{n}, \dots, b_n + \frac{1}{n}\right)$, не може да бъде изродена.

4. Докажете, че ако ТЗ има само един изроден план, то съществува само една двойка индекси (s, t) такива, че $a_s + b_t = a_1 + \dots + a_m$.

5. Нека

$$M(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{D}) = \left\{ \mathbf{x} = \{x_{ij}\} : \sum_{j=1}^{m} x_{ij} = a_i,\ \sum_{i=1}^{n} x_{ij} = b_j,\ 0 \le x_{ij} \le d_{ij} \right\}.$$

Докажете, че необходимото и достатъчно условие $M(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{D}) \neq \emptyset$ е

$$\sum_{i=1}^{m} \min\left(a_i, \sum_{j=1}^{n} d_{ij}\right) \geq \sum_{j \in J} b_j, \quad J \subset \{1, \ldots, n\}.$$

6. Докажете, че ако съществува двойка индекси (l, t), такива че $c_{it} - c_{lt} > \max\limits_{j \neq t}(c_{ij} - c_{lj})$, $i = 1, \ldots, l-1, l+1, \ldots, m$, то за всеки оптимален план $\mathbf{x} = \{x_{ij}\}$ на ТЗ имаме $x_{lt} = \min(a_l, b_t)$.

7. Дадена е задачата

$$\max\left\{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} : \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i,\ \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j,\ x_{ij} \geq 0,\ i = 1, \ldots, m, j = 1, \ldots, n\right\}.$$

Нека $\mathbf{x}^G$ е опорен план, получен по метода на максималния елемент (аналогичен на метода на минималния елемент), а $\mathbf{x}^*$ — оптимален план. Докажете, че

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}^G \geq \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}^*.$$

8. Докажете, че ако в задача (1) $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ са целочислени вектори, то всеки опорен план е с целочислени компоненти.

9. Докажете Твърдение 1.

10. Докажете Твърдение 2.

11. Докажете Твърдение 3.

12. Докажете Твърдение 4.

13. Докажете Теорема 1.

14. Докажете Теорема 2.

15. Докажете Теорема 3.

16. Докажете, че двойнствената задача на задача (1) има безбройно много решения, различаващи се с адитивна константа.

17. Нека в задачата на ЛО $\max\{\langle \mathbf{c}, \mathbf{x}\rangle : \mathbf{Ax} = \mathbf{b},\ \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}$ системата $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ има ранг $m - 1$ (m — брой на редовете на $\mathbf{A}$) и всяко едно от ограниченията в системата $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ е линейна комбинация на останалите ограничения. Докажете, че двойнствената на тази задача има безбройно много решения, различаващи се с адитивна константа (обобщение на твърдението в зад. 16).

18. Докажете, че всеки оптимален план на ТЗ

$$\min\left\{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}c_{ij}x_{ij} : \sum_{j=1}^{n}x_{ij}=a_i,\ \sum_{i=1}^{m}x_{ij}=b_j,\ x_{ij}\geq 0,\ i=1,\dots,m, j=1,\dots,n\right\}.$$

е оптимален и за задачата, в която към всички коефициенти c_{ij}, разположени в един и същ ред (или един и същ стълб), е прибавена или извадена една и съща произволна константа.

19. Дадена е ТЗ с m производители и n потребители и транспортни разходи $c_{ij} = j + (i-1)n$. Да се докаже, че за произволни наличности a_i и потребности b_j, $i = 1,\dots,m$, $j = 1,\dots,n$, за които $a_1 + \dots + a_m = b_1 + \dots + b_n$, всеки план е оптимален.

20. За всяка от следните ТЗ да се намери решение и ако решението не е единствено, да се посочи още едно.

Забележка. В задачите, за които не е изпълнено условието за баланс, да се въведе по подходящ начин още един ред или стълб. Това се отнася и за следващите (21–24) задачи.

20.1. $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 7 & 5 \\ 6 & 4 \\ 6 & 7 \end{pmatrix}$, $\mathbf{a}^{\mathrm{T}} = (25, 20, 30)$, $\mathbf{b} = (20, 40)$;

20.2. $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 3 \\ 3 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{a}^{\mathrm{T}} = (180, 90)$, $\mathbf{b} = (60, 75, 120, 45)$;

20.3. $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{a}^{\mathrm{T}} = (30, 40, 10)$, $\mathbf{b} = (20, 50)$;

20.4. $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \\ 3 & 1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$, $\mathbf{a}^{\mathrm{T}} = (25, 20, 15, 40)$, $\mathbf{b} = (60, 30)$;

20.5. $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 6 & 5 & 4 \end{pmatrix}$, $\mathbf{a}^{\mathrm{T}} = (35, 55)$, $\mathbf{b} = (30, 25, 55)$;

20.6. $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{a}^{\mathrm{T}} = (110, 70)$, $\mathbf{b} = (110, 60, 50)$;

20.7. $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 14 & 10 & 12 \end{pmatrix}$, $\mathbf{a}^{\mathrm{T}} = (30, 45)$, $\mathbf{b} = (25, 45, 25)$;

20.8. $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 4 & 4 & 6 \\ 5 & 1 & 7 \end{pmatrix}$, $\mathbf{a}^{\mathrm{T}} = (100, 90, 150)$, $\mathbf{b} = (80, 110, 120)$;

20.9. $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 10 & 1 \\ 5 & 7 & 2 & 0 \\ 1 & 7 & 8 & 11 \end{pmatrix}$, $\mathbf{a}^{\mathrm{T}} = (50, 50, 15)$, $\mathbf{b} = (30, 20, 40, 25)$;

20.10. $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 6 & 7 & 5 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{a}^{\mathrm{T}} = (135, 90)$, $\mathbf{b} = (75, 60, 135)$.

21. Да се изпълнят условията а) и б) за следните ТЗ (вж. забележката към зад. 20):

21.1. $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 6 & 7 & 5 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{a}^{\mathrm{T}} = (90, 60)$, $\mathbf{b} = (50, 40, 90)$;

а) да се намери произволно решение;

б) да се намери такова решение, за което $x_{13} = 60$.

21.2. $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$, $\mathbf{a}^{\mathrm{T}} = (80, 20, 60)$, $\mathbf{b} = (40, 100)$;

а) да се намери произволно решение;

б) да се намери такова решение, за което $x_{12} = 50$.

22. За кои стойности на параметрите α и β опорният план

$$\mathbf{x}^* = \begin{pmatrix} 30 & 0 & 10 & 10 \\ 0 & 0 & 20 & 0 \\ 0 & 40 & 30 & 0 \end{pmatrix}$$

на транспортната задача

$\alpha+\beta$	2	α	1	50
4	$\alpha-\beta$	2	-1	20
10	4	$\alpha+\beta$	10	70
30	40	60	10	

а) е решение;

б) е единствено решение;

в) не е единствено решение (намерете всички оптимални опорни планове, съседни на $\mathbf{x}^*$).

23. За кои стойности на параметъра a съответният опорен план $\mathbf{x}^*$ за ТЗ, дадени с таблиците:

23.1.

1	3	a	90
4	2	1	50
30	60	70	

, $\mathbf{x}^* = \begin{pmatrix} 30 & 40 & 20 \\ 0 & 0 & 50 \end{pmatrix}$,

23.2.

a	7	30
4	6	25
7	6	20
45	15	

, $\mathbf{x}^* = \begin{pmatrix} 20 & 0 \\ 25 & 0 \\ 0 & 15 \end{pmatrix}$,

а) е оптимален;

б) не е оптимален, но задачата има оптимален опорен план, съседен на $\mathbf{x}^*$.

Забележка. В зад. 23 и 24 опорните планове се отнасят за задачите, получени от изходните след подходящо въвеждане на ред или стълб с цел удовлетворяване на условието за баланс.

24. За кои стойности на параметрите α и β опорните планове

$$\mathbf{x}^* = \begin{pmatrix} 20 & 0 & 30 & 50 \\ 0 & 0 & 50 & 0 \\ 0 & 60 & 0 & 10 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{y}^* = \begin{pmatrix} 20 & 50 & 30 & 0 \\ 0 & 0 & 50 & 0 \\ 0 & 10 & 0 & 60 \end{pmatrix}$$

на ТЗ, дадена с таблицата

$\alpha+\beta$	0	2	β	100
-7	3	α	-2	50
0	α	-3	$\alpha+\beta$	70
20	60	80	60	

а) са решения на задачата;

б) са съседни опорни планове, без да са решения;

в) за стойностите на α и β, за които $\mathbf{x}^*$ и $\mathbf{y}^*$ са решения, да се намери решение $\mathbf{z}^*$, за което $z^*_{12} = 25$.

§ 2. Линейни оптимизационни задачи върху полиматроиди

В този параграф ще се спрем на клас оптимизационни задачи с важно значение не само в линейното оптимиране, но и в дискретната оптимизация и комбинаторния анализ.

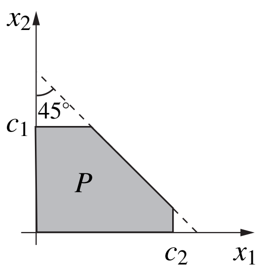
Нека $(\mathbb{R}^n_+, \leq)$ е множество с частична наредба $\leq$ ($\mathbf{x} \leq \mathbf{y}$, ако $x_i \leq y_i$, $i = 1, \dots, n$). Нека $D \subset \mathbb{R}^n_+$.

Определение 2. Елементът $\mathbf{x}^0 \in D$ се нарича *минимален* (*максимален*) на частично нареденото множество $(D, \leq)$, ако не съществува друг елемент $\mathbf{x} \in D$, такъв че $\mathbf{x} \leq \mathbf{x}^0$ ($\mathbf{x} \geq \mathbf{x}^0$).

Определение 3. *Полиматроид* се нарича множеството P, удовлетворяващо условията:

1. $P \subset \mathbb{R}^n_+$ е компактно множество;
2. Ако $\mathbf{0} \leq \mathbf{y} \leq \mathbf{x}$ и $\mathbf{x} \in P$, то $\mathbf{y} \in P$;
3. За всеки вектор $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n_+$ всички максимални елементи на множеството $P_{\mathbf{a}} = \{\mathbf{x} \in P : \mathbf{x} \leq \mathbf{a}\}$ имат една и съща сума на координатите си.

Пример 3. Нека P е множеството, показано на фиг. 5. Лесно се проверява, че то е полиматроид.



Фиг. 5

Ще напомним, че с 2^s се означава множеството от всички подмножества на множеството $S = \{1, \dots, n\}$.

Определение 4. Функцията $f : 2^s \to \mathbb{R}$ се нарича *субмодулярна*, ако за всеки $u \subset S$ и $v \subset S$ е изпълнено $f(u) + f(v) \geq f(u \cup v) + f(u \cap v)$.

Пример 4. Нека $f : 2^s \to \mathbb{R}$ се дефинира по следния начин: $f(u) = |u|$. Очевидно е, че $f(u) + f(v) = |u| + |v| = |u \cup v| + |u \cap v| = f(u \cup v) + f(u \cap v)$. Следователно f е субмодулярна функция.

Субмодулярната функция f се нарича *ненамаляваща*, ако от $v \subset u$ следва $f(v) \leq f(u)$.

Теорема 4. Множеството $P \subset \mathbb{R}^n_+$ е полиматроид тогава и само тогава, когато съществува ненамаляваща субмодулярна функция $f : 2^s \to \mathbb{R}^1_+$, $S = \{1, \dots n\}$, такава че $f(\emptyset) = 0$ и

$$P = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n_+ : \sum_{i \in \omega} x_i \leq f(\omega) \text{ за всяко } \omega \subset S \right\}.$$

От теорема 4 следва, че всеки полиматроид е многостен, чиято матрица на ограниченията е съставена от нули и единици.

По-нататък с $P(f)$ ще означаваме, че полиматроидът P се задава с помощта на субмодулярната функция f.

За всяка пермутация $\pi = (\pi_1, \dots, \pi_n)$ на елементите на множеството $S = \{1, \dots, n\}$ определяме множествата $\omega_\pi^0 = \emptyset$, $\omega_\pi^s = (\pi_1, \dots, \pi_s)$.

Теорема 5. Векторът $\mathbf{x}$, принадлежащ на полиматроида $P(f)$, е опорен план (връх) на $P(f)$ тогава и само тогава, когато съществуват пермутация π на елементите на множеството $S = \{1, \dots, n\}$ и число $0 \le k \le n$, такива че компонентите на вектора $\mathbf{x}$ се изчисляват по правилото

$$x_{\pi_s} = \begin{cases} f(\omega_\pi^s) - f(\omega_\pi^{s-1}) & \text{за } s = 1, \dots, k, \\ 0 & \text{за } s = k+1, \dots, n. \end{cases} \tag{4}$$

Пример 5. Нека $P(f) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}_+^2 : x_1 \le 5,\ x_2 \le 7\}$ е полиматроид, зададен с помощта на субмодулярната функция f, определена по следния начин: $f(\emptyset) = 0$, $f(1) = 5$, $f(2) = 7$, $f(1,2) = 10$. Лесно се проверява, че векторът $(5,0)$ е опорен план на $P(f)$. Да разгледаме пермутацията $\pi = (1,2)$ и нека $k = 1$. Тогава по формулите (4) $x_{\pi_1} = x_1 = f(1) - f(\emptyset) = 5$, $x_{\pi_2} = x_2 = 0$.

По аналогичен начин за всеки от останалите опорни планове може да се построи пермутация π и да се избере число k, такова че опорният план да бъде построен по формулите (4).

Да разгледаме следната линейна задача:

$$\max\left\{\sum c_i x_i : \mathbf{x} \in P(f)\right\}, \quad \text{където } P(f) \text{ е полиматроид.} \tag{5}$$

Като използваме спецификата на задача (5) ($P(f)$ е полиматроид), ще покажем, че задача (5) може да бъде решена с помощта на следния алгоритъм, известен в литературата като *greedy* алгоритъм:

1. Подреждаме координатите на вектора $\mathbf{c} = (c_1, \dots, c_n)$ по намаляване: $c_{\pi_1} \ge \dots \ge c_{\pi_k} \ge 0 \ge c_{\pi_{k+1}} \ge \dots \ge c_{\pi_n}$. Нека $\pi = (\pi_1, \dots, \pi_n)$ е получената пермутация на елементите $1, \dots, n$.

2. Построяваме план $\mathbf{x}$ по формулите (4) с помощта на пермутацията π и числото k.

Ще покажем, че построеният план $\mathbf{x}$ е оптимално решение на задача (5). Двойнствената задача на задача (5) е задачата

$$\min \sum_{\omega \subset S} f(\omega) y_\omega,$$

$$y_\omega \geq 0 \text{ за всяко } \omega \subset S,$$
$$\sum_{\substack{\omega\subset S\\ i\in\omega}} y_\omega \geq c_i,\ i = 1,\ldots,n.$$

За вектора $\mathbf{x}$ е в сила (4). Определяме вектор $\mathbf{y}$ с координати $y_{\omega_\pi^s} = c_{\pi_s} - c_{\pi_{s+1}}$ за $s = 1,\ldots,k-1$, $y_{\omega_\pi^k} = c_{\pi_k}$, $y_\omega = 0$ за $\omega \neq \omega_\pi^s$, $s = 1,\ldots,k$. Непосредствено се проверява, че $\sum\limits_{\omega\subset S} f(\omega)y_\omega = \sum\limits_i c_i x_i$. Съгласно теоремите за двойнственост в линейното оптимиране $\mathbf{x}$ е оптимално решение на задача (5), а $\mathbf{y}$ — на нейната двойнствена.

Пример 6. Да се реши задачата:

$$\max\{3x_1 - x_2 + 5x_3 : x_1 + x_2 + x_3 \leq 12,\ 0 \leq x_1 \leq 5,\ 0 \leq x_2 \leq 6,\ 0 \leq x_3 \leq 8\}.$$

Решение. Лесно се проверява, че множеството

$$P(f) = \left\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3_+ : x_1 + x_2 + x_3 \leq 12,\ x_1 \leq 5,\ x_2 \leq 6,\ x_3 \leq 8\right\}$$

е полиматроид, зададен с помощта на субмодулярната функция f, определена по следния начин: $f(\emptyset) = 0$, $f(1) = 5$, $f(2) = 6$, $f(3) = 8$, $f(1,2) = 11$, $f(1,3) = 12$, $f(2,3) = 12$, $f(1,2,3) = 12$.

Пермутацията $\pi = (3,1,2)$ нарежда координатите на вектора $(3,-1,5)$ по намаляване, а числото k е равно на 2. Следователно, прилагайки формулите (4), получаваме вектор $(4,0,8)$, който е оптимално решение на задачата.

От теорема 5 следва, че опорните планове на полиматроида $P(f)$ са целочислени (т. е. координатите им са цели числа), когато функцията f приема целочислени стойности.

Теорема 6. Ако $P_1(f_1)$ и $P_2(f_2)$ са полиматроиди, зададени с помощта на целочислени субмодулярни функции f_1 и f_2, то многостенът $P = P_1(f_1) \cap P_2(f_2)$ е целочислен (т. е. неговите опорни планове са целочислени вектори).

Теорема 7. Нека c_j, $j = 1,\ldots,n$, са цели числа. Нека $f_1(\omega)$ и $f_2(\omega)$ са целочислени, ненамаляващи субмодулярни функции, удовлетворяващи условията $f_i(\emptyset) = 0$ и $f_i(\omega) \leq |\omega|$ за $i = 1,2$ и за всяко $\omega \subset S = \{1,\ldots,n\}$. Тогава за двойката двойнствени задачи на линейното оптимиране

$$\begin{array}{ll}
\max \sum\limits_{j=1}^{n} c_j x_j, & \min \sum\limits_{\omega\subset S} \left(f_1(\omega)y_1(\omega) + f_2(\omega)y_2(\omega)\right), \\
\sum\limits_{j\in\omega} x_j \leq f_1(\omega),\ \omega \in S, & \sum\limits_{\substack{\omega\subset S\\ j\in\omega}} \left(y_1(\omega) + y_2(\omega)\right) \geq c_j,\ j = 1,\ldots,n, \\
\sum x_j \leq f_2(\omega),\ \omega \in S, & \\
x_j \geq 0,\ j = 1,\ldots,n, & y_1(\omega) \geq 0,\ y_2(\omega) \geq 0,\ \omega \subset S,
\end{array}$$

съществуват целочислени оптимални решения $\mathbf{x}^*$ и $\mathbf{y}^* = (y_1^*, y_2^*)$ (т. е. $\langle \mathbf{c}, \mathbf{x} \rangle = (f_1 y_1^*) + (f_2 y_2^*)$). Теорема 7 усилва теорема 6, тъй като гарантира съществуването на целочислено оптимално решение и на двойнствената задача.

Теорема 8. Нека $P_1(f_1)$ и $P_2(f_2)$ са полиматроиди, за които функциите f_1 и f_2 удовлетворяват условията на теорема 7. Тогава

$$\max_{x \in P_1(f_1) \cap P_2(f_2)} \sum_{j=1}^{n} x_j = \min \{f_1(\omega) + f_2(S \setminus \omega)\}.$$

Теорема 8 обобщава известните двойнствени твърдения от комбинаторния анализ (един добър пример е теоремата на Кьонинг).

Нека $\mathbf{A}$ е матрица, чиито елементите са 0 или 1. *Линия* в матрицата $\mathbf{A}$ ще наричаме неин ред или стълб. Два елемента на матрицата $\mathbf{A}$ се наричат *неколинеарни*, ако те не лежат на една линия.

Теорема 9 (Кьонинг)**.** Максималният брой взаимно неколинеарни единици на матрицата $\mathbf{A} = \{a_{ij}\}$ с елементи 0 и 1 е равен на минималния брой линии, покриващи всички единици на матрицата $\mathbf{A}$.

Задачи

1. Да се докаже теорема 5.

2. Като се използва теорема 7, да се докаже теорема 8.

3. Да се докаже теорема 9.

4. Да се докаже, че множеството

$$M = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}_+^n : \sum_{i=1}^{n} x_i \le a,\ 0 \le x_i \le a_i,\ i = 1, \dots, n \right\}$$

е полиматроид.

5. Нека $A_i \subset S = \{1, \dots, n\}$, $i = 1, \dots, s$, са множества, удовлетворяващи условията $A_{i_1} \cap A_{i_2} = \emptyset$ за всеки $i_1 \ne i_2$ и $\bigcup\limits_{i=1}^{s} A_i = S$. Да се докаже, че множеството $M = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}_+^n : \sum\limits_{j=1}^{n} x_j \le a,\ \sum\limits_{j \in A_i} x_j \le a_i,\ i = 1, \dots, s \right\}$ е полиматроид.

6. Нека $P(f)$ е полиматроид, за който f е целочислена и $f(\omega) \le |\omega|$ за всяко $\omega \subset S = \{1, \dots, n\}$. Да се докаже, че опорните планове на $P(f)$ са вектори с координати 0 или 1.

7. Да се докаже, че множеството

$$M = \left\{ x_{ij} : \sum_{i=1}^{m} x_{ij} \le b_j,\ \sum_{j=1}^{n} x_{ij} \le a_i,\ \sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j, i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n \right\}$$

е сечение на два полиматроида.

8. Нека $a_1 > \cdots > a_n > 0$. Да се докаже, че множеството

$$M = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n_+] : \sum_{i \in \omega} x_i \le \sum_{i=1}^{|\omega|} a_i,\ \omega \subset S = \{1, \ldots, n\} \right\}$$

е полиматроид.

Отговори и решения

§ 1. Класическа транспортна задача

1. *Достатъчност.* Нека съществуват (I_1, J_1) такива, че $\sum\limits_{i\in I_1} a_i = \sum\limits_{j\in J_1} b_j$. Тъй като $\sum\limits_{i\in I} a_i = \sum\limits_{j\in J} b_j$, $I = \{1,\ldots,n\}$, $J = \{1,\ldots,m\}$, то $\sum\limits_{i\in I\setminus I_1} a_i = \sum\limits_{j\in J\setminus J_1} b_i$. Разглеждаме следните транспортни ограничения T_1 и T_2:

$$T_1 = \left\{(x_{ij})_{j\in J_1}^{i\in I_1} : \sum_{i\in I_1} x_{ij} = b_j,\ j\in J_1, \sum_{j\in J_1} x_{ij} = a_i,\ i\in I_1,\ x_{ij} > 0\right\},$$

$$T_2 = \left\{(x_{ij})_{j\in J\setminus J_1}^{i\in I\setminus I_1} : \sum_{i\in I\setminus I_1} x_{ij} = b_j,\ j\in J\setminus J_1, \sum_{j\in J\setminus J_1} x_{ij} = a_i,\ i\in I\setminus I_1, x_{ij} > 0\right\}.$$

Ако $\mathbf{x}^1$ и $\mathbf{x}^2$ са опорни планове на T_1 и T_2, то по очевиден начин се конструира план $\mathbf{x}$, удовлетворяващ ограниченията $\sum\limits_{j\in J} x_{ij} = a_i$, $\sum\limits_{i\in I} x_{ij} = b_j$, който е опорен и има най-много $m+n-2$ ненулеви променливи.

Необходимост. Нека $\mathbf{x}$ е опорен план, който е изроден, т. е. съществува базисна променлива, която е равна на нула. Всеки опорен план чрез подходяща пермутация на векторите $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ може да се построи по метода на северозападния ъгъл. Тъй като на определена стъпка (когато определяме нулевата базисна променлива) коригираните a_i и b_j са равни на нула, от това непосредствено следва, че съществуват множества от индекси S и T, за които $\sum\limits_{i\in T} a_i = \sum\limits_{j\in S} b_j$.

2. Тъй като задачата е изродена, то съществуват двойки множества от индекси (I_i, J_i), $i = 1,\ldots,s$, такива, че $\sum\limits_{j\in I_i} a_j = \sum\limits_{j\in J_i} b_j$, $i = 1,\ldots,s$. Ще покажем, че съществува ε_0 такова, че за всяко $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ и за всяка двойка множества (I, J)

$$\sum_{j\in I} a_j(\varepsilon) \neq \sum_{j\in J} b_j(\varepsilon). \tag{6}$$

За всяка двойка (I_i, J_i) очевидно

$$\sum_{j\in I_i} a_j(\varepsilon) = \sum_{j\in I_i} a_j + |I_i|\varepsilon \neq \sum_{j\in J_i} b_j(\varepsilon) = \begin{cases} \sum\limits_{j\in J_i} b_j, & m\notin J_i,\\ \sum\limits_{j\in J_i} b_j + m\varepsilon, & m\in J_i,\end{cases}$$

тъй като $|I_i| < m$ за всяко $\varepsilon > 0$. Нека (I, J) е произволна двойка, различна от (I_i, J_i), $i = 1, \ldots, s$. Възможни са два случая: $m \in J$ и $m \notin J$. Ако $m \notin J$, то тъй като $\sum\limits_{j\in I} a_j \neq \sum\limits_{j\in J} b_j$, ако $\sum\limits_{j\in I} a_j \geq \sum\limits_{j\in J} b_j$, то достатъчно е $\varepsilon > 0$, за да бъде изпълнено (6). Ако $m \in J$, тъй като $\sum\limits_{j\in I} a_j \neq \sum\limits_{j\in J} b_j$, са възможни два случая: а) $\sum\limits_{j\in I} a_j < \sum\limits_{j\in J} b_j$. За да бъде изпълнено (6), е достатъчно $\varepsilon \geq 0$; б) $\sum\limits_{j\in I} a_j > \sum\limits_{j\in J} b_j$. За да бъде изпълнено (6), достатъчно е $\varepsilon < \dfrac{1}{m-|I|}\left(\sum\limits_{j\in I} a_j - \sum\limits_{j\in J} b_j\right)$ за тези I, за които $|I| < m$. Нека $\delta_1 = \min \dfrac{1}{|I|}\left(\sum\limits_{j\in I} a_j - \sum\limits_{j\in J} b_j\right)$ по тези двойки (I, J), за които $\sum\limits_{j\in J} b_j - \sum\limits_{j\in I} a_j > 0$ и $m \notin J$. Нека $\delta_2 = \min \dfrac{1}{m-|I|}\left(\sum\limits_{j\in I} a_j - \sum\limits_{j\in J} b_j\right)$ по тези двойки (I, J), за които $m \in J$, $|I| < m$ и $\sum\limits_{j\in I} a_j - \sum\limits_{j\in J} b_j > 0$. Тогава за всяко $\varepsilon < \delta = \min(\delta_1, \delta_2)$ е изпълнено (6).

3. Решението следва непосредствено от решението на задача 2 и условието за целочисленост (от него следва, че ако $\sum\limits_{j\in J} b_j - \sum\limits_{j\in I} a_j > 0$, то $\sum\limits_{j\in J} b_j - \sum\limits_{j\in I} a_j \geq 1$).

4. Тъй като задачата е изродена, то съществува двойка множества от индекси (I, J) такава, че $\sum\limits_{j\in J} b_j = \sum\limits_{j\in I} a_j$. Ако $|I| \geq 2$ и $|J| \geq 2$, очевидно задачата има повече от един изроден план. Следователно поне за едно от множествата I или J имаме $|I| = 1$ или $|J| = 1$. Без да нарушаваме общността, можем да предположим, че $|J| = 1$. Следователно съществува индекс t_1: $b_{t_1} = \sum\limits_{j\in I} a_j$. Ако допуснем, че $|I| < m - 1$, стигаме до противоречие с единствеността на изродения план. Следователно съществува индекс s_1 такъв, че $a_{s_1} + b_{t_1} = \sum\limits_{j=1}^{m} a_j$. Ако допуснем, че съществува друга двойка индекси (s_2, t_2), за които $a_{s_2} + b_{t_2} = \sum\limits_{j=1}^{m} a_j$, то стигаме до противоречие с единствеността.

5. *Необходимост*. Проверява се непосредствено.

Достатъчност. Ще докажем твърдението по индукция спрямо m и n. За това е достатъчно да разгледаме двойките (m, n), $m \leq n$, от цели положителни числа, наредени линейно с помощта на наредбата $\prec$, която се дефинира по следния начин: $(m_1, n_1) \prec (m_2, n_2)$, ако $n_1 < n_2$ или ако $n_1 = n_2$ и $m_1 \leq m_2$. За $(1, 1)$ твърдението е вярно. Да допуснем, че твърдението е вярно за всички двойки $(m,n) < (m_0,n_0)$. Ще покажем, че то е вярно и за двойката (m_0,n_0). От условието

$$\sum_{i=1}^{m_0} \min\left(a_i, \sum_{j\in J} d_{ij}\right) \geq \sum_{j\in J} b_j, \qquad J \subset \{1,\dots,n_0\},$$

при $J = \{1\}$ следва, че $\sum_{i=1}^{m_0} \min(a_i, d_{i1}) \geq b_1$. Нека i_0 е индексът, за който $\sum_{i=1}^{i_0-1} c_i < b_1$ и $\sum_{i=1}^{i_0} c_i \geq b_1$. Очевидно $i_0 \leq m_0$. Да разгледаме множеството $M(\overline{\mathbf{a}}, \overline{\mathbf{b}}, \overline{\mathbf{D}})$ с размерност $m_0 \times n_0 - 1$, параметрите на което са: $\overline{a}_i = a_i - c_i$, $i = 1,\dots,i_0-1$, $a_{i_0} = a_{i_0} - \left(b_1 - \sum_{i=1}^{i_0-1} c_i\right)$, $\overline{a}_i = a_i$, $i = i_0+1,\dots,m_0$, $\overline{b}_i = b_{i+1}$, $i = 1,\dots,n_0-1$, $\overline{D} = \{\overline{d}_{ij}\}$, $\overline{d}_{ij} = d_{ij+1}$, $i = 1,\dots,m_0$, $j = 1,\dots,n_0-1$. Лесно се проверява, че $\sum_{i=1}^{m_0} \min\left(\overline{a}_i, \sum_{j\in J} \overline{d}_{ij}\right) \geq \sum_{j\in J} \overline{b}_j$ за всяко $J \subset \{1,\dots,n_0-1\}$. От това по индуктивното предположение следва, че $M(\overline{\mathbf{a}}, \overline{\mathbf{b}}, \overline{\mathbf{D}}) \neq \emptyset$, т. е. съществува план $\overline{\mathbf{x}}$, удовлетворяващ ограниченията, които задават множеството $M(\overline{\mathbf{a}}, \overline{\mathbf{b}}, \overline{\mathbf{D}}) \neq \emptyset$. Непосредствено се вижда, че

$$\mathbf{x} = \left(\begin{array}{c|c} c_1 & \\ c_{i_0-1} & \\ b_1 - \sum_{i=1}^{i_0-1} c_i & \overline{\mathbf{x}} \\ 0 & \\ 0 & \\ 0 & \end{array}\right)$$

удовлетворяват ограниченията, задаващи множеството $M(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{D})$.

6. Допускаме, че съществува план $\mathbf{x}$, за който $x_{lt} < \min\{a_l, b_t\}$. От условията $c_{it} - c_{lt} > \max\limits_{j\neq t}(c_{ij} - c_{lj})$ непосредствено следва, че съществува небазисна променлива $x_{i_0 j_0} = 0$, за която $\Delta_{i_0 j_0} < 0$. Противоречие.

7. *Упътване*. Нека $\mathbf{x}^G$ и $\mathbf{x}^*$ са съответно решението, намерено по метода на минималния елемент, и решението на задачата. Нека $c_1 \geq \cdots \geq c_{nm} \geq 0$. С помощта на тъждеството $\sum_{i=1}^{nm} c_i x_i = \sum_{i=1}^{nm} (c_i - c_{i+1}) \left(\sum_{j=1}^{i} x_j\right)$, $c_{nm+1} = 0$, покажете, че

$$\frac{\sum\limits_{i=1}^{mn} c_i x_i^G}{\sum\limits_{i=1}^{mn} c_i x_i^*} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{nm}(c_i - c_{i+1})\left(\sum\limits_{j=1}^{i} x_j^G\right)}{\sum\limits_{i=1}^{nm}(c_i - c_{i+1})\left(\sum\limits_{j=1}^{i} x_j^*\right)} \geq \min \frac{\sum\limits_{j=1}^{i} x_j^G}{\sum\limits_{j=1}^{i} x_j^*} \geq \frac{1}{2}.$$

8. Тъй като векторите **a** и **b** са целочислени, то началният опорен план, построен по един от методите, изложени в § 1, е целочислен. От теорема 2 следва, че преминаването от целочислен опорен план към следващ води отново до целочислен опорен план. Тъй като това е вярно за всяка линейна целева функция, то всички опорни планове са целочислени.

9. *Необходимост*. Очевидна.

Достатъчност. Нека $x_{ij} = \dfrac{a_i b_j}{s}$, където $s = a_1 + \cdots + a_m = b_1 + \cdots + b_n$. Непосредствено се проверява, че $\sum\limits_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i$, $i = 1, \ldots, m$, и $\sum\limits_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j$, $j = 1, \ldots, n$. Следва, че задача (1) има решение (вземаме под внимание още, че транспортният многостен е ограничен).

10. На клетките от цикъла алтернативно присвояваме $+$ и $-$. От определението на цикъл и това, че всеки стълб съдържа точно два ненулеви елемента, които са единици, следва, че сумата на векторите, умножени съответно с $+1$ и -1, е равна на нула.

11. Вж. зад. 10.

12. Да допуснем, че за някоя празна клетка съществуват поне два цикъла, от тях може да се построи цикъл, съдържащ само базисни клетки, което противоречи на това, че планът е опорен.

16. Ако $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = (u_1, \ldots, u_m, v_1, \ldots, v_n)$ е решение на системата $v_j - u_i \leq c_{ij}$, $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$, очевидно и $(\mathbf{u} + c, \mathbf{v} + c) = (u_1 + c, \ldots, u_m + c, v_1 + c, \ldots, v_n + c)$ също е решение на системата.

17. Да означим i-тия ред на $\mathbf{A}$ с $\mathbf{a}_{i*} = (a_{i1}, \ldots, a_{in})$, $i = 1, \ldots, m$. От условията на задачата следва, че съществуват числа λ_i, $i = 1, \ldots, m$ (поне едно различно от нула) такива, че $\sum\limits_{i=1}^{m} \lambda_i \mathbf{a}_{i*} = \mathbf{0}$, $\sum\limits_{i=1}^{m} \lambda_i b_i = 0$. Ще покажем, че $\lambda_i \neq 0$ за всяко $i = 1, \ldots, m$. Да допуснем например, че $\lambda_1 = 0$. Тогава (от $\sum\limits_{i=2}^{m} \lambda_i \mathbf{a}_{i*} = \mathbf{0}$, $\sum\limits_{i=2}^{m} \lambda_i b_i = 0$, $\sum\limits_{i=2}^{m} |\lambda_i| \neq 0$) следва, че съществува линейна зависимост между ограниченията с номера от 2 до m и следователно рангът на редуцираната система (без първото ограничение) е $\le m-2$. Но първото ограничение (по условие) е линейна комбинация на останалите и следователно след прибавянето му към тях рангът на новата система (това отново е изходната) ще остане същият, което противоречи на това, че той е равен на $m-1$. Следователно $\lambda_1 \neq 0$. Да означим с $\overline{\mathbf{A}}$ матрицата с редове $\overline{\mathbf{a}}_{i*} = \lambda_i \mathbf{a}_{i*}$ и с $\overline{\mathbf{b}}$ вектора с компоненти $\lambda_i b_i$, $i = 1, \dots, m$. Системата $\overline{\mathbf{A}}\mathbf{x} = \overline{\mathbf{b}}$ е еквивалентна на изходната (получена е от нея чрез умножаване на редовете ѝ с числа, различни от нула). Изходната задача записваме в еквивалентната ѝ форма $\max\{\langle \mathbf{c}, \mathbf{x}\rangle : \overline{\mathbf{A}}\mathbf{x} = \overline{\mathbf{b}}, \mathbf{x} \ge \mathbf{0}\}$. В тази задача сумата от елементите на всеки стълб на $\overline{\mathbf{A}}$ е равна на нула. Нейната двойствена задача е $\min\left\{\left\langle \overline{\mathbf{b}}, \mathbf{y}\right\rangle : \overline{\mathbf{A}}^{\mathrm{T}}\mathbf{y} \ge \mathbf{c}\right\}$. Ако $\mathbf{y}^* = (y_1^*, \dots, y_m^*)$ е решение на тази задача, векторът $\mathbf{y}(a) = (y_1^* + a, \dots, y_m^* + a)$ удовлетворява системата $\overline{\mathbf{A}}^{\mathrm{T}}\mathbf{y} \ge \mathbf{c}$ (коефициентът в кое да е от ограниченията пред $\mathbf{a}$ е равен на нула), $\left\langle \overline{\mathbf{b}}, \mathbf{y}(a)\right\rangle = \left\langle \overline{\mathbf{b}}, \mathbf{y}^*\right\rangle$ (по същата причина) и следователно също е решение.

18. Нека от дадената задача е получена нова чрез прибавяне на константа k към s-тия ред (съответно r-тия стълб) на матрицата $\mathbf{C} = (c_{ij})_{m\times n}$. Разликата между транспортните разходи за даден план $\mathbf{x} = (x_{ij})$ на изходната и получената задача не зависи от плана $\mathbf{x}$ — тя е равна на ka_s (съответно kb_r).

19. Нека $\mathbf{x} = (x_{ij})$ е план на задачата. Имаме

$$\begin{aligned}\sum_i \sum_j c_{ij}x_{ij} &= \sum_i \sum_j (j + (i-1)n)x_{ij} = \sum_j j \sum_i x_{ij} + \sum_i (i-1)n \sum_j x_{ij} \\ &= \sum_j jb_j + n\sum_i (i-1)a_i,\end{aligned}$$

т. е. транспортните разходи не зависят от плана $\mathbf{x} = (x_{ij})$.

20.1. $\mathbf{x}^* = \begin{pmatrix} 0 & 20 & 5 \\ 0 & 20 & 0 \\ 20 & 0 & 10 \end{pmatrix}$ (единствен), $l^* = 300$.

20.2. $\mathbf{x}^* = \begin{pmatrix} 15 & 75 & 90 & 0 \\ 45 & 0 & 0 & 45 \\ 0 & 0 & 30 & 0 \end{pmatrix}$ (не е единствен), $l^* = 615$.

20.3. $\mathbf{x}^* = \begin{pmatrix} 10 & 10 & 10 \\ 0 & 40 & 0 \\ 10 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ (не е единствен), $l^* = 180$.

20.4. $\mathbf{x}^* = \begin{pmatrix} 25 & 0 & 0 \\ 5 & 15 & 0 \\ 0 & 15 & 0 \\ 30 & 0 & 10 \end{pmatrix}$ (единствен), $l^* = 190$.

20.5. $\mathbf{x}^* = \begin{pmatrix} 10 & 25 & 0 \\ 0 & 0 & 55 \\ 20 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ (не е единствен), $l^* = 300$.

20.6. $\mathbf{x}^* = \begin{pmatrix} 40 & 20 & 50 \\ 70 & 0 & 0 \\ 0 & 40 & 0 \end{pmatrix}$ (не е единствен), $l^* = 500$.

20.7. $\mathbf{x}^* = \begin{pmatrix} 5 & 25 & 0 \\ 0 & 20 & 25 \\ 20 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ (не е единствен), $l^* = 520$.

20.8. $\mathbf{x}^* = \begin{pmatrix} 80 & 0 & 20 & 0 \\ 0 & 0 & 90 & 0 \\ 0 & 110 & 10 & 30 \end{pmatrix}$ (единствен), $l^* = 980$.

20.9. $\mathbf{x}^* = \begin{pmatrix} 15 & 20 & 0 & 15 \\ 0 & 0 & 40 & 10 \\ 15 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ (единствен), $l^* = 255$.

20.10. $\mathbf{x}^* = \begin{pmatrix} 75 & 15 & 45 \\ 0 & 0 & 90 \\ 0 & 45 & 0 \end{pmatrix}$ (не е единствен), $l^* = 780$.

21.1. **а)** $\mathbf{x}^* = \begin{pmatrix} 50 & 0 & 40 \\ 0 & 10 & 50 \\ 0 & 30 & 0 \end{pmatrix}$; **б)** $\mathbf{x}^{**} = \begin{pmatrix} 30 & 0 & 60 \\ 20 & 10 & 30 \\ 0 & 30 & 0 \end{pmatrix}$, $l^* = 520$.

21.2. **а)** $\mathbf{x}^* = \begin{pmatrix} 40 & 40 & 0 \\ 0 & 20 & 0 \\ 0 & 40 & 20 \end{pmatrix}$; **б)** $\mathbf{x}^{**} = \begin{pmatrix} 30 & 50 & 0 \\ 5 & 15 & 0 \\ 5 & 35 & 20 \end{pmatrix}$, $l^* = 360$.

22. **а)** $4 \le \alpha \le 6$, $\beta = 5$. **б)** За никои стойности на α и β решението не е единствено; **в)** При $\beta = 2$, $\alpha = 4$

$$\mathbf{x}^1 = \begin{pmatrix} 30 & 10 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 20 & 0 \\ 0 & 30 & 40 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}^2 = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 30 & 10 \\ 20 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 40 & 30 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}^3 = \begin{pmatrix} 30 & 0 & 20 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 10 \\ 0 & 40 & 30 & 0 \end{pmatrix};$$

при $\beta = 2$, $\alpha = 6$ оптимални опорни планове, съседни на $\mathbf{x}^*$, са $\mathbf{x}^1$, $\mathbf{x}^2$ и $\mathbf{x}^4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 40 & 10 \\ 0 & 0 & 20 & 0 \\ 30 & 40 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; при $\beta = 2$, $4 < \alpha < 6$ — само $\mathbf{x}^1$ и $\mathbf{x}^2$.

23.1. **а)** $2 \le a \le 3$. **б)** $0 \le a \le 2$ или $a > 3$.

23.2. **а)** $4 \le a \le 7$. **б)** $a < 4$ или $7 < a \le 8$.

24. **а)** $\alpha \le -5$, $\beta \le -\alpha$, $\alpha(\mathbf{x}^*) = \alpha(\mathbf{y}^*) = 80(\alpha + \beta) + 60(\alpha + 1)$; **б)** $\mathbf{x}^*$ и $\mathbf{y}^*$ са съседни независимо от стойностите на α и β. Не са решения при $\alpha > -5$ или $\alpha < -\beta$. **в)** $\mathbf{z}^* = \begin{pmatrix} 20 & 25 & 30 & 25 \\ 0 & 0 & 50 & 0 \\ 0 & 35 & 0 & 35 \end{pmatrix}$.

§ 2. Линейни оптимизационни задачи върху полиматроиди

1. Вж. доказателството на това, че greedy-алгоритъмът дава решение на задача (5).

2. Нека $c_j = 1$, $j = 1, \dots, n$. Приложете теорема 7.

3. Намирането на максималния брой неколинеарни единици е еквивалентно на решаването на задачата

$$\max \left\{ \sum_i \sum_j a_{ij} x_{ij} : \sum_i x_{ij} \le 1; \sum_j x_{ij} \le 1; x_{ij} \in \{0, 1\} \right\},$$

а намирането на минималния брой линии, покриващи всички единици, е еквивалентно на решаването на задачата

$$\min\left\{\sum_i u_i + \sum_j v_j : u_i + v_j \geq a_{ij}; u_i \in \{0,1\}, v_j \in \{0,1\}\right\}.$$

Приложете теореми 7 и 8.

4. Нека $f : 2^I \to \mathbb{R}_+$ се дефинира по следния начин:

$$f(\omega) = \min\left(a, \sum_{i\in\omega} a_i\right)$$

за всяко ω. Лесно се проверява, че така дефинираната функция е субмодулярна и ненамаляваща. Очевидно е, че $M(f) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n_+ : \sum x_i \leq f(\omega)$ за всяко $\omega\} = M$.

5. Нека $f : 2^I \to \mathbb{R}_+$ се дефинира по следния начин: $f(\emptyset) = 0$, $f(\omega) = \min\left(a, \min\limits_{i:\omega\cap A_i\neq\emptyset} a_i\right)$. Покажете, че f е субмодулярна и ненамаляваща. Покажете, че $M(f) = \left\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n_+ : \sum\limits_{i\in\omega} x_i \leq f(\omega) \text{ за всяко } \omega\right\} = M$.

6. Приложете теорема 5.

7. От задача 5 следва, че

$$M_1 = \left\{\{x_{ij}\} \in \mathbb{R}^{mn} : \sum_{j=1}^{n} x_{ij} \leq a_i,\ i = 1,\dots,m\right\}$$

и

$$M_2 = \left\{\{x_{ij}\} \in \mathbb{R}^{mn} : \sum_{i=1}^{m} x_{ij} \leq b_j,\ j = 1,\dots,n\right\}$$

са полиматроиди. Очевидно $M = M_1 \cap M_2$.

8. Нека $f : 2^I \to \mathbb{R}_+$ се дефинира по следния начин: $f(\emptyset) = 0$, $f(\omega) = \sum\limits_{i=1}^{|\omega|} a_i$ за всяко ω. Очевидно f е субмодулярна и ненамаляваща. По теорема 4 следва, че M е полиматроид.

Глава 5

Матрични игри

Матричните игри са игри на двама участници с противоположни интереси, всеки от които има краен брой възможности (стратегии). Условно единия от играчите ще наричаме първи, а другия — втори. Ако броят на стратегиите на първия играч в една матрична игра е n, а на втория — m, то при избора на i-тата стратегия, $1 \le i \le n$, от страна на първия играч и на j-тата стратегия, $1 \le j \le m$, от страна на втория, двойката стратегии (i, j) определя една *партия* в играта. Ако резултатът от партията за първия играч се изразява с числата a_{ij}, то на играта съответства матрицата

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} \;\dots\; a_{1j} \;\dots\; a_{1m} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{i1} \;\dots\; a_{ij} \;\dots\; a_{im} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1} \;\dots\; a_{nj} \;\dots\; a_{nm} \end{pmatrix} = (a_{ij})_{n\times m},$$

която обикновено се нарича *платежна матрица* на първия играч. Тъй като интересите на двамата играчи са противоположни, то платежната матрица на втория играч е $-A$. По-нататък се разглежда само платежната матрица на първия играч, която наричаме *платежна матрица на играта*. Матрична игра с платежна матрица A ще означаваме с $\Gamma(A)$.

§ 1. Примери за матрични игри

Пример 1. Всеки един от двамата играчи показва на другия един, два или три пръста и едновременно с това се опитва да познае колко пръста ще покаже противникът му. Ако само единият от играчите познае, той печели сума, равна на общия брой пръсти, показани от двамата. В останалите случаи резултатът от играта е нула и за двамата играчи. Да се състави платежна матрица на играта.

Решение. От описанието на играта се вижда, че всеки от играчите може да покаже 1, 2 или 3 пръста и в същото време да каже едното от числата 1, 2 или 3. Следователно всеки от тях има девет възможности, т. е. 9 стратегии, и в играта са възможни 81 различни партии. Ако всяка стратегия представим като наредена двойка числа, първото от които показва броя на показаните от играча пръсти, а второто — числото, което той обявява, то стратегиите на всеки от играчите ще бъдат $(1, 1)$, $(1, 2)$, $(1, 3)$, $(2, 1)$, $(2, 2)$, $(2, 3)$, $(3, 1)$, $(3, 2)$, $(3, 3)$.

Да предположим че единият от играчите (ще го наричаме първи) избере стратегия $(1, 1)$, а другият — стратегия $(2, 1)$. Тъй като само вторият играч познава броя на пръстите, показани от първия, то според правилата той печели сума, равна на общия брой показани пръсти, т. е. числото 3. Тогава резултатът от играта за първия играч ще бъде числото -3.

Така, като пресметнем резултата от играта за първия играч при всяка възможна партия (т. е. при всяка комбинация от стратегии на двамата играчи), ще получим следната платежна матрица за играта:

I играч \ II играч	(1, 1)	(1, 2)	(1, 3)	(2, 1)	(2, 2)	(2, 3)	(3, 1)	(3, 2)	(3, 3)
(1, 1)	0	2	2	−3	0	0	−4	0	0
(1, 2)	−2	0	0	0	3	3	−4	0	0
(1, 3)	−2	0	0	−3	0	0	0	4	4
(2, 1)	3	0	3	0	−4	0	0	−5	0
(2, 2)	0	−3	0	4	0	4	0	−5	0
(2, 3)	0	−3	0	0	−4	0	5	0	5
(3, 1)	4	4	0	0	0	−5	0	0	−6
(3, 2)	0	0	−4	5	5	0	0	0	−6
(3, 3)	0	0	−4	0	0	−5	6	6	0

Пример 2. Игра на полковник Блото.

Две армии воюват за два обекта. Първата армия, под командването на полковник Блото, се състои от 4 полка, а втората — от 3 полка. Армия, която изпрати повече полкове в един и същ обект, го заема, унищожава всички противникови полкове, намиращи се там, и получава по една точка за всеки завзет обект и за всеки унищожен противников полк. Ако двете армии изпратят еднакъв брой полкове в даден обект, всяка от тях получава нула точки. Целта на полковник Блото е така да разпредели своите полкове, че да спечели повече точки. Да се състави платежна матрица на играта.

Решение. Аналогично на предишната игра и тук всяка стратегия ще представим като наредена двойка числа, първото от които ще показва броя на полковете, изпратени в първия обект, а второто — броя на полковете, изпратени във втория обект. Тогава стратегиите на първата армия ще бъдат: $(4,0)$, $(0,4)$, $(3,1)$, $(1,3)$, $(2,2)$, а стратегиите на втората — $(3,0)$, $(0,3)$, $(2,1)$, $(1,2)$.

Като пресметнем резултата от играта за полковник Блото при всички възможни партии, ще получим следната платежна матрица:

II армия / I армия	$(3,0)$	$(0,3)$	$(2,1)$	$(1,2)$
$(4,0)$	4	0	2	1
$(0,4)$	0	4	1	2
$(3,1)$	1	-1	3	0
$(1,3)$	-1	1	0	3
$(2,2)$	-2	-2	2	2

Пример 3. Единият от двамата играчи избира едно от числата 1, 2, или 3. Другия играч се опитва да познае избраното число. При всяко предположение на втория играч първият отговаря `много`, `малко` или `правилно`. Играта продължава, докато вторият играч познае числото на първия. Резултатът от играта за първия играч е броят на предположенията, който е необходим на втория играч, за да получи отговор `правилно`. Да се състави платежна матрица на играта.

Решение. В тази игра са очевидни стратегиите на първия играч. Те са три. Не толкова очевидни са стратегиите на втория играч. За яснота всяка от тях ще представим с тройка числа, първото от които показва неговото първо предположение, второто — предположението му, след като първият му е отговорил `много`, а третото — предположението му след отговора `малко`. Тогава вторият играч има следните пет стратегии: $(1;0,2)$, $(1;0,3)$, $(2;1,3)$, $(3;1,0)$, $(3;2,0)$. (Тук нулата означава, че съответният отговор на първия играч е невъзможен.) Следователно в играта са възможни 15 различни партии.

Като пресметнем резултатите от играта на първия играч, ще получим следната платежна матрица:

II играч / I играч	$(1;0,2)$	$(1;0,3)$	$(2;1,3)$	$(3;1,0)$	$(3;2,0)$
(1)	1	1	2	2	3
(2)	2	3	1	3	2
(3)	3	2	2	1	1

Задачи

1. Да се построят платежните матрици на следните игри:

1.1. Двама играчи A и B едновременно и независимо един от друг записват едно от трите числа 1, 2, 3. Ако сумата от записаните числа е четна, играчът B заплаща тази сума на играча A, а ако сумата е нечетна, играчът A я заплаща на B.

1.2. Двама играчи имат по 2 лв. и един предмет с цена c ($c > 0$). Всеки играч прави заявка в запечатан плик, предлагайки k лева (k е едно от числата 0, 1, 2) за предмета. Този, който предложи по-голяма цена, получава предмета и заплаща на другия цената, която сам е предложил. Ако двамата играчи предлагат една и съща цена, предметът остава и те не заплащат нищо.

1.3. Играят двама играчи. Всеки от тях записва едно от числата 0, 1 или 2, пазейки в тайна избраното число от противника си. Първият играч, знаейки числото си, се опитва да познае сумата на двете числа. Същото прави вторият играч, но той няма право да нарече сумата, която е обявил вече първият играч. Ако само единият от играчите познае, получава 1 точка, в противен случай и двамата получават 0 точки.

1.4. Двама играчи трябва да изберат по едно от целите числа между 1 и 9. Ако числото, избрано от единия играч, е с единица по-голямо от числото, избрано от другия играч, то този от тях, чието число е по-малко, губи 2 точки. Ако изборът на единия от играчите е по-голям, макар и с 2 единици, той печели 1 точка. В случая, когато избраните числа са равни, никой не печели точка.

1.5. Две страни воюват за един обект. Първата страна го напада, а втората го отбранява. Първата разполага с 2 бомбардировача, а втората — с 4 оръдия. За да може първата страна да унищожи обекта, достатъчно е един от бомбардировачите ѝ да си пробие път към него. Бомбардировачите могат да се приближават към обекта от четири посоки. Всяко от оръдията на втората страна може да бъде насочвано в коя да е от четирите посоки, като при това то може да обстрелва само пространството на посоката, в която е насочено (не и съседните му пространства). Освен това всяко оръдие може да обстрелва само един бомбардировач, като го поразява с вероятност 1. Първата страна не знае как са разположени оръдията, а втората — от коя посока ще дойдат бомбардировачите. Печалбата на първата страна е вероятността да унищожи обекта.

§ 2. Седлови точки

Нека е дадена матричната игра $\Gamma(\mathbf{A})$.

Двойката стратегии (i_0, j_0) се нарича *седлова точка* на играта, ако за всяка стратегия i на първия играч и всяка стратегия j на втория играч са изпълнени неравенствата $a_{ij_0} \le a_{i_0j_0} \le a_{i_0j}$. Тези неравенства означават, че елементът $a_{i_0j_0}$ на матрицата $\mathbf{A}$ е едновременно минимален в реда си и максимален в стълба си. Стратегиите i_0 и j_0 се наричат *оптимални* за първия и съответно за втория играч, а числото $a_{i_0j_0}$ — *цена на играта*.

Да проверим дали играта с платежна матрица

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -4 & 5 \\ 2 & -1 & -2 & 6 \\ 3 & 0 & -3 & 6 \end{pmatrix}$$

има седлова точка. Минималните елементи по редове са числата -4, -2, -3. Записваме ги вдясно от матрицата и отбелязваме със звездичка най-голямото от тях, в случая -2. Максималните елементи по стълбове са числата 3, 2, -2, 6. Записваме ги под самите стълбове и означаваме със звездичка най-малкото от тях, в случая -2. По такъв начин получаваме

$$\widetilde{\mathbf{A}} = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 0 & 2 & -4 & 5 \\ 2 & -1 & -2 & 6 \\ 3 & 0 & -3 & 6 \end{pmatrix} \begin{array}{l} -4 \\ -2^* \\ -3 \end{array} \\ \begin{array}{cccc} 3 & 2 & -2^* & 6 \end{array} \end{array}$$

Двете числа, означени със звездички, са равни, следователно двойката $(2, 3)$ е седлова точка за разглежданата игра, а числото -2 е цената на играта, т. е. оптимална стратегия за първия играч е вторият ред, а за втория играч — третият стълб. Като избере втория ред, първият играч може да разчита, че ще спечели не по-малко от -2 (т. е. ще загуби най-много 2). Като избира третия стълб, вторият играч си осигурява загуба най-много -2 (т. е. печалба най-много 2).

Докажете следното свойство: ако (i_0, j_0) и (i_1, j_1) са две различни седлови точки на една и съща матрична игра, то и двойките (i_0, j_1) и (i_1, j_0) са също седлови точки на тази игра.

Задачи

1. Намерете всички седлови точки на матричните игри със следните платежни матрици:

1.1. $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 7 & -3 & 2 \\ 0 & 3 & -2 & 1 & 4 \\ 3 & 5 & 7 & 8 & 9 \\ -2 & 4 & -3 & 7 & -4 \end{pmatrix}$; **1.2.** $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 8 & 7 & 6 & 5 \\ 7 & 6 & 5 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$;

1.3. $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 1 & 7 & 4 \\ 4 & 7 & 4 \end{pmatrix}$; **1.4.** $A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 4 & 3 \\ 7 & 2 & 0 & -2 \\ 10 & -1 & -4 & 2 \end{pmatrix}$;

1.5. $A = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 5 & 4 & 9 \end{pmatrix}$; **1.6.** $A = \begin{pmatrix} 8 & 3 & 9 & 4 \\ 6 & 5 & 8 & 7 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$;

1.7. $A = \begin{pmatrix} 8 & 4 & 3 & 7 & 3 \\ 7 & 6 & 8 & 9 & 6 \\ 8 & 2 & 4 & 6 & 2 \\ 6 & 3 & 2 & 5 & 2 \end{pmatrix}$; **1.8.** $A = \begin{pmatrix} 8 & 6 & 4 & 7 & 7 \\ 5 & 4 & 3 & 4 & 6 \\ 4 & 3 & 2 & 3 & 4 \\ 7 & 2 & 2 & 5 & 9 \end{pmatrix}$.

§ 3. Смесени стратегии

Да разгледаме играта, известна под името „герб — стотинка“. Първият играч поставя на масата монета с герба или цифрата нагоре, но така, че вторият играч да не я вижда. Вторият играч се стреми да познае положението на монетата. В случай, че не познае, заплаща на първия играч 1 лв, а ако познае — получава от него 1 лв.

Платежната матрица на тази игра е

II играч / I играч	Герб	Стотинка
Герб	−1	1
Стотинка	1	−1

.

Лесно се вижда, че тя няма седлова точка. Това означава, че при еднократно провеждане на играта не може да се посочи рационално поведение за двамата играчи. Възможно е обаче да се определи такова при многократното ѝ повтаряне.

Нека играта „герб — стотинка“ е разигравана 10 пъти, при което първият играч е използвал първата си стратегия 3 пъти, а втората — 7 пъти, а вторият играч е използвал двете си стратегии по 5 пъти. Тогава честотите, с които играчите са избирали съответните си стратегии, са: I играч — $\frac{3}{10}$, $\frac{7}{10}$; II играч —

$\frac{5}{10}, \frac{5}{10}$. Математическото очакване за резултата от играта на първия играч ще бъде

$$D = \frac{3}{10}\left(-1 \cdot \frac{5}{10} + 1 \cdot \frac{5}{10}\right) + \frac{7}{10}\left(1 \cdot \frac{5}{10} - 1 \cdot \frac{5}{10}\right) = 0.$$

Възниква задачата как първият играч да подбере честотата, с която да използва отделните си стратегии, че математическото очакване на резултата от играта да бъде по възможност по-голямо за него. Аналогична задача може да се постави и за втория играч.

Тази идея е довела до разглеждане на следната съответна на матричната игра $\Gamma(\mathbf{A})$ матрична игра $\Gamma_c(\mathbf{A})$, в която стратегиите на първия играч са вероятностните разпределения $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $x_i \geq 0$, $i = 1, \ldots, n$, $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i = 1$, в множеството от допустими стратегии на първия играч в играта $\Gamma(\mathbf{A})$, а на втория играч — вероятностните разпределения $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_m)$, $y_j \geq 0$, $j = 1, \ldots, m$, $\sum\limits_{j=1}^{m} y_j = 1$, в множеството от допустими стратегии на втория играч в играта $\Gamma(\mathbf{A})$. Тогава математическото очакване за изхода от играта $\Gamma(\mathbf{A})$ за първия играч, ако двамата играчи се възприели „смесване“ на своите стратегии, определено от векторите $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$, е функцията

$$D(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} a_{ij} x_i y_j.$$

Поради това стратегиите $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ за играта $\Gamma_c(\mathbf{A})$ се наричат *смесени стратегии* за матричната игра $\Gamma(\mathbf{A})$.

За играта „герб-стотинка“ смесени стратегии за първия играч са всички вектори $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$, за които $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$, $x_1 + x_2 = 1$, а за втория — векторите $\mathbf{y} = (y_1, y_2)$, за които $y_1 \geq 0$, $y_2 \geq 0$, $y_1 + y_2 = 1$. Тогава резултатът от играта за първия играч (*платежната функция на играта*) в смесени стратегии е

$$D(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = x_1(-y_1 + y_2) + x_2(y_1 - y_2).$$

Следователно разглежданите по-горе вектори $\mathbf{x} = \left(\frac{3}{10}, \frac{7}{10}\right)$ и $\mathbf{y} = \left(\frac{5}{10}, \frac{5}{10}\right)$ са две смесени стратегии.

Стратегиите $\overline{\mathbf{x}}^1 = (1, 0)$, $\overline{\mathbf{x}}^2 = (0, 1)$ на първия играч и стратегиите $\overline{\mathbf{y}}^1 = (1, 0)$, $\overline{\mathbf{y}}^2 = (0, 1)$ на втория играч се наричат обикновено *чисти стратегии*.

Двойката смесени стратегии $\mathbf{x}^0$ и $\mathbf{y}^0$ на играта $\Gamma(\mathbf{A})$ се нарича *седлова точка в смесени стратегии*, ако за произволни допустими стратегии $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ са изпълнени неравенствата

$$D(\mathbf{x}, \mathbf{y}^0) \leq D(\mathbf{x}^0, \mathbf{y}^0) \leq D(\mathbf{x}^0, \mathbf{y}).$$

Необходимостта от разглеждането на играта при смесени стратегии се дава от следната фундаментална теорема в теорията на матричните игри:

Теорема 1. Всяка матрична игра има седлова точка в смесени стратегии.

Смесените стратегии, съответни на седловата точка, се наричат *оптимални смесени стратегии*.

Теорема 2. Ако за стратегиите $\mathbf{x}^* = (x_1^*, \dots, x_n^*)$, $\mathbf{y}^* = (y_1^*, \dots, y_m^*)$ и числото v при всички чисти стратегии $\overline{\mathbf{x}}^i$, $i = 1, \dots, n$, $\overline{y}^j$, $j = 1, \dots, m$, на двамата играчи са изпълнени неравенствата $D(\overline{\mathbf{x}}^i, \mathbf{y}^*) \le v \le D(\mathbf{x}^*, \overline{\mathbf{y}}^j)$, то двойката $(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*)$ е седловата точка в смесени стратегии, а числото v — цената на играта.

Следователно, за да установим дали двойката стратегии $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ е седлова точка, а числото v — цена на играта, достатъчно е да проверим дали се удовлетворяват неравенствата от теорема 2.

Ще илюстрираме това с примери. За играта с платежна матрица

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 3 \\ -2 & -2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

ще покажем, че векторите $\mathbf{x}^* = \left(\frac{4}{9}, \frac{4}{9}, 0, 0, \frac{1}{9}\right)$ и $\mathbf{y}^* = \left(\frac{1}{18}, \frac{1}{18}, \frac{4}{9}, \frac{4}{9}\right)$ са оптимални стратегии за първия и втория играч, а цената v е $\frac{14}{9}$. За целта достатъчно е да проверим неравенствата

$$(1) \qquad \sum_{j=1}^{m} a_{ij} y_j^* \le v, \ i = 1, \dots, n; \quad \sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_i^* \ge v, \ j = 1, \dots, m.$$

Като заместим елементите на матрицата $\mathbf{A}$ и векторите $\mathbf{x}^*$ и $\mathbf{y}^*$, получаваме

$$\sum_{j=1}^{4} a_{1j} y_j^* = 4 \cdot \frac{1}{18} + 0 \cdot \frac{1}{18} + 2 \cdot \frac{4}{9} + 1 \cdot \frac{4}{9} = \frac{14}{9};$$

$$\sum_{j=1}^{4} a_{2j} y_j^* = \frac{14}{9}; \qquad \sum_{j=1}^{4} a_{3j} y_j^* = \frac{12}{9} < \frac{14}{9};$$

$$\sum_{j=1}^{4} a_{4j} y_j^* = \frac{12}{9} < \frac{14}{9}; \qquad \sum_{j=1}^{4} a_{5j} y_j^* = \frac{14}{9};$$

$$\sum_{i=1}^{5} a_{i1}x_i^* = \frac{14}{9}; \qquad \sum_{i=1}^{5} a_{i2}x_i^* = \frac{14}{9};$$
$$\sum_{i=1}^{5} a_{i3}x_i^* = \frac{14}{9}; \qquad \sum_{i=1}^{5} a_{i4}x_i^* = \frac{14}{9}.$$

Тази проверка показва, че векторите $\mathbf{x}^*$ и $\mathbf{y}^*$ и числото $v = \frac{14}{9}$ удовлетворяват условията на теорема 2, следователно те са оптимални стратегии в играта, а цената ѝ е $\frac{14}{9}$.

От теорема 2 може да се направи следният съществен извод: всяко неотрицателно решение на системата, която се получава, като към неравенства (1) присъединим равенствата $\sum_{i=1}^{n} x_i = 1$, $\sum_{j=1}^{m} y_j = 1$, е решение на матричната игра. Така решаването на матричната игра $\Gamma(\mathbf{A})$ може да се сведе до решаването на следната система линейни неравенства и равенства:

$$\text{(2)} \qquad \begin{aligned} &\sum_{j=1}^{m} a_{ij}y_j \le v, \quad x_i \ge 0, \quad i = 1, \dots, n, \quad \sum_{i=1}^{n} x_i = 1, \\ &\sum_{i=1}^{n} a_{ij}x_i^* \ge v, \quad y_j \ge 0, \quad j = 1, \dots, m, \quad \sum_{j=1}^{m} y_j = 1. \end{aligned}$$

Ще използваме този извод, за да определим оптималните стратегии $\mathbf{y}^* = (y_1^*, y_2^*, y_3^*)$, $\mathbf{x}^* = (x_1^*, x_2^*, x_3^*)$ и цената v на матричната игра с платежна матрица

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Според току-що казаното за това е достатъчно да намерим едно неотрицателно решение на системата

$$\left| \begin{aligned} y_1^* - y_2^* - y_3^* &\le v \\ -y_1^* - y_2^* + 3y_3^* &\le v \\ -y_1^* + 2y_2^* - y_3^* &\le v \\ y_1^* + y_2^* + y_3^* &= 1 \end{aligned} \right. \qquad \left| \begin{aligned} x_1^* - x_2^* - x_3^* &\ge v \\ -x_1^* - x_2^* + 2x_3^* &\ge v \\ -x_1^* + 3x_2^* - x_3^* &\ge v \\ x_1^* + x_2^* + x_3^* &= 1. \end{aligned} \right.$$

Решението търсим, като последователно разглеждаме всички възможни системи, които се получават, когато се заменят знаците $\ge$ и $\le$ в шестте неравенства със знаците $>$ и $=$ и съответно $<$ и $=$. Да решим системата, когато всички неравенства са заменени с равенства. Получаваме: $x_1^* = \frac{6}{13}$, $x_2^* = \frac{3}{13}$, $x_3^* = \frac{4}{13}$, $y_1^* = \frac{6}{13}$, $y_2^* = \frac{4}{13}$, $y_3^* = \frac{3}{13}$, $v = -\frac{1}{13}$. Тъй като това решение удовлетворява условията за неотрицателност, векторите $\mathbf{x}^* = (\frac{6}{13}, \frac{4}{13}, \frac{3}{13})$, $\mathbf{y}^* = (\frac{6}{13}, \frac{3}{13}, \frac{4}{13})$ са оптимални стратегии, а числото $v = -\frac{1}{13}$ — цена на играта.

Нека е дадена матрична игра $\Gamma(\mathbf{A})$ с платежна матрица $\mathbf{A} = (a_{ij})_{n\times m}$ и цена $v_{\mathbf{A}}$. Да образуваме матрицата $\mathbf{B} = (b_{ij})_{n\times m}$, където $b_{ij} = ca_{ij} + d$, $c > 0$, и да разгледаме матричната игра $\Gamma(\mathbf{B})$ с цена $v_{\mathbf{B}}$. Тогава е вярна следната

Теорема 3. Оптималните смесени стратегии на играчите в играта $\Gamma(\mathbf{B})$ съвпадат с оптималните смесени стратегии на съответните играчи в $\Gamma(\mathbf{A})$, а цените на двете игри са свързани с равенството $v_{\mathbf{B}} = cv_{\mathbf{A}} + d$.

Като се използва тази теорема, могат да се изменят елементите на платежната матрица на дадена игра с цел по-лесно да се пресметне решението ѝ. В частност, ако матричната игра има отрицателни елементи, избирайки $c = 1$ и $d > |\min_{i,j} a_{ij}|$, можем да направим положителни всичките елементи на платежната ѝ матрица и така да осигурим положителна стойност на цената на преобразуваната игра.

Ще приложим теорема 3 към следния конкретен пример: да се определят оптималните стратегии $\mathbf{x}^* = (x_1^*, x_2^*)$, $\mathbf{y}^* = (y_1^*, y_2^*)$ и цената v на играта с платежна матрица

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1000 & 200 \\ 400 & 600 \end{pmatrix}.$$

Всеки елемент на тази матрица може да се раздели на 200 и след това от получените числа може да се извади 1. Така се получава матрицата

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Всъщност направено е следното преобразувание: $b_{ij} = 0{,}005a_{ij} - 1$. Решаваме играта $\Gamma(B)$ (чрез теорема 2). Получаваме решението $\mathbf{x}^* = \left(\frac{1}{5}, \frac{4}{5}\right)$, $\mathbf{y}^* = \left(\frac{2}{5}, \frac{3}{5}\right)$, $v = \frac{8}{5}$. Изходната игра $\Gamma(\mathbf{A})$ има за оптимални стратегии векторите $\mathbf{x}^* = \left(\frac{1}{5}, \frac{4}{5}\right)$, $\mathbf{y}^* = \left(\frac{2}{5}, \frac{3}{5}\right)$ и цена $v = \dfrac{v_B - d}{c} = 520$.

Ще казваме, че векторът $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_s)$ *доминира над* вектора $\boldsymbol{\beta} = (\beta_1, \dots, \beta_s)$ (или векторът $\boldsymbol{\beta}$ *се доминира* от вектора $\boldsymbol{\alpha}$), ако са изпълнени неравенствата $\alpha_i \geq \beta_i$, $i = 1, \dots, s$. В случай, че всички тези неравенства са строги, ще казваме, че доминирането е *строго*

Теорема 4. Нека в матричната игра $\Gamma(\mathbf{A})$ редът i_0 се доминира от някоя изпъкнала комбинация от редове на матрицата $\mathbf{A}$. С $\mathbf{A}'$ да означим матрицата, която се получава от матрицата **A** след зачертаване (изключване) на реда i_0. Тогава:

а) цената на играта $\Gamma(\mathbf{A}')$ съвпада с цената на играта $\Gamma(\mathbf{A})$;

б) всяка оптимална смесена стратегия на втория играч в играта $\Gamma(\mathbf{A}')$ е оптимална смесена стратегия за втория играч и в играта $\Gamma(\mathbf{A})$;

в) ако $\overline{\mathbf{x}}^* = (x_1^*, x_2^*, \ldots, x_{i_0-1}^*, x_{i_0+1}^*, \ldots, x_n^*)$ е оптимална смесена стратегия на първия играч в играта $\Gamma(\mathbf{A}')$, то разширеният вектор $\mathbf{x}^* = (x_1^*, x_2^*, \ldots, x_{i_0-1}^*, 0, x_{i_0+1}^*, \ldots, x_n^*)$ е оптимална смесена стратегия на първия играч в играта $\Gamma(\mathbf{A})$;

г) ако доминирането е строго, то за всяка оптимална смесена стратегия $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ на първия играч в играта $\Gamma(\mathbf{A})$ е изпълнено $x_{i_0} = 0$.

Аналогично теоремата може да се формулира за случая, когато стълбът j_0 в матричната игра $\Gamma(\mathbf{A})$ доминира над някоя изпъкнала комбинация от стълбове на матрицата **A**. В този случай се зачертава стълбът j_0.

Да илюстрираме практическото приложение на теорема 4.

Дадена е матричната игра $\Gamma(\mathbf{A})$ с платежна матрица

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1{,}5 & 4 \\ 0 & 2 & 5 & 3 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Изпъкналата комбинация на първия и втория стълб с множител $1/2$ се доминира строго от третия стълб. Действително

$$\frac{1}{2}\cdot 2 + \frac{1}{2}\cdot 0 = 1 < 1{,}5; \quad \frac{1}{2}\cdot 0 + \frac{1}{2}\cdot 2 = 1 < 5; \quad \frac{1}{2}\cdot 1 + \frac{1}{2}\cdot 4 = \frac{5}{2} < 3.$$

Следователно третият стълб може да бъде изключен, откъдето следва, че $y_3 = 0$ във всяка оптимална смесена стратегия на втория играч. Разглеждаме получената матрица

$$\mathbf{A}_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

и съответната ѝ игра $\Gamma(\mathbf{A}_1)$. В тази матрица третият стълб доминира строго над първия стълб и следователно може да бъде изключен. Получаваме матрицата

$$\mathbf{A}_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

и играта $\Gamma(\mathbf{A}_2)$. Тъй като вторият ред на $\mathbf{A}_2$ се доминира строго от третия ред, можем да го изключим. Така стигаме до матрицата

$$\mathbf{A}_3 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

и играта $\Gamma(\mathbf{A}_3)$.

Нека v_3 е цената, а $\widetilde{\mathbf{x}}^* = (x_1^*, x_2^*)$, $\widetilde{\mathbf{y}}^* = (y_1^*, y_2^*)$ са двойка оптимални стратегии на играта $\Gamma(\mathbf{A}_3)$. Тогава v_3 е цена и на игрите $\Gamma(\mathbf{A}_2)$, $\Gamma(\mathbf{A}_1)$, $\Gamma(\mathbf{A})$.

Сега чрез $\widetilde{\mathbf{x}}^*$ и $\widetilde{\mathbf{y}}^*$ да определим последователно оптималните смесени стратегии на игрите $\Gamma(\mathbf{A}_2)$, $\Gamma(\mathbf{A}_1)$, $\Gamma(\mathbf{A})$. Векторите $(x_1^*, 0, x_2^*)$, (y_1^*, y_2^*) ще бъдат оптимални смесени стратегии за играта $\Gamma(\mathbf{A}_2)$, тъй като матрицата $\mathbf{A}_3$ беше получена от $\mathbf{A}_2$ чрез зачертаване на втория ред. Аналогично $(x_1^*, 0, x_2^*)$, $(y_1^*, y_2^*, 0)$ ще бъде седлова точка в смесени стратегии на играта $\Gamma(\mathbf{A}_1)$. И накрая двойката смесени стратегии $(x_1^*, 0, x_2^*)$, $(y_1^*, y_2^*, 0, 0)$ ще образуват седлова точка за началната игра $\Gamma(\mathbf{A})$. Като решим играта $\Gamma(\mathbf{A}_3)$ (чрез теорема 2), получаваме $\widetilde{\mathbf{x}}^* = \left(\frac{3}{5}, \frac{2}{5}\right)$, $\widetilde{\mathbf{y}}^* = \left(\frac{4}{5}, \frac{1}{5}\right)$, $v_3 = \frac{8}{5}$. Тогава решение на $\Gamma(\mathbf{A})$ ще бъдат векторите $\mathbf{x}^* = \left(\frac{3}{5}, 0, \frac{2}{5}\right)$, $\mathbf{y}^* = \left(\frac{4}{5}, \frac{1}{5}, 0, 0\right)$, а цената ѝ — числото $v = \frac{8}{5}$.

Задачи

1. Покажете, че ако в матричната игра 2×2 първият играч има оптимална чиста стратегия, вторият играч също има оптимална чиста стратегия и обратно.

2. Да се покаже, че матричната игра с платежна матрица $\mathbf{A} = (a_{ij})_{n \times m}$, където $a_{ij} = i - j$, $i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, m$, има седлова точка.

3. Да се докаже, че всяка от двете матрични игри $\Gamma(\mathbf{A})$ и $\Gamma(\mathbf{B})$ с цени $v(\mathbf{A})$ и $v(\mathbf{B})$ и платежни матрици

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & z \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ z & 0 \end{pmatrix}$$

има седлова точка и че могат да се намерят такива стойности z_1 и z_2 на z, при които да са изпълнени неравенствата

$$v(\mathbf{A} + \mathbf{B}) < v(\mathbf{A}) + v(\mathbf{B}); \qquad v(\mathbf{A} + \mathbf{B}) > v(\mathbf{A}) + v(\mathbf{B}).$$

4. Проверете дали векторите $\mathbf{x} = \left(\frac{3}{4}, \frac{1}{4}\right)$, $\mathbf{y} = \left(0, 0, 0, \frac{3}{4}, 0, \frac{1}{4}\right)$ и числото $v = \frac{15}{4}$ са решение на играта с платежна матрица

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 10 & 8 & 6 & 4 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 4 & 3 & 12 & 6 \end{pmatrix}.$$

5. Проверете дали векторите $\mathbf{x} = \left(\frac{1}{4}, 0, \frac{1}{4}, \frac{2}{4}\right)$, $\mathbf{y} = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$ и числото $v = 4$ са решение на матричната игра с платежна матрица

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 14 & -4 & 2 \\ -4 & 8 & 8 \\ 4 & 4 & 4 \\ 2 & 8 & 2 \end{pmatrix}.$$

6. С помощта на теорема 2 решете матричните игри с платежни матрици:

6.1. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$;

6.2. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$;

6.3. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$;

6.4. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$;

6.5. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 \\ -2 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$;

6.6. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 4 \\ -1 & 4 & 4 \\ 2 & 2 & 6 \end{pmatrix}$.

7. С помощта на теоремите за доминиране да се намалят размерите на платежните матрици на следните матрични игри:

7.1. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 1 & 3 & 2 & 2 \\ 4 & 3 & 7 & -5 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 4 & -1 & 2 & 2 \\ 4 & 3 & 3 & -2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$;

7.2. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 7 & 14 & -2 \\ 5 & 3 & 4 & 2 & -3 \\ 7 & 6 & 9 & -4 & 2 \end{pmatrix}$;

7.3. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & 4 \\ 3 & -2 & 4 & 2 \end{pmatrix}$;

7.4. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 \\ 4 & 1 & 5 & -1 \\ 3 & -2 & 4 & -3 \\ 3 & -1 & 5 & 2 \end{pmatrix}$;

7.5. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 8 & 4 & 3 & 7 \\ 7 & 6 & 8 & 9 \\ 8 & 2 & 4 & 6 \\ 6 & 3 & 2 & 5 \end{pmatrix}$; **7.6.** $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 5 & -1 \\ 4 & 0 & 6 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 5 & 4 \end{pmatrix}$;

7.7. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 7 & 6 & 5 \\ 3 & 8 & 4 & 9 & 7 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 2 \\ 4 & 9 & 5 & 9 & 6 \end{pmatrix}$; **7.8.** $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 & 0 \\ 3 & 4 & 2 & 4 \\ 4 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 8 \end{pmatrix}$;

7.9. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

8. Нека платежната матрица на дадена матрична игра се разлага на четири подматрици $\mathbf{A}_1$, $\mathbf{A}_2$, $\mathbf{A}_3$, $\mathbf{A}_4$ по следния начин: $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_1 & \mathbf{A}_2 \\ \mathbf{A}_3 & \mathbf{A}_4 \end{pmatrix}$, където:

а) всеки стълб на матрицата $\mathbf{A}_2$ строго доминира някаква изпъкнала комбинация от стълбове на матрицата $\mathbf{A}_1$;

б) всеки ред на $\mathbf{A}_3$ се доминира строго от някаква изпъкнала комбинация на редове на $\mathbf{A}_1$.

Да се докаже, че всички решения на играта $\Gamma(\mathbf{A})$ се определят от решенията на играта $\Gamma(\mathbf{A}_1)$, т. е. че подматриците $\mathbf{A}_2$, $\mathbf{A}_3$, $\mathbf{A}_4$ могат да се зачертаят.

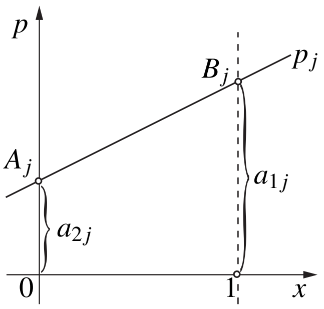
9. Като се използват зад. 8, теоремите за доминиране и теорема 2, да се реши матрична игра със следната платежна матрица:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & -3 & -3 & 5 & -3 \\ 1 & -3 & -2 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -4 & 1 \\ 3 & -2 & -1 & 6 & -2 \end{pmatrix}.$$

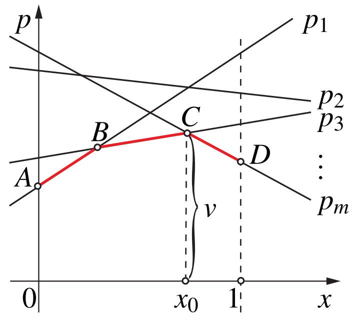
§ 4. Геометрично решаване на игри $2 \times m$ ($n \times 2$)

Нека е дадена матричната игра с платежна матрица

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \end{pmatrix}$$



Фиг. 6



Фиг. 7

и нека $(x, 1-x)$ е произволна смесена стратегия на първия играч ($0 \le x \le 1$). Ако вторият играч играе с j-тата си чиста стратегия, т. е. избере j-я стълб, то резултатът от играта за първия играч ще бъде функцията $p_j(x) = a_{1j}x + a_{2j}(1-x)$; $p_j(x)$ определя права p_j в равнината xOp. Тъй като $x \in [0, 1]$, ще се интересуваме не от цялата права p_j, а само от частта ѝ, заключена между правите $x = 0$ и $x = 1$, т. е. от отсечката A_jB_j (фиг. 6).

Ординатите на точките от тази отсечка дават резултата на първия играч. Тъй като и на всяка чиста стратегия на втория играч ще съответства такава права, ще се получат m различни прави (фиг. 7).

За $x \in [0, 1]$ да въведем функцията $p(x) = \min\limits_{1 \le j \le m} p_j(x)$. Когато x се мени в интервала $[0, 1]$, точката $(x, p(x))$ определя долната обвивка на семейството прави p_j, $j = 1, \dots, m$. На фиг. 7 тази обвивка е начупената линия $ABCD$. Първият играч се стреми да максимизира резултата си $p(x)$, следователно той ще избере такава своя стратегия $\mathbf{x}^* = (x_0, 1-x_0)$, за която $p(x_0) = \max\limits_{0 \le x \le 1} p(x) = \max\limits_{0 \le x \le 1} \min\limits_{1 \le j \le m} p_j(x)$. С други думи, от всички $x \in [0, 1]$ първият играч ще избере това x_0 (може да не е единствено), което е абсциса на точка от начупената линия $p(x)$ с най-голяма ордината. На фиг. 7 това е точката C.

Възможни са следните случаи:

а) ако точката x_0, в която функцията $p(x)$ достига максимум, е единствена и крайна за интервала $[0, 1]$, играта има единствено решение в чисти стратегии, т. е. двамата играчи имат по една чиста оптимална стратегия;

б) ако точката x_0 не е единствена, т. е. $p(x)$ има хоризонтална част в графиката си, вторият играч има оптимална чиста стратегия, а първият безбройно много оптимални стратегии;

в) ако точката x_0 е единствена, вътрешна за интервала $[0, 1]$, и през точката $(x_0, p(x_0))$ не минава права, успоредна на Ox, играта има единствено решение в смесени стратегии.

Да приложим описания графичен метод за решаване на матричната игра с платежна матрица

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 & -2 & -1 \\ -1 & 2 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. Играта няма седлова точка.

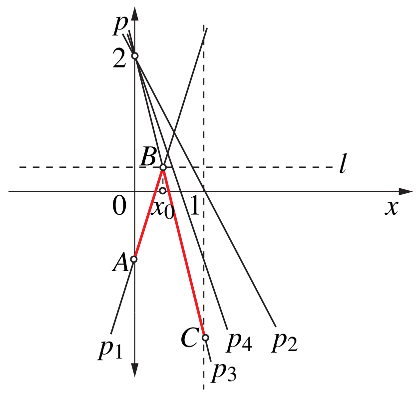
2. Третият стълб доминира над първия, зачертаваме го и решаваме получената игра с матрица

$$\mathbf{A}_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

3. Вторият играч в играта $\Gamma(\mathbf{A}_1)$ има четири чисти стратегии. Съответните им прави са:

$$p_1 : 2x - 1(1 - x) = 3x - 1; \qquad p_2 : 0x + 2(1 - x) = -2x + 2;$$
$$p_3 : -2x + 2(1 - x) = -4x + 2; \qquad p_4 : -x + 2(1 - x) = -3x + 2.$$

4. Построяваме правите p_1, p_2, p_3, p_4 и определяме долната им обвивка ABC в интервала $[0, 1]$ (фиг. 8).



Фиг. 8

5. Определяме абсцисата x_0 на точката B с най-голяма ординатата: $x_0 = \frac{3}{7}$. Оптималната стратегия на първия играч в играта $\Gamma(\mathbf{A}_1)$ е $\widetilde{\mathbf{x}}^* = \left(\frac{3}{7}, \frac{4}{7}\right)$, а цената ѝ — $v = p(x_0) = \frac{2}{7}$.

6. От фиг. 8 не се вижда коя е оптималната стратегия за втория играч, а се вижда само, че за него е най-добре да смесва първата и третата си чиста стратегия, съответстващи на правите p_1 и p_3. Ясно е, че оптималната смесена стратегия $\widetilde{\mathbf{y}}^* = (y_0, 0, 1 - y_0, 0)$ трябва да бъде такава комбинация между първата и третата му чиста стратегия, на която да съответства права през точката $B = (x_0, p(x_0)) = \left(\frac{3}{7}, \frac{2}{7}\right)$ и успоредна на абсцисната ос (на фиг. 8 правата l), т. е. търсим число y_0 в интервала $[0, 1]$, за което правата $l = p_1(x)y_0 + p_3(x)(1 - y_0) = p(x_0)$ да бъде успоредна на Ox; или $(3x-1)y_0+(-4x+2)(1-y_0) = \frac{2}{7}$, $(7y_0-4)x-3y_0+2 = \frac{2}{7}$. За да бъде тази права успоредна на Ox, трябва $y_0 = \frac{4}{7}$. Следователно оптималната стратегия на втория играч в играта $\Gamma(\mathbf{A}_1)$ е $\widetilde{\mathbf{y}}^* = \left(\frac{4}{7}, 0, \frac{3}{7}, 0\right)$.

7. Решението на изходната игра е: $\mathbf{x}^* = \left(\frac{3}{7}, \frac{4}{7}\right)$, $\mathbf{y}^* = \left(\frac{4}{7}, 0, 0, \frac{3}{7}, 0\right)$, $v = \frac{2}{7}$.

Аналогично на игрите $2\times m$ могат да бъдат графично решавани и игрите $n \times 2$, т. е. игри с платежни матрици от вида

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} \end{pmatrix}.$$

Ще илюстрираме това за матричната игра с платежна матрица

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 2 & 1 \\ -1 & 3 \\ 0 & -1 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Играта няма седлова точка.

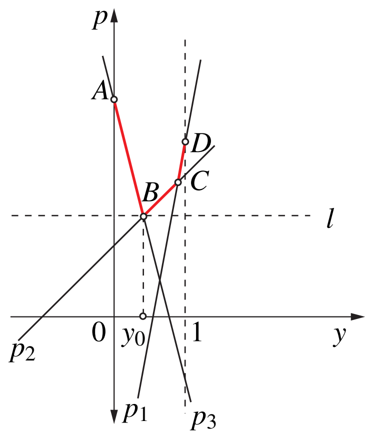
2. Вторият ред доминира над четвъртия и над петия. Зачертаваме ги. Получаваме еквивалентната игра $\Gamma(\mathbf{A}_1)$:

$$\mathbf{A}_1 = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

3. Правите, съответстващи на чистите стратегии на първия играч, са:

$$p_1 : 4y - 3(1-y) = 7y - 3,\ \ p_2 : 2y + 1(1-y) = y + 1,\ \ p_3 : -y + 3(1-y) = 4y + 3.$$

4. Построяваме правите p_1, p_2, p_3 и определяме начупената линия $ABCD$ (фиг. 9).



Фиг. 9

5. Определяме абсцисата y_0 на точката B с най-малка ордината:

$$y_0 = \frac{2}{5}, \quad v = p(y_0) = \frac{7}{5}.$$

Оптималната стратегия на втория играч в играта $\Gamma(\mathbf{A}_1)$ е $\widetilde{\mathbf{y}}^* = \left(\frac{2}{5}, \frac{3}{5}\right)$.

6. Оптималната стратегия на първия играч се дава от:

$$l : x_0 p_2(y) + (1 - x_0) p_3(y) = p(y_0),$$
$$y(5x_0 - 4) - 2x_0 + \frac{8}{5} = 0, \quad 5x_0 - 4 = 0, \quad x_0 = \frac{4}{5}.$$

Следователно оптималната стратегия на първия играч в играта $\Gamma(\mathbf{A}_1)$ е $\widetilde{\mathbf{x}}^* = \left(0, \frac{4}{5}, \frac{1}{5}\right)$.

7. Решението на изходната игра е $\mathbf{x}^* = \left(0, \frac{4}{5}, \frac{1}{5}, 0, 0\right)$, $\mathbf{y}^* = \left(\frac{2}{5}, \frac{3}{5}\right)$, $v = \frac{7}{5}$.

Задачи

1. Като се използва графичният метод, да се решат игрите с платежни матрици:

1.1. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 11 \\ 7 & 5 & 2 \end{pmatrix}$, **1.2.** $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 11 \\ 7 & 4 & 2 \end{pmatrix}$,

1.3. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 8 & 4 & 2 \\ 10 & 3 & 4 & 12 \end{pmatrix}$, **1.4.** $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$,

1.5. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 8 & 5 & 3 & 6 & 7 \\ 4 & 7 & 9 & 5 & 8 \end{pmatrix}$, **1.6.** $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 & 35 \\ 6 & 3 & 8 & 42 \end{pmatrix}$,

1.7. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 6 & 4 & 5 \\ 4 & 1 & 8 & 4 & 2 \end{pmatrix}$, **1.8.** $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & 7 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$,

1.9. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 8 & 5 & 3 & 6 & 7 \\ 4 & 7 & 9 & 5 & 8 \end{pmatrix}$, **1.10.** $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 7 \\ 9 & 11 \end{pmatrix}$,

1.11. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 9 & 1 \\ 7 & 5 \\ 8 & 3 \\ 5 & 9 \\ 6 & 7 \end{pmatrix}$, **1.12.** $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 7 & 1 \\ 3 & 7 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$,

1.13. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 7 & -1 \\ 5 & 4 \\ 1 & 5 \\ 3 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, **1.14.** $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \\ 2 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

§ 5. Матрични игри и линейно оптимиране

Съществува тясна връзка между матричните игри и задачите на линейното оптимиране, на базата на която решаването на произволна матрична игра може да бъде сведено до решаване на двойка спрегнати задачи на линейното оптимиране.

Нека е дадена матричната игра $\Gamma(\mathbf{A})$, където $\mathbf{A} = (a_{ij})_{n\times m}$. Ще считаме, че всички елементи на матрицата $\mathbf{A}$ са положителни числа (вж. теорема 3). Следователно и цената v също е положително число.

Като се използва теорема 2, лесно може да се покаже, че решаването на матричната игра $\Gamma(\mathbf{A})$ се свежда към решаването на следната двойка спрегнати задачи:

I задача. Да се намери вектор $\mathbf{x}^* = (x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*)$, който да минимизира линейната функция

$$l(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i$$

при условията

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_i \geq 1, \quad j = 1, \ldots, m, \quad x_i \geq 0, \quad i = 1, \ldots, n.$$

II задача. Да се намери вектор $\mathbf{y}^* = (y_1^*, y_2^*, \ldots, y_m^*)$, който да максимизира линейната функция

$$\bar{l}(y_1, \ldots, y_m) = \sum_{j=1}^{m} y_j$$

при условията

$$\sum_{j=1}^{m} a_{ij} y_j \leq 1, \quad i = 1, \ldots, n, \quad y_j \geq 0, \quad j = 1, \ldots, m.$$

Решението на играта $\Gamma(\mathbf{A})$ се получава по формулите

$$v = \frac{1}{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^*} = \frac{1}{\sum\limits_{j=1}^{m} y_j^*}, \quad \mathbf{x} = v\mathbf{x}^* = (vx_1^*, \ldots, vx_n^*), \quad \mathbf{y} = v\mathbf{y}^* = (vy_1^*, \ldots, vy_m^*).$$

От теорията за двойнствеността в линейното оптимиране се знае, че за да се определят оптималните планове $\mathbf{x}^*$ и $\mathbf{y}^*$ на двойката задачи I и II, е достатъчно да се реши едната от тях.

Решаването на една матрична игра $\Gamma(\mathbf{A})$ с методите на линейното оптимиране може да стане по следния алгоритъм:

1. Проверява се дали играта има седлова точка: ако има, то задачата е решена и се преминава към т. 9, ако не — към т. 2.

2. Проверява се дали всички елементи на платежната матрица $\mathbf{A}$ са неотрицателни числа: ако са се преминава към т. 5, ако не — към т. 3.

3. Определя се най-големият по абсолютна стойност отрицателен елемент на матрицата $\mathbf{A}$, т. е. определя се числото $a = \max\limits_{a_{ij}<0} |a_{ij}|$.

4. Преобразува се матрицата $\mathbf{A}$ в матрицата $\mathbf{A}_1$ с неотрицателни елементи по формулата $\mathbf{A}_1 = \mathbf{A} + a$.

5. Решава се едната от двойката спрегнати задачи I или II чрез симплекс-метода.

6. Определя се оптималният план на другата задача чрез последната симплексна таблица, получена в т. 5.

7. Определят се оптималните смесени стратегии $\widetilde{\mathbf{x}} = (\widetilde{x}_1, \widetilde{x}_2, \ldots, \widetilde{x}_n)$ и $\widetilde{\mathbf{y}} = (\widetilde{y}_1, \widetilde{y}_2, \ldots, \widetilde{y}_m)$ съответно на първия и втория играч на играта $\Gamma(\mathbf{A}_1)$ и цената ѝ v_1 по формулите

$$v_1 = \frac{1}{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^*}, \qquad \widetilde{x}_i = v x_i^*, \quad i = 1, \ldots, n, \qquad \widetilde{y}_j = v y_j^*, \quad j = 1, \ldots, m.$$

8. Определя се цената v на изходната игра $\Gamma(\mathbf{A})$ по формулата $v = v_1 - a$.

9. Край.

Пример 4. Да приложим тази схема за решаването на матричната игра с платежна матрица

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -3 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}.$$

Решение.

1. Играта няма седлова точка.

2. Матрицата $\mathbf{A}$ има отрицателни елементи.

3. Определяме числото $a = \max\{|-3|, |-2|\} = 3$.

4. Получаваме матрицата $\mathbf{A}_1$ по формулата

$$\mathbf{A}_1 = \mathbf{A} + 3 = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 0 & 4 \\ 7 & 1 \end{pmatrix}$$

5. По симплекс-метода решаваме съответната на играта $\Gamma(\mathbf{A}_1)$ задача II, т. е. решаваме задачата:

$$\max\{\bar{l}(y_1, y_2) = y_1 + y_2\}$$
$$\begin{aligned} 5y_1 + 3y_2 &\le 1, \\ 4y_2 &\le 1, \\ 7y_1 + y_2 &\le 1, \\ y_1 \ge 0,\ y_2 &\ge 0. \end{aligned}$$

Получаваме оптимален план $\mathbf{y}^* = \left(\frac{1}{20}, \frac{1}{4}\right)$ и максимална стойност на целевата функция $\bar{l}(\mathbf{y}^*) = \frac{3}{12}$.

6. Оптималният план на спрегнатата ѝ задача I е $\mathbf{x}^* = \left(\frac{1}{5}, \frac{1}{100}\right)$.

7. Определяме по формулите от т. 7 решението на играта $\Gamma(\mathbf{A}_1)$:

$$v_1 = \frac{10}{3}, \quad \widetilde{\mathbf{x}} = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, 0\right), \quad \widetilde{\mathbf{y}} = \left(\frac{1}{6}, \frac{5}{6}\right).$$

8. Цената на изходната игра $\Gamma(\mathbf{A})$ е $v = v_1 - 3 = \frac{1}{3}$, или решението на изходната игра $\Gamma(\mathbf{A})$ е: оптимални стратегии на първия и на втория играч и цена съответно са $\widetilde{\mathbf{x}}^* = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, 0\right)$, $\widetilde{\mathbf{y}}^* = \left(\frac{1}{6}, \frac{5}{6}\right)$, $v = \frac{1}{3}$.

Задачи

1. Като се използва връзката между матричните игри и линейното оптимиране, да се решат игрите с платежни матрици:

1.1. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 3 \\ 6 & 7 & 4 \\ 5 & 2 & 3 \end{pmatrix}$; **1.2.** $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 8 & 3 & 9 & 4 \\ 6 & 5 & 8 & 7 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$; **1.3.** $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ -3 & 4 & 5 \\ 4 & -5 & 6 \end{pmatrix}$;

1.4. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 8 & 2 & 4 \\ 4 & 5 & 6 \\ 1 & 7 & 3 \end{pmatrix}$; **1.5.** $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & 9 & 5 & 3 \\ 7 & 8 & 6 & 9 \\ 7 & 4 & 2 & 6 \\ 8 & 3 & 4 & 7 \end{pmatrix}$; **1.6.** $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 5 & 6 & 5 \\ 3 & 7 & 6 \\ 2 & 6 & 4 \end{pmatrix}$;

1.7. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 8 & 7 & 9 \\ 3 & 4 & 6 & 5 & 6 \\ 7 & 6 & 10 & 8 & 11 \\ 2 & 5 & 4 & 7 & 3 \end{pmatrix}$.

Отговори и решения

§ 1. Примери за матрични игри

1.1.

A \ B	1	2	3
1	2	−3	4
2	−3	4	−5
3	4	−5	6

1.2.

I \ II	0	1	2
0	0	1	2
1	−1	0	2
2	−2	−2	0

1.3. *Упътване*. Стратегиите на първия играч имат вида $(k; k_0)$, където k е числото, записано от него, а k_0 е предполагаемата сума. Стратегиите на втория играч са $(k; k_0, k_1, k_2, k_3, k_4)$ където k е записаното от него число, а k_j, $j = 0, 1, \dots, 4$, е предполагаемата сума, в случай, че първият играч е обявил числото j.

I \ II	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	1	1	1	−1	−1	−1	−1	−1	−1
2	−1	−1	−1	−1	−1	−1	−1	−1	0	0
3	−1	−1	0	0	−1	0	1	1	1	1
4	1	1	1	1	−1	−1	0	0	−1	−1
5	0	0	−1	−1	1	1	−1	0	−1	0
6	−1	0	−1	0	−1	−1	1	1	1	1
7	1	1	1	1	0	−1	0	−1	0	−1
8	0	−1	0	−1	1	1	−1	−1	−1	−1
9	−1	−1	−1	−1	−1	−1	1	1	1	1

1.4. *Упътване.* Ако $A = (a_{i,j})$, $i, j = 1, \dots, 9$, е платежна матрица, то

$$a_{ij} = \begin{cases} -1, & \text{ако } j - i \geq 2, \\ +1, & \text{ако } i - j \geq 2, \\ -2, & \text{ако } j - i = 1, \\ +2, & \text{ако } i - j = 1, \\ 0, & \text{ако } i - j = 0. \end{cases}$$

1.5. Първата страна има две стратегии:

- да изпрати по един бомбардировач в две различни посоки;
- и двата бомбардировача да изпрати в една посока.

Втората страна има пет стратегии:

- във всяка от четирите посоки да насочи по едно оръдие;
- в две различни посоки да насочи по две оръдия;
- в една посока да насочи две оръдия и в две други посоки — по едно оръдие;
- в една посока да насочи три оръдия и в друга посока — едно;
- в една посока — четири оръдия.

I \ II	1	2	3	4	5
1	0	$\frac{5}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{6}$	1
2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{4}$

§ 2. Седлови точки

1.1. Седлова точка $(3, 1)$, цена 3.

1.2. Седлова точка $(2, 4)$, цена 5.

1.3. Седлова точка $(3, 1)$, цена 4.

1.4. Седлови точки $(1, 2)$, $(1, 4)$, цена 3.

1.5. Седлови точки $(1,1)$, $(1,3)$, $(2,1)$, $(2,3)$, цена 4.

1.6. Седлова точка $(2,2)$, цена 5.

1.7. Седлови точки $(2,2)$, $(2,5)$, цена 6;

1.8. Седлова точка $(1,3)$, цена 4.

§ 3. Смесени стратегии

4. Да.

5. Да.

6.1. $\mathbf{x}^* = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, $\mathbf{y}^* = \left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right)$, $v = \frac{5}{2}$.

6.2. $\mathbf{x}^* = \left(\frac{8}{17}, \frac{9}{17}\right)$, $\mathbf{y}^* = \left(\frac{10}{17}, \frac{7}{17}\right)$, $v = \frac{5}{17}$.

6.3. $\mathbf{x}^* = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, $\mathbf{y}^* = \left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right)$, $v = 0$.

6.4. $\mathbf{x}^* = \left(\frac{3}{5}, \frac{2}{5}\right)$, $\mathbf{y}^* = \left(\frac{4}{5}, 0, \frac{1}{5}\right)$, $v = \frac{8}{5}$.

6.5. $\mathbf{x}^* = \mathbf{y}^* = \left(0, \frac{3}{4}, \frac{1}{4}\right)$, $v = 0$.

6.6. $\mathbf{x}^* = (0,0,1)$, $\mathbf{y}^* = \left(\frac{2}{5}, \frac{3}{5}, 0\right)$, $v = 2$.

7.1. $\mathbf{A}' = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 7 & -5 & 1 \\ 4 & -1 & 2 \end{pmatrix}$;

7.2. $\mathbf{A}' = \begin{pmatrix} 14 & -2 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$;

7.3. $\mathbf{A}' = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$;

7.4. $\mathbf{A}' = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.

7.5. $\mathbf{A}' = (6)$.

7.6. $\mathbf{A}' = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$;

7.7. $\mathbf{A}' = (4)$.

7.8. $\mathbf{A}' = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$.

7.9. $\mathbf{A}' = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

9. $\mathbf{x}^* = \mathbf{y}^* = \left(0, \frac{3}{8}, \frac{5}{8}, 0, 0\right)$, $v = -\frac{1}{8}$.

§ 4. Геометрично решаване на игри $2 \times m$ ($n \times 2$)

1.1. $\mathbf{x}^* = \left(\frac{3}{11}, \frac{8}{11}\right)$, $\mathbf{y}^* = \left(0, \frac{9}{11}, \frac{2}{11}\right)$, $v = \frac{49}{11}$.

1.2. $\mathbf{x}^* = \left(\frac{3}{11}, \frac{8}{11}\right)$, $\mathbf{y}^* = \left(0, \frac{9}{11}, \frac{2}{11}\right)$, $v = \frac{49}{11}$.

1.3. $\mathbf{x}^* = (x, 1-x)$, $\frac{1}{5} \le x \le \frac{4}{5}$, $\mathbf{y}^* = (0, 0, 1, 0)$, $v = 4$.

1.4. $\mathbf{x}^* = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, $\mathbf{y}^* = \left(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)$, $v = \frac{5}{2}$.

1.5. $\mathbf{x}^* = \left(\frac{4}{7}, \frac{3}{7}\right)$, $\mathbf{y}^* = \left(0, 0, \frac{1}{7}, \frac{6}{7}, 0\right)$, $v = \frac{39}{7}$.

1.6. $\mathbf{x}^* = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, $\mathbf{y}^* = \left(0, 0, 0, \frac{3}{4}, \frac{1}{4}\right)$, $v = \frac{7}{2}$.

1.7. $\mathbf{x}^* = (1, 0)$, $\mathbf{y}^* = (0, 1, 0, 0)$, $v = 3$.

1.8. $\mathbf{x}^* = \left(\frac{5}{14}, \frac{9}{14}\right)$, $\mathbf{y}^* = \left(0, \frac{2}{7}, 0, \frac{5}{7}\right)$, $v = \frac{4}{7}$.

1.9. $\mathbf{x}^* = \left(\frac{5}{12}, \frac{7}{12}\right)$, $\mathbf{y}^* = \left(\frac{7}{12}, \frac{5}{12}, 0, 0, 0\right)$, $v = \frac{25}{12}$.

1.10. $\mathbf{x}^* = (0, 0, 1)$, $\mathbf{y}^* = (1, 0)$, $v = 9$.

1.11. $\mathbf{x}^* = \left(\frac{1}{3}, 0, 0, \frac{2}{3}, 0\right)$, $\mathbf{y}^* = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$, $v = \frac{19}{3}$.

1.12. $\mathbf{x}^* = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, 0, 0\right)$, $\mathbf{y}^* = \left(\frac{4}{9}, \frac{5}{9}\right)$, $v = \frac{11}{3}$.

1.13. $\mathbf{x}^* = \left(0, \frac{4}{5}, \frac{1}{5}, 0, 0\right)$, $\mathbf{y}^* = \left(\frac{1}{5}, \frac{4}{5}\right)$, $v = \frac{21}{5}$;

1.14. $\mathbf{x}^* = \left(0, 0, 0, \frac{1}{6}, \frac{5}{6}\right)$, $\mathbf{y}^* = \left(\frac{5}{6}, \frac{1}{6}\right)$, $v = \frac{7}{6}$.

§ 5. Матрични игри и линейно оптимиране

1.1. $\mathbf{x}^* = (0, 1, 0)$, $\mathbf{y}^* = (0, 0, 1)$, $v = 4$.

1.2. $\mathbf{x}^* = (0, 1, 0)$, $\mathbf{y}^* = (0, 1, 0, 0)$, $v = 5$.

1.3. $\mathbf{x}^* = \mathbf{y}^* = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$, $v = 0$.

1.4. $\mathbf{x}^* = \left(\frac{1}{7}, \frac{6}{7}, 0\right)$, $\mathbf{y}^* = \left(\frac{3}{7}, \frac{4}{7}, 0\right)$, $v = \frac{32}{7}$.

1.5. $\mathbf{x}^* = (0, 1, 0, 0)$, $\mathbf{y}^* = (0, 0, 1, 0)$, $v = 6$.

1.6. $\mathbf{x}^* = (0, 1, 0, 0)$, $\mathbf{y}^* = (1, 0, 0)$, $v = 5$.

1.7. $\mathbf{x}^* = (0, 0, 1, 0)$, $\mathbf{y}^* = (0, 1, 0, 0, 0)$, $v = 6$.

Глава 6

Целочислено оптимиране

Общата задача на дискретното оптимиране се състои в намирането на екстремумите на функции в дискретни, състоящи се от изолирани точки множества. Целочисленото оптимиране разглежда клас дискретни оптимизационни задачи. Нарича се така, понеже върху част или всички променливи са наложени условия за целочисленост. Почти всяка дискретна оптимизационна задача може да се сведе до целочислена (макар че това не винаги е оправдано, тъй като води до голям брой променливи).

§ 1. Обща формулировка

Общият вид на задачата на *целочисленото оптимиране* е

$$\max\ (\min)\ \{F(\mathbf{x}) : \mathbf{x} \in \Omega \subset \mathbb{Z}^n\},$$

където $\mathbb{Z}^n$ е множеството от всички n-мерни вектори с целочислени компоненти, а $F(\mathbf{x})$ е реална функция, дефинирана в Ω.

Засега най-добре са изучени линейните целочислени (смесено-целочислени) задачи.

Общата задача на целочисленото линейно оптимиране е

$$\max\ \{\langle \mathbf{c}, \mathbf{x}\rangle : \mathbf{A}\mathbf{x} \le \mathbf{b},\ \mathbf{x} \ge 0,\ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \text{ и целочислени}\}.$$

Задачата на *смесено-целочисленото линейно оптимиране* е

$$\max\ \{\langle \mathbf{c}, \mathbf{x}\rangle : \mathbf{A}\mathbf{x} \le \mathbf{b},\ \mathbf{x} = (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \in \mathbb{R}^n,\ \mathbf{x}_1 \ge 0 \text{ и целочислени},\ \mathbf{x}_2 \ge 0\}.$$

Задачата на *двоичното оптимиране* е

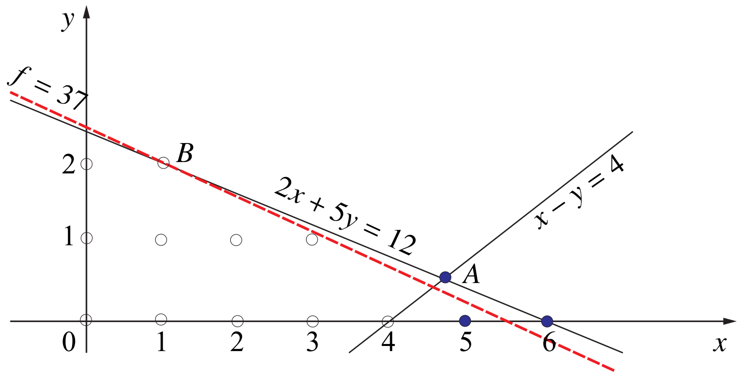
$$\max\ \{\langle \mathbf{c}, \mathbf{x}\rangle : \mathbf{A}\mathbf{x} \le \mathbf{b},\ \mathbf{x} \in \{0, 1\}^n,\ i = 1, \ldots, n\}.$$

По принцип всяка задача на ЦЛО може да се сведе до задача на двоичното оптимиране чрез смяна на променливите.

Целочислените и въобще дискретните оптимизационни задачи са значително по-трудни за решаване от непрекъснатите. Редица знаменити математически проблеми, оставени ни от древността, са добра илюстрация за трудността на проблемите, възникващи в дискретното оптимиране. Елементарните подходи (например закръгляване до целочисленост на непрекъснатото решение) не са ефективни, както личи от следния пример

$$\max\,\{f = 7x + 15y : 2x + 5y \le 12,\ x - y \le 4,\ x \ge 0,\ y \ge 0 \text{ и цели}\}.$$

Решението на непрекъснатата задача се достига в точка $A\left(\frac{32}{7}, \frac{4}{7}\right)$ (фиг. 10), а решението на целочислената — в точката $B(1, 2)$ и е очевидно, че намирането на непрекъснатото решение не може да ни доведе до целочисленото без допълнителни изследвания.



Фиг. 10

Пример 1 (*задача за покритие*)**.** Едно предприятие трябва да закупи пет машини M_j, $j = 1, \dots, 5$, за извършване на четири вида операции D_i, $i = 1, \dots, 4$, като всяка от предлаганите му машини може да извършва по няколко операции. Цените на машините са съответно c_j, $j = 1, \dots, 5$. Търси се най-евтината комбинация от машини, достатъчна за извършване на всичките операции.

Решение. В табл. 1 единиците означават операциите, които всяка машина може да извършва. В последния ред е дадена цената на всяка машина. Въвеждаме променливите $x_j \in \{0, 1\}$, $j = 1, \dots, 5$, където $x_j = 1$ означава, че j-тата машина ще бъде купена, а $x_j = 0$ — че няма да бъде купена. Взимайки предвид данните от табл. 1, за всяка операция се образува по едно

Таблица 1

Опера-ция	Машина				
	M_1	M_2	M_3	M_4	M_5
D_1	1	0	1	0	1
D_2	0	1	0	1	0
D_3	1	0	0	1	0
D_4	0	1	0	1	1
Цена	c_1	c_2	c_3	c_4	c_5

ограничение и моделът на задачата е

$$\min\ \{c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + c_4x_4 + c_5x_5\},$$
$$\begin{aligned} x_1 \quad + x_3 \quad + x_5 &\geq 1, \\ x_2 \quad + x_4 \quad &\geq 1, \\ x_1 \quad\quad + x_4 \quad &\geq 1, \\ x_2 \quad + x_4 + x_5 &\geq 1, \\ x_j \in \{0,1\}, \quad j = 1, \ldots, 5. \end{aligned}$$

Пример 2 (*задача с фиксирани доплащания*)**.** Дадени са m производителя на еднородна стока с обем на производство a_i, $i = 1, \ldots, m$, и n потребителя с обем на потребление b_j, $j = 1, \ldots, n$. Да се намерят обемите на превозите от производители до потребители, ако цената за единица превоз от мястото на производство i до мястото на потребление j е c_{ij}, $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$, като общата цена на превозите е минимална (дотук класическа транспортна задача). Освен това при наличие на превоз от място i до място j се плаща допълнително сумата d_{ij}.

Решение. Поради последното условие получаваме прекъсната целева функция и, така поставена, задачата излиза от рамките на линейното оптимиране. Тя може да се сведе до задача на смесено-целочисленото оптимиране. Определяме числата $M_{ij} = \min\{a_i, b_j\}$, $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$, и освен традиционните променливи x_{ij}, $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$, за обема на превозите въвеждаме двоични променливи $y_{ij} \in \{0, 1\}$, $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$. Получава се следният модел

$$\min\ \left\{ \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}(c_{ij}x_{ij} + d_{ij}y_{ij}) : \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i,\ \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j,\ x_{ij} \leq M_{ij}y_{ij},\right.$$
$$\left. x_{ij} \geq 0,\ y_{ij} \in \{0,1\},\ i = 1, \ldots, m,\ j = 1, \ldots, n \right\}.$$

Докажете, че моделът отразява условията за фиксираните доплащания.

Задачи

1. В даден цех са разположени m захранващи станции с мощности p_i, $i = 1, \dots, m$, и n двигателя с мощности q_j, $j = 1, \dots, n$. Известна е цената c_{ij}, $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$ на свързването на всеки от двигателите с всяка от захранващите станции. Да се свърже всеки двигател към една от захранващите станции, така че сумарните разходи за свързването да са минимални и мощността на свързаните с дадена станция двигатели да не надхвърля нейната мощност.

2 (*Задача за линейно разкрояване*)**.** Шивашко ателие разполага с m топа плат с дължини съответно L_i, $i = 1, \dots, m$. От тях трябва да се разкроят n вида облекла с дължини l_j, $j = 1, \dots, n$, от всяко по n_j, $j = 1, \dots, n$, бройки. Общата дължина на плата е значително по-голяма от необходимата за изпълнение на поръчката. Да се изпълни тя, като се използват минимален брой топове плат.

3 (*задача за раницата*)**.** Разполагаме с n предмета с обеми v_i и цени c_i, $i = 1, \dots, m$, и с раница с обем V. Кои от предметите трябва да поставим в раницата, така че общата им цена да бъде максимална?

4. Дадена е системата

$$\left|\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n} a_{1j}x_j &= b_1, \\ \sum_{j=1}^{n} a_{2j}x_j &= b_2, \end{aligned}\right.$$

където a_{ij} са цели неотрицателни числа, $b_i > 0$ и цели, $i = 1, 2$, t_1 и t_2 — цели, и са изпълнени условията:

а) t_1 и t_2 са взаимно прости;

б) t_1 не дели b_2 и t_2 не дели b_1;

в) $t_1 > b_2 - \alpha$, $t_2 > b_1 - \alpha$, $\alpha = \min\limits_{a_{ij}>0} a_{ij}$. Да се докаже, че множеството от неотрицателните цели решения на системата съвпада с това на агрегираното уравнение

$$\sum_{j=1}^{n} (t_1 a_{1j} + t_2 a_{2j}) x_j = t_1 b_1 + t_2 b_2.$$

5. Агрегирайте уравненията на системата (вж. зад. 4)

$$\left|\begin{aligned} 2x + 3y &= 10 \\ 3x + y &= 12 \end{aligned}\right.$$

и покажете, че тя няма цяло неотрицателно решение.

6. Решете задачата

$$\max \left\{x_1 + x_2 : 2x_1 + x_2 + x_3 = 6,\ 2x_2 + x_3 = 4,\ x_j \geq 0 \text{ и цели},\ j = 1, 2, 3\right\},$$

като агрегирате ограниченията-равенства.

7. Докажете, че необходимо и достатъчно условие линейното уравнение $\sum\limits_{j=1}^{n} a_j x_j = b$, където a_j, $j = 1, \ldots, n$, и b са цели, да има целочислено решение (не непременно положително) е най-големият общ делител (НОД) на a_j, $j = 1, \ldots, n$, да дели b.

8. Покажете, че системата

$$\left| \begin{array}{l} 19x + 10y + 7z = -3 \\ 5x + 2y + 2z = -1 \end{array} \right.$$

няма целочислено решение.

Упътване. Използвайте факта, че системата линейни независими уравнения $\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i$, $i = 1, \ldots, m$, a_{ij} и b_i — цели, има целочислено решение тогава и само тогава, когато най-големият общ делител (НОД) на всички поддетерминанти от m-ти ред на матрицата $\left\|a_{ij}\right\|_{m \times n}$ е равен на НОД на всички поддетерминанти от m-ти ред на разширената матрица.

9. Разрешими ли са целочислено поотделно двете уравнения от зад. 8?

10. Покажете, че уравнението $x^2 - 2y^2 = 1$ има безбройно много решения в цели положителни числа.

11. Покажете, че уравнението $x^2 + 2y^2 = z^2$ има безбройно много решения в цели положителни числа.

§ 2. Методи за решаване на общата задача на ЦЛО

Първият общ подход за решаване на целочислената задача на линейното оптимиране е предложен от Гомори (1958 г.). Под общото наименование *методи на отсичането* той не е загубил значение и до днес. Общата идея на тези методи се основава на следния факт: ако за даден линеен многостен (областта, определена от линейните ограничения на задачата) успеем да построим изпъкналата обвивка на неговите целочислени точки, решаването на целочислената задача се свежда до решаване на обикновената линейна задача върху изпъкналата обвивка. За съжаление намирането на изпъкналата обвивка е може би по-сложна задача от изходната.

В методите на отсичането експлицитно намиране на изпъкналата обвивка не е необходимо. От информацията, която ни носи целевата функция, чрез въвеждане на допълнителни ограничения (отсичания) и последователно решаване на непрекъснати линейни задачи се строи итерационен процес, който завършва, когато непрекъснатото решение на поредната линейна задача се окаже целочислено. Така се построява само тази част от изпъкналата обвивка на целочислените точки, която генерира намирането на целочислено решение.

Определение. *Правилно отсичане* наричаме прибавянето на такова линейно ограничение, което:

а) не се удовлетворява от непрекъснатото решение на линейната задача (това решение се "отсича" от многостена, определен от ограниченията);

б) удовлетворява се от всички целочислени точки, принадлежащи на многостена.

Нека е дадена задачата с целочислени коефициенти

$$(1)\quad \max\left\{\sum_{j=1}^{n} c_j x_j : \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i,\ i = 1,\dots,m;\ x_j \geq 0 \text{ и цели},\ j = 1,\dots,n\right\}.$$

Нека x е оптимален опорен план на (1) без условията за целочисленост (на непрекъснатата задача). Да изразим базисните променливи x_i, $i \in J_B$, чрез небазисните x_j, $j \in J_N$, съответстващи на оптималния опорен план

$$x_i = \beta_i - \sum_{j \in J_N} \alpha_{ij} x_j, \quad i \in J_B.$$

Нека $k = \min\{i : i \in J_B,\ \beta_i \text{ не е цяло}\}$. Такова k съществува, защото в противен случай всички β_i са цели, т. е. планът x е целочислен и е решение на целочислената задача. Означаваме с $\{\beta_k\}$, $\{\alpha_{kj}\}$, $j \in J_N$, дробните части на числата β_k, α_{kj}, $j \in J_N$. Тогава е в сила следното

Твърдение. Ограничението

$$(2)\qquad x_{n+1} = \sum_{j \in J_N} \{\alpha_{kj}\} x_j - \{\beta_k\} \geq 0$$

е правилно отсичане.

Алгоритъм

1. Решаваме задачата без условието за целочисленост. Възможни са случаите:

   а) задачата няма решение; целочислената задача също няма решение; към т. 3;

   б) решението е целочислено; то е решение и на целочислената задача; към т. 3;

   в) решението има поне една нецелочислена компонента; към т. 2.

2. Към ограниченията на решената в т. 1 задача прибавяме съответното за текущата итерация ограничение от типа (2). Към т. 1.

3. Край.

Забележка 1. Изборът на k по този начин не е съществен, но се прави, за да има еднозначност при описанието на алгоритъма. Вместо k може да се използва кой да е индекс, за който β_i не е цяло.

Забележка 2. За генериране на правилно отсичане може да се използва и целевият ред.

Забележка 3. Въз основа на описаната идея на Гомори са създадени редица алгоритми: без ограничения за целочисленост на коефициентите; за решаване на смесено-целочислени задачи и др.

Пример. Да се реши по метода на отсичането задачата

$$\max\{l(x) = 4x_1 + 5x_2 + x_3\},$$

$$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 \phantom{{}+x_3} &\le 10,\\ x_1 + 4x_2 \phantom{{}+x_3} &\le 11,\\ 3x_1 + 3x_2 + x_3 &\le 13,\\ x_j \ge 0 \text{ и цели},\ j = 1,2,3.& \end{aligned}$$

Решение.

1. Решаваме по симплекс-метода съответната задача на линейното оптимиране, която привеждаме в каноничен вид чрез допълнителните неотрицателни променливи x_4, x_5, x_6:

$$\max\{l(x) = 4x_1 + 5x_2 + x_3\},$$

$$\begin{array}{rcl} 3x_1 + 2x_2 + x_4 & = & 10, \\ x_1 + 4x_2 + x_5 & = & 11, \\ 3x_1 + 3x_2 + x_3 + x_6 & = & 13, \\ x_j \geq 0, \ \ j = 1, \ldots, 6. & & \end{array}$$

Итерация 0

B	$\mathbf{c}^B$	$\boldsymbol{\beta}$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
			4	5	1	0	0	0
x_4	0	10	3	2	0	1	0	0
x_5	0	11	1	$\boxed{4}$	0	0	1	0
x_3	1	13	3	3	1	0	0	1
		-13	1	2	0	0	0	-1

Итерация 1

B	$\mathbf{c}^B$	$\boldsymbol{\beta}$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
			4	5	1	0	0	0
x_4	0	$\frac{9}{2}$	$\boxed{\frac{5}{2}}$	0	0	1	$-\frac{1}{2}$	0
x_2	5	$\frac{11}{4}$	$\frac{1}{4}$	1	0	0	$\frac{1}{4}$	0
x_3	1	$\frac{19}{4}$	$\frac{9}{4}$	0	1	0	$-\frac{3}{4}$	1
		$-\frac{37}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	0	0	$-\frac{1}{2}$	-1

Итерация 2

B	$\mathbf{c}^B$	$\boldsymbol{\beta}$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
			4	5	1	0	0	0
x_1	4	$\frac{18}{10}$	1	0	0	$\frac{2}{5}$	$-\frac{1}{5}$	0
x_2	5	$\frac{23}{10}$	0	1	0	$-\frac{1}{10}$	$\frac{3}{10}$	0
x_3	1	$\frac{7}{10}$	0	0	1	$-\frac{9}{10}$	$-\frac{3}{10}$	1
		$-\frac{194}{10}$	0	0	0	$-\frac{1}{5}$	$-\frac{2}{5}$	-1

Планът $x^* = \left(\frac{18}{10}, \frac{23}{10}, \frac{7}{10}, 0, 0, 0\right)$ на каноничната задача е оптимален. Той не е целочислен.

2. Въвеждаме ново ограничение $x_7 = \frac{9}{10}x_4 + \frac{3}{10}x_5 \geq \frac{7}{10}$, което добавяме към останалите.

3. Решаваме получената линейна задача, като прилагаме двойнствения симплекс-метод и използуваме последната симплексна таблица от т. 1. Въведената чрез новото ограничение допълнителна променлива x_7 е новата базисна променлива, съответстваща на новото ограничение.

Итерация 3

B	$\mathbf{c}^B$	$\boldsymbol{\beta}$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
			4	5	1	0	0	0	0
x_1	4	$\frac{18}{10}$	1	0	0	$\frac{2}{5}$	$-\frac{1}{5}$	0	0
x_2	5	$\frac{23}{10}$	0	1	0	$-\frac{1}{10}$	$\frac{3}{10}$	0	0
x_3	1	$\frac{7}{10}$	0	0	1	$-\frac{9}{10}$	$-\frac{3}{10}$	1	0
x_7	0	$-\frac{7}{10}$	0	0	0	$-\frac{1}{10}$	$\boxed{-\frac{7}{10}}$	0	1
		$-\frac{194}{10}$	0	0	0	$-\frac{1}{5}$	$-\frac{2}{5}$	-1	0

Определяме (по правилата на двойнствения симплекс-метод) променливата, която ще излезе от базиса измежду тези, на които в стълба β съответствуват отрицателни числа. Единствената такава е x_7. Определяме променливата, която ще влезе в базиса: това е тази, за която се достига $\min\left\{\frac{\Delta_j}{\alpha_{7j}}\right\}$: $\{\min 2, \frac{4}{7}\} = \frac{4}{7} = \frac{\Delta_5}{\alpha_{75}}$. В базиса влиза x_5.

Итерация 4

B	$\mathbf{c}^B$	$\boldsymbol{\beta}$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
			4	5	1	0	0	0
x_1	4	2	1	0	0	$\frac{3}{7}$	0	0
x_2	5	2	0	1	0	$-\frac{1}{7}$	0	0
x_3	1	1	0	0	1	$-\frac{6}{7}$	0	1
x_5	0	1	0	0	0	$\frac{1}{7}$	1	0
		-19	0	0	0	$-\frac{1}{7}$	0	-1

Тъй като стълбът β не съдържа повече отрицателни числа, линейната задача е решена. Оптималният план $x^{**} = (2, 2, 1)$ е целочислен и следователно е решение на дадената задача: $l_{\max}(x) = l(x^{**}) = 19$.

Задачи

1. Докажете, че (2) е правилно отсичане за задача (1).

2. Обосновете целесъобразността от прилагане на двойнствен симплекс-метод при решаване на задачи на ЦЛО по метода на отсичането.

3. Решете с описания алгоритъм задачата

$$\max\{x_1 + x_2\}$$

$$\begin{aligned} 2x_1 + 11x_2 &\le 38, \\ x_1 + x_2 &\le 7, \\ 4x_1 - 5x_2 &\le 5, \\ x_1, x_2 &\ge 0 \text{ и цели.} \end{aligned}$$

4. Решете следните задачи, в които всички променливи са цели неотрицателни числа:

4.1. $x_1 - 3x_2 + 3x_3 \to \max,$

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 - x_3 &\le 4, \\ 4x_1 - 3x_2 &\le 2, \\ -3x_1 + 2x_2 + x_3 &\le 6, \end{aligned}$$

4.2. $x_1 + x_2 \to \max,$

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 &\ge 6, \\ 3x_1 + 2x_2 &\le 36, \\ x_2 &\le 13; \end{aligned}$$

4.3. $\{x_1 + 4x_2\} \to \max,$

$$\begin{aligned} -x_1 + 2x_2 &\le 2, \\ 3x_1 + 2x_2 &\le 6; \end{aligned}$$

4.4. $\{x_1 + x_2\} \to \max,$

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 &\le 6, \\ 2x_1 + 3x_2 &\le 9; \end{aligned}$$

4.5. $\{3x_1 + 4x_2\} \to \max,$

$$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 &\le 8, \\ x_1 + 4x_2 &\le 10; \end{aligned}$$

4.6. $\{x_1 + 2x_2 + x_5\} \to \min,$

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 &= 5, \\ x_2 + x_3 + x_4 - x_5 &= 2, \\ x_3 - x_4 + x_5 &= 1. \end{aligned}$$

5. Съставете математически модел и решете следните задачи от гл. 10:

5.1. Зад. 11, § 1; **5.2.** Зад. 20, § 1.

Отговори и решения

§ 1. Обща формулировка

1. Въвеждаме променливите $x_{ij} \in \{0,1\}$, $i = 1,\dots,m$, $j = 1,\dots,n$, като $x_{ij} = 1$ означава, че двигател i е свързан към станция j, а $x_{ij} = 0$ — че не е свързан към нея. Ще търсим

$$\min\left\{ \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} : \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = 1,\ \sum_{j=1}^{n} q_j x_{ij} \le p_i,\right.$$
$$\left. x_{ij} \in \{0,1\},\ i = 1,\dots,m,\ j = 1,\dots,n \right\}.$$

2. Въвеждаме променливите x_{ij}, $i = 1,\dots,m$, $j = 1,\dots,n$ — брой облекла от вид j, разкроени от топ i. Двоичните променливи y_i, $i = 1,\dots,m$, ще определят дали съответният топ ще бъде разкроен ($y_i = 1$) или не ($y_i = 0$). Търсим

$$\min\left\{ \sum_{i=1}^{m} y_i : \sum_{j=1}^{n} l_j x_{ij} \le y_i L_i,\ \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = n_j,\right.$$
$$\left. x_{ij} \ge 0 \text{ и цели},\ y_i \in \{0,1\},\ i = 1,\dots,m,\ j = 1,\dots,n \right\}.$$

3. Променливите $x_i \in \{0,1\}$, $i = 1,\dots,n$, показват дали предметът ще бъде поставен в раницата ($x_i = 1$) или не ($x_i = 0$) и търсим

$$\max\left\{ \sum_{i=1}^{n} c_i x_i : \sum_{i=1}^{n} v_i x_i \le V,\ x_i \in \{1,0\},\ i = 1,\dots,n \right\}.$$

4. Очевидно е, че всяко решение на системата е решение и на уравнението. За да докажем, че всяко целочислено решение на уравнението е и решение на системата, ще въведем означенията $y_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j - b_i$, $i = 1,2$. Уравнението $\sum_{j=1}^{n}(t_1a_{1j}+t_2a_{2j})x_j = t_1b_1+t_2b_2$ записваме във вида $t_1y_1+t_2y_2 = 0$. Тъй като $t_1 \ne 0$, $t_2 \ne 0$ са взаимно прости, всички решения на последното уравнение се представят във формата $y_1 = -qt_2$, $y_2 = -qt_1$, където q е произволно цяло число. Ще покажем, че $q = 0$. Ако допуснем, че $q > 0$, то $y_1 \le -t_2$

и $t_2 \leq -y_1 = b_1 - \sum_{j=1}^{n} a_{1j}x_j$. Тъй като t_2 не дели b_1, от $\sum_{j=1}^{n} a_{1j}x_j = b_1 - t_2 q$ следва, че $\sum_{j=1}^{n} a_{1j}x_j \neq 0$ и тъй като x_j са цели неотрицателни, то $\sum_{j=1}^{n} a_{1j}x_j \geq \alpha$, която противоречи на условие в). Аналогично се показва, че допускането $q < 0$ също води до противоречие и следователно $q = 0$, т. е. $y_1 = y_2 = 0$ или $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i$, $i = 1, 2$.

5. Най-малките стойности на агрегиращите множители, изпълняващи условията от задача 4, са $t_1 = 13$, $t_2 = 11$ и агрегираното уравнение е $59x+50y = 262$. Чрез непосредствена проверка се вижда, че нито една двойка цели числа $0 \leq x \leq 4$, $0 \leq y \leq 5$ не го удовлетворява.

6. Агрегираме уравненията-ограничения с помощта на множителите $t_1 = 5$, $t_2 = 7$ и получаваме задачата

$$\max\{x_1 + x_2 : 10x_1 + 19x_2 + 12x_3 = 58,\ x_j \geq 0 \text{ и цели},\ j = 1, 2, 3\}.$$

Проверява се, че единствените цели неотрицателни допустими точки са $(1, 0, 4)$ и $(2, 2, 0)$ и следователно решението на задачата е $x_1 = 2$, $x_2 = 2$, $x_3 = 0$.

7. Без ограничение на общността ще считаме, че $b > 0$. Нека разгледаме случая, когато най-големия общ делител (НОД) a_j, $j = 1, \dots, n$, е равен на $d = b$.

Образуваме множеството от цели числа от вида

$$S = \left\{ z : z = \sum_{j=1}^{n} a_j x_j,\ x_j \text{ цели},\ j = 1, \dots, n \right\}.$$

Очевидно $a_j \in S$, $j = 1, \dots, n$, тъй като d дели всички елементи на S и нито едно по-голямо от d число не ги дели, тъй като то би деляло и a_j, $j = 1, \dots, n$.

Нека $\overline{s} = \min\{s : s \in S\}$. Тогава $s = \overline{s} + qr$, където q и r са цели, и $r < \overline{s}$. Но $r \in S$, тъй като $s \in S$ и $\overline{s} \in S$ и следователно $r = 0$. Оттук следва, че $\overline{s}$ дели всяко число от S и следователно дели d, т. е. $\overline{s} \leq d$. Тъй като d дели $\overline{s}$, то $\overline{s} < d$ е невъзможно и следователно $\overline{s} = d$ или $\overline{s} = b$. От $\overline{s} \in S$ следва, че съществуват цели числа $(x_1^0, \dots, x_n^0)$, такива че $\overline{s} = b = a_1x_1^0 + a_2x_2^0 + \cdots + a_nx_n^0$ или уравнението е решимо в цели числа при $d = b$. Ако $d < b$, то $b = kd$, k — цяло, и следователно $b = kd = \sum_{j=1}^{n} a_j k x_j^0$. Обратното твърдение следва от това, че всяко цяло число от вида $\sum_{j=1}^{n} d_j x_j$ трябва да се дели на d.

8. Стойността на поддетерминантите от втори ред на матрицата на системата са -12, 3, 6 и НОД е 3. Останалите поддетерминанти от втори ред на разширената матрица имат стойности -4, 4 и 1 и НОД на всички поддетерминанти е 1. Следователно (вж. упътването) системата няма целочислено решение.

9. Използвайте задача 7: НОД на коефициентите пред неизвестните 19, 10, 7 е 1 и той дели свободния член -3. Следователно уравнението има целочислено решение. Аналогично се показва, че и второто уравнение има решение в цели числа.

10. Уравнението $x^2 - ay^2 = 1$, където $a > 0$ не е точен квадрат, се нарича *уравнение на Пел*. Можем да запишем $(x+y\sqrt{a})(x-y\sqrt{a}) = 1$ и като повдигнем двете страни в степен n, $(x + y\sqrt{a})^n(x - y\sqrt{a})^n = 1$. Означаваме $(x + y\sqrt{a})^n = x_n + y_n\sqrt{a}$ и очевидно ще имаме $(x - y\sqrt{a})^n = x_n - y_n\sqrt{a}$ и следователно $(x_n + y_n\sqrt{a})(x_n - y_n\sqrt{a}) = 1$ или $x_n^2 - ay_n^2 = 1$. Получихме, че ако (x, y) е решение, то и (x_n, y_n) е също решение, $n = 2, 3, \ldots$. В нашия случай $a = 2$ и непосредствено се вижда, че $x = 3$, $y = 2$ е решение и по описаната процедура можем да получим безбройно много решения. Доказано е, че и при всяко $a > 0$ (a не точен квадрат) уравнението има поне едно, а оттук и безбройно много решения.

11. Нека x, y и z са взаимно прости, защото в противен случай ще разделим уравнението на d^2 (d — НОД). Следователно две от неизвестните трябва да са нечетни, а третото — четно. Ще покажем, че x и y не могат едновременно да бъдат нечетни. Действително, ако x е нечетно, то $x \equiv 1 \pmod 4$ или $3 \pmod 4$ и ако и y е нечетно, то и $y^2 \equiv 1 \pmod 4$ и $x^2 + y^2 \equiv 2 \pmod 4$. Но z е четно и $z^2 \equiv 0 \pmod 4$, което противоречи на $x^2 + y^2 = z^2$. Нека y е нечетно, а x — четно. Следователно $x^2 = 4t^2 = z^2 - y^2 = (z - y)(z + y)$. Членовете $z - y$ и $z + y$ имат НОД 2: $z - y = 2m^2$, $z + y = 2n^2$, което е необходимо, такова че x^2 да бъде квадрат на произведение от цели числа. Следователно $z = m^2 + n^2$, $y = n^2 - m^2$, $x = 2mn$ и общото решение е $x = 2kmn$, $y = k(n^2 - m^2)$, $z = k(n^2 + m^2)$, където k е произволно цяло число, а $m - n \equiv 1 \pmod 2$.

§ 2. Методи за решаване на общата задача на ЦЛО

1. Нека представянето на базисните променливи x_i, $i \in J_B$, чрез небазисните x_j, $j \in J_N$, съответстващи на оптималния опорен план, а именно

$$(*) \qquad x_i = \beta_i - \sum_{j \in J_B} \alpha_{ij} x_j, \qquad i \in J_B,$$

умножим с $h \neq 0$, т. е. $hx_i + \sum_{j\in J_B} h\alpha_{ij}x_j = h\beta_i$, $i \in J_B$. Ако $[h]$ означава цялата част на h, то $[h]x_i + \sum_{j\in J_B} [h\alpha_{ij}]x_j \leq h\beta_i$, $i \in J_B$, защото $x \geq 0$. За целочислени стойности на вектора x лявата страна на неравенството ще бъде цяло число и $[h]x_i + \sum_{j\in J_B} [h\alpha_{ij}]x_j \leq [h\beta_i]$, $i \in J_B$. Като извадим от $(*)$, умножено с $[h]$, това неравенство, ще получим

$$\sum_{j\in J_B}([h]\alpha_{ij} - [h\alpha_{ij}])x_j \geq [h]\beta_i - [h\beta_i], \qquad i \in J_B,$$

което се удовлетворява от всяко целочислено допустимо решение на задача (1). При $h = 1$ имаме $\sum_{j\in J_B} (\alpha_{ij} - [\alpha_{ij}])x_j \geq \beta_i - [\beta_i]$, $i \in J_B$, или

$$(**) \qquad \sum_{j\in J_B}\{\alpha_{ij}\}x_j \geq \{\beta_i\}, \qquad i \in J_B.$$

Тъй като изходният оптимален план не е целочислен, съществува $k \in J_B$, такова че $\{\beta_k\} > 0$ и понеже $x_j = 0$, $j \in J_N$, той не удовлетворява отсичането. Следователно $(**)$ е правилно отсичане.

2. При метода на отсичането броят на ограниченията в линейните задачи, които се решават последователно, не е постоянен — той расте. Докато симплекс-методът (по-специално модифицираният симплекс-метод) е удобен за прилагане към задачи, в които броят на стълбовете не е постоянен (защо?), стига броят на редовете да остава един и същ, при двойнствения симплекс-метод е обратното.

3. $x^* = (3, 2)$, $l^* = 5$.

4.1. $x^* = (2, 2, 5)$, $l^* = 11$.

4.2. $x^* = (3, 13)$, $l^* = 16$.

4.3. $x^* = (1, 1)$, $l^* = 5$.

4.4. $x^* = (0, 3)$, $x^{**} = (1, 2)$, $x^{***} = (2, 1)$, $x^{****} = (3, 0)$, $l^* = 3$.

4.5. $x^* = (1, 2)$, $l^* = 11$.

4.6. $x^* = (1, 3, 0, 0, 1)$, $l^* = 8$.

5.1. Моделът е $\max\{x_1 + x_2 : 0{,}60x_1 + 0{,}72x_2 \le 432,\ 1{,}80x_1 + 1{,}50x_2 \le 1350,\ x_1, x_2 \in \{0, 1\}\}$, където x_1 е броят комплекти в I цех, а x_2 е броят комплекти във II цех. Оптималното решение е $x_1^* = 720$, $x_2^* = 0$.

5.2. Моделът е $\min\{9x_{11} + 14x_{12} + 7x_{13} + 8x_{21} + 6x_{22} + 9x_{23} + 12x_{31} + 11x_{32} + 14x_{33} : x_{i1} + x_{i2} + x_{i3} = 1,\ i = 1, 2, 3,\ x_{1j} + x_{2j} + x_{3j} = 1,\ j = 1, 2, 3,\ x_{ij} \ge 0$ и цели$\}$, където x_{ij} са логически променливи: $x_{ij} = 1$, ако i-тият багер работи на j-тия обект, $x_{ij} = 0$ в противен случай. Решението е: I багер на III обект, II багер на II обект, III багер на I обект.

Глава 7

Хиперболично (дробно-линейно) оптимиране

§ 1. Задача на хиперболичното оптимиране. Свойства

Формулировка: Търси се sup (inf) на дробно-линейната функция

$$h(\mathbf{x}) = h(x_1, \ldots, x_n) = \frac{p_0 + \sum\limits_{j=1}^{n} p_j x_j}{q_0 + \sum\limits_{j=1}^{n} q_j x_j} \tag{1}$$

при условия (ограничения)

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_j, \quad i = 1, \ldots, m, \tag{2}$$

$$x_j \ge 0, \quad j = 1, \ldots, n_1 \quad (n_1 \le n). \tag{3}$$

Множеството, определено от условията (2)–(3), ще означаваме с Ω.

Определение 1. *Оптимален опорен план* (*решение*) на задача (1)–(3) наричаме крайна точка на множеството Ω, в която функцията достига своя супремум (инфимум).

Определение 2. *Оптимална посока* (*асимптотично решение*) наричаме посока, по която функцията $h(\mathbf{x})$ клони към супремума (инфимума си), без да го достига.

Определение 3. *Субоптимален опорен план* наричаме крайна точка на множеството Ω, от която излиза неограничен ръб с оптимална посока.

Определение 4. Ще казваме, че задача (1)–(3) е *решима*, ако има оптимален опорен план или асимптотично решение.

Задачата на хиперболичното оптимиране има следните свойства:

1. Ако функцията $h(\mathbf{x})$ е ограничена в множеството Ω, то всеки неин локален екстремум е и глобален екстремум.

2. Ако функцията $h(\mathbf{x})$ е ограничена в множеството Ω, тя може да не достига екстремум в него.

3. Ако функцията $h(\mathbf{x})$ достига екстремум в множеството Ω, тя го достига и в крайна точка на Ω.

Теорема 1. Ако $\hat{\Omega} \neq \emptyset$ ($\hat{\Omega}$ е множеството от крайни точки на Ω) и функцията е ограничена в Ω, задача (1)–(3) има оптимален опорен план или асимптотично решение.

§ 2. Геометрично решаване на задачата на хиперболичното оптимиране

Разглеждаме задачата (1)–(3) в двумерния случай. Търси се

$$\sup\ (\inf)\ \left\{ h(x_1, x_2) = \frac{p_0 + p_1x_1 + p_2x_2}{q_0 + q_1x_1 + q_2x_2} = \frac{p(x_1, x_2)}{q_(x_1, x_2)} \right\}$$

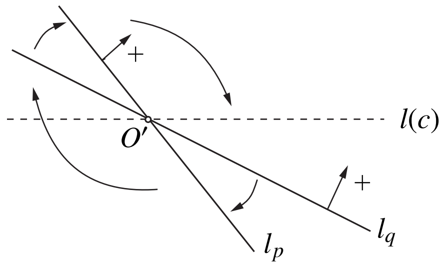
при условия

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 \leq b_i, \quad i = 1, \dots, m, \quad x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0.$$

Предполагаме, че векторите (p_1, p_2) и (q_1, q_2) не са колинеарни и $q(x_1, x_2) \neq$ const. Линиите на ниво на функцията $h(x_1, x_2)$ са правите от снопа, определен от правите l_p и l_q с уравнения

$$l_p : p_0 + p_1x_1 + p_2x_2 = 0, \quad l_q : q_0 + q_1x_1 + q_2x_2 = 0.$$

Произволна права $l(c) : (p_0 - cq_0) + (p_1 - cq_1)x_1 + (p_2 - cq_2)x_2 = 0$ от снопа има ъглов коефициент $k(c) = \dfrac{-p_1 + cq_1}{p_2 - cq_2}$, който се мени монотонно с растенето на c (т. е. на $h(x_1, x_2)$), тъй като производната $\dfrac{dk(c)}{dc} = \dfrac{q_1p_2 - p_1q_2}{(cq_2 - p_2)^2}$ не сменя знака си. Тогава при въртенето на правата $l(c)$ в дадена посока около центъра на снопа функцията $h(x_1, x_2)$ или расте, или намалява — в зависимост от знака на разликата $q_1p_2 - p_1q_2$: при отрицателен знак функцията расте



Фиг. 11

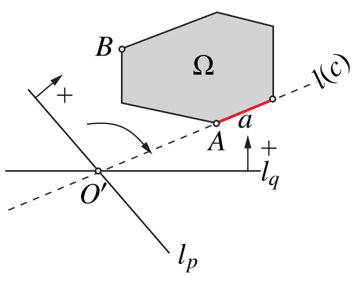
при въртене по посока на часовниковата стрелка, а при положителен — при въртене в обратна посока.

На фиг. 11 със стрелка и знак плюс са означени посоките на нормалните вектори на правите l_p и l_q, т. е. посоките, в които нарастват съответно функциите $p(x_1, x_2)$ и $q(x_1, x_2)$. Линията на ниво $l(c)$ е начертана с пунктир. Дадена е посоката на растене на функцията $h(x_1, x_2)$ при движение на правата $l(p)$ около центъра O' на снопа.

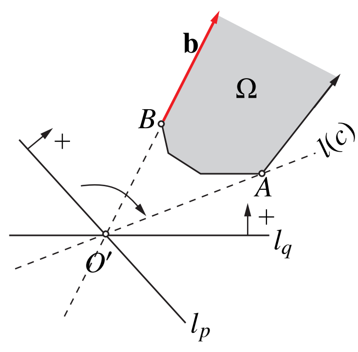
Навсякъде по-нататък предполагаме, че $q(x_1, x_2) \neq 0$ в областта Ω.

По-интересни са следните случаи, които илюстрират изброените свойства на хиперболичната задача:

1. Фиг. 12 и 13 са примери за задачи, в които целевата функция $h(x_1, x_2)$ достига както максималната си стойност — в точките от отсечката a (фиг. 12) и върха A (фиг. 13), така и минималната си стойност – съответно във върха A (фиг. 12) и във всички точки (фиг. 13) от неограничения ръб **b** с начало в точката B.

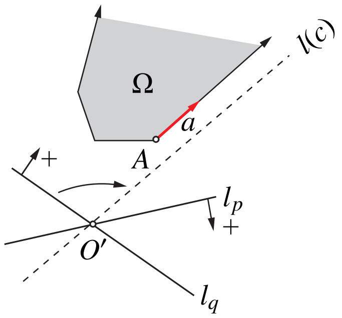


Фиг. 12

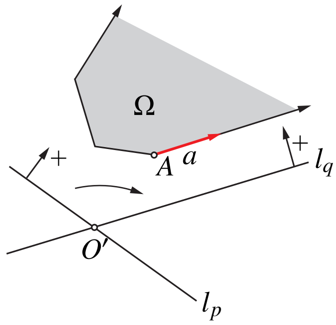


Фиг. 13

2. Фиг. 14 и 15 показват задачи (за супремум), които имат само асимптотично решение – това е посоката **a** на неограничения ръб с начало във



Фиг. 14



Фиг. 15

върха A (субоптимален план).

При геометрично решаване на хиперболични задачи се спазва следната схема:

1. Построява се областта Ω.

2. Определя се центърът O' на снопа и се построяват определящите го прави l_p и l_q.

3. Определя се знакът на разликата $q_1p_2 - p_1q_2$ (т. е. посоката на растене на функцията $h(x_1, x_2)$).

4. Определят се екстремалните точки от областта Ω и се пресмята екстремалната стойност на $h(x_1, x_2)$.

Пример 1. Да се намери

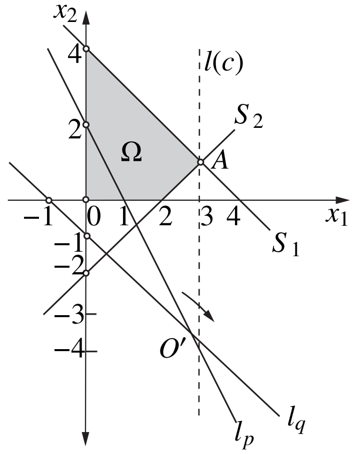
$$\sup\ (\inf)\ \left\{ h(x_1, x_2) = \frac{2x_1 + x_2 - 2}{x_1 + x_2 + 1} \right\}$$

при условия

$$\Omega : \begin{cases} x_1 + x_2 \le 4 \\ x_1 - x_2 \le 2 \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0\,. \end{cases}$$

Решение.

1. Построяваме областта Ω (фиг. 16): S_1: $x_1 + x_2 = 4$, S_2: $x_1 - x_2 = 2$, $x_1 = 0$, $x_2 = 0$.



Фиг. 16

2. Построяваме правите

$$l_p : 2x_1 + x_2 - 2 = 0, \quad l_q : x_1 + x_2 + 1 = 0.$$

   Решаваме системата от техните уравнения и намираме центъра $O' = (3, -4)$.

3. Разликата $q_1 p_2 - p_1 q_2 = -1 < 0$, следователно функцията $h(x_1, x_2)$ расте при въртене на правата $l(c)$ по посока на часовниковата стрелка.

4. Супремумът на функцията $h(x_1, x_2)$ се достига в точка A, чиито координати определяме от системата

$$\left| \begin{array}{l} x_1 + x_2 = 4 \\ x_1 - x_2 = 2. \end{array} \right.$$

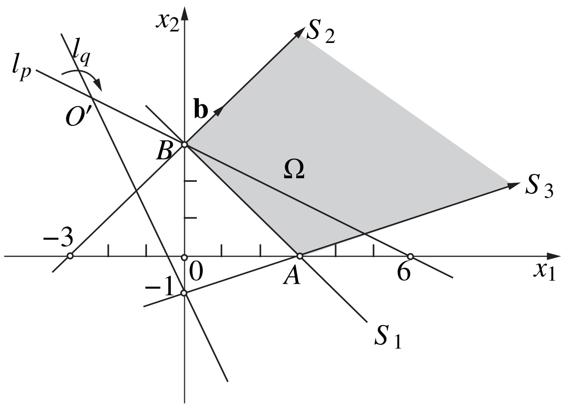
   Получаваме $A = (3, 1)$, т. е. $\sup\limits_{\Omega} h(x_1, x_2) = h(3, 1) = 1$. Инфимумът се достига в $O = (0, 0)$, т. е. $\inf\limits_{\Omega} h(x_1, x_2) = h(0, 0) = -2$.

Пример 2. Търси се

$$\sup\ (\inf)\ \left\{ h(x_1, x_2) = \frac{x_1 + 2x_2 - 6}{-2x_1 - x_2 - 1} \right\}$$

при условия

$$\Omega : \begin{cases} x_1 + x_2 \geq 3, & x_1 - 3x_2 \leq 3, \\ x_1 - x_2 \leq 3, & x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0. \end{cases}$$



Фиг. 17

Решение.

1. Построяваме областта Ω (фиг. 17):

$$S_1 : x_1 + x_2 = 3, \; S_2 : -x_1 + x_2 = 3, \; S_3 : x_1 - 3x_2 = 3, \; x_1 = 0, \; x_2 = 0.$$

2. l_p: $x_1 + 2x_2 - 6 = 0$, l_q: $-2x_1 - x_2 - 1 = 0$, $O' = \left(-\frac{8}{3}, \frac{13}{3}\right)$.

3. $q_1 p_2 - q_2 p_1 = -3 < 0$.

4. Супремумът на функцията $h(x_1, x_2)$ се достига в точката A. Решаваме системата

$$\left| \begin{aligned} x_1 + x_2 &= 3 \\ x_1 - 3x_2 &= 2. \end{aligned} \right.$$

   Получаваме $A = (3, 0)$, т. е. $\sup\limits_{\Omega} h(x_1, x_2) = h(3, 0) = \frac{3}{7}$.

Функцията $h(x_1, x_2)$ е ограничена отдолу в областта Ω, но не достига инфимум. В този случай задачата има асимптотично решение. Точката B е субоптимален план, а посоката $\mathbf{b}$ — оптимална посока. От системата

$$\left| \begin{aligned} -x_1 + x_2 &= 3 \\ x_1 &= 0 \end{aligned} \right.$$

получаваме $B = (0, 3)$.

От уравнението на правата S_2 за оптималната посока $\mathbf{b}$ получаваме $\mathbf{b} = (1, 1)$. Тогава при движение по неограничения ръб с начало върхът B (т. е. по точките $(u, 3 + u)$, $u \geq 0$) стойността на функцията $h(x_1, x_2)$ клони към границата

$$\lim_{u \to +\infty} h(u, 3 + u) = \lim_{u \to +\infty} \frac{u + 2(3 + u) - 6}{-2u - (3 + u) - 1} = -1.$$

Пример 3. Търси се

$$\sup \left\{ h(x_1, x_2) = \frac{x_1 + 2x_2 + 12}{-x_2 - 4} \right\}$$

при условия

$$\Omega : \begin{cases} 5x_1 + 4x_2 \geq 24 \\ x_1 + 2x_2 \leq 0 \\ x_1 \leq 12. \end{cases}$$

Решение.

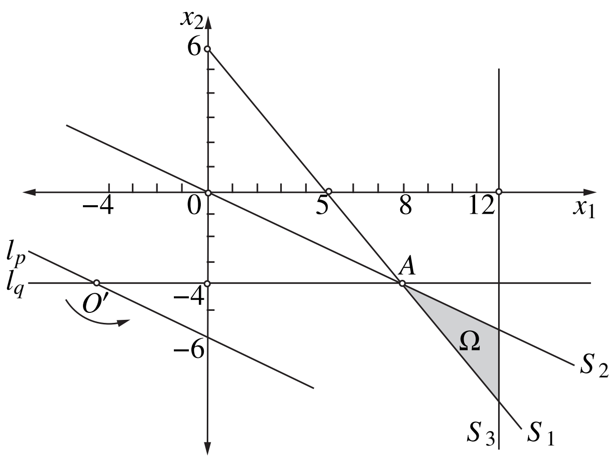
1. Построяваме областта Ω (фиг. 18):

$$S_1 : 5x_1 + 4x_2 = 24, \quad S_2 : x_1 + 2x_2 = 0, \quad S_3 : x_1 = 12.$$

2. $l_p : x_1 + 2x_2 + 12 = 0$, $l_q : -x_2 - 4 = 0$, $O' = (-4, -4)$.

3. $q_1 p_2 - q_2 p_1 = 1 > 0$. Това означава, че функцията $h(x_1, x_2)$ расте в посока, обратна на часовниковата стрелка.

4. Задачата няма решение. Функцията $h(x_1, x_2)$ е неопределена в точката $A(8, -4)$ от областта, тъй като знаменателят ѝ се анулира в тази точка.



Фиг. 18

Задачи

Да се решат геометрично следните задачи на хиперболичното оптимиране:

$$\textbf{1.}\ \sup\ (\inf)\ \left\{h(x_1, x_2) = \frac{x_1 - x_2 - 5}{3x_1 + 3x_2 - 1}\right\},\ \Omega : \begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 8 \\ 2x_1 + x_2 \le 8 \\ x_1 \ge \frac{1}{3},\ x_2 \ge \frac{1}{3}. \end{cases}$$

$$\textbf{2.}\ \sup\ \left\{h(x_1, x_2) = \frac{2x_1 + 5x_2 + 3}{3x_1 + 2x_2 - 12}\right\},\ \Omega : \begin{cases} x_1 + 3x_2 \ge 10 \\ 3x_1 - x_2 \ge 10 \\ 2x_1 - 3x_2 \le 11 \\ 2x_1 + 5x_2 \le 35 \\ x_1,\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

$$\textbf{3.}\ \sup\ \left\{h(x_1, x_2) = \frac{-4x_1 - 3x_2 - 2}{2x_1 + x_2}\right\},\ \Omega : \begin{cases} x_1 + x_2 \ge 2 \\ -x_1 + x_2 \le 4 \\ x_1 \ge 0. \end{cases}$$

$$\textbf{4.}\ \sup\ (\inf)\ \left\{h(x_1, x_2) = \frac{5x_1 + 4x_2}{2x_1 - x_2}\right\},\ \Omega : \begin{cases} 3x_1 + x_2 \ge 8 \\ x_1 + 2x_2 \ge 6 \\ x_1 - x_2 \le 3 \\ x_1,\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

$$\textbf{5.}\ \sup\ (\inf)\ \left\{h(x_1, x_2) = \frac{x_1 - 2x_2}{x_1 + 5x_2}\right\},\ \Omega : \begin{cases} 2x_1 + 2x_2 \ge 3 \\ -x_1 + 2x_2 \le 6 \\ 3x_1 - x_2 \le 9 \\ x_1,\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

$$\textbf{6.}\ \sup\ \left\{h(x_1, x_2) = \frac{x_2}{x_1 + x_2}\right\},\ \Omega : \begin{cases} x_1 - x_2 \le 2 \\ -x_1 + x_2 \le 2 \\ x_1 + x_2 \ge 2. \end{cases}$$

7. $\sup\ \left\{h(x_1, x_2) = \dfrac{1}{x_1 - 4x_2 + 8}\right\}$ при условия:

$$\textbf{7.1.}\ \Omega : \begin{cases} 2x_1 - x_2 \ge -2 \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \le 0; \end{cases} \quad \textbf{7.2.}\ \Omega : \begin{cases} 2x_1 - x_2 \ge 2 \\ 2x_1 + 3x_2 \le 6 \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \le 0; \end{cases}$$

7.3. $\Omega : \begin{cases} x_1 - 2x_2 \le -6 \\ 2x_1 + 3x_2 \ge 9 \\ x_1 \le -4. \end{cases}$

8. sup (inf) $\left\{ h(x_1, x_2) = \dfrac{x_1 - x_2 + 1}{x_1 + 4x_2 + 6} \right\}$ при условия:

8.1. $\Omega : x_1 = -2,\ -1 \le x_2 \le 0;$ **8.2.** $\Omega : x_1 - 4x_2 = -6,\ 0 \le x_1 \le 4.$

9. sup $\left\{ h(x_1, x_2) = \dfrac{x_1}{x_2 - 4} \right\}$, $\Omega : \begin{cases} 3x_1 - 2x_2 \ge -9 \\ -2x_1 + 5x_2 \le 6 \\ 2x_1 + 3x_2 \le 12 \\ x_1 \le 6 \\ 4x_1 - x_2 \le 26 \\ 3x_1 - 2x_2 \le 27. \end{cases}$

10. sup (inf) $\left\{ h(x_1, x_2) = \dfrac{x_2 - 3}{x_1 - x_2} \right\}$ при условия:

10.1. $\Omega : x_1 = 0,\ 3 \le x_2 \le 7;$ **10.2.** $\Omega : x_1 - 3x_2 = -6,\ x_1 \le 0,\ x_2 \ge 0;$

10.3. $\Omega : x_1 - x_2 \ge 0,\ x_1 \le 4,\ x_2 = 0;$ **10.4.** $\Omega : x_1 + 2x_2 = 6,\ x_1 \ge 6.$

11. sup (inf) $\left\{ h(x_1, x_2) = \dfrac{x_1 + x_2 - 1}{x_1 + 2x_2 - 4} \right\}$ при условия:

11.1. $\Omega : \begin{cases} x_1 + x_2 \le -1 \\ x_1 - x_2 \ge -3 \\ x_1 \le 0,\ x_2 \le 0; \end{cases}$ **11.2.** $\Omega : \begin{cases} x_1 - 2x_2 \ge -20 \\ x_1 + x_2 \ge 1 \\ x_1 \ge 4,\ x_2 \le 10; \end{cases}$

12. sup $\left\{ h(x_1, x_2) = \dfrac{x_2}{x_1 - x_2 - 1} \right\}$ при условия:

12.1. $\Omega : \begin{cases} x_1 + x_2 \ge 1 \\ x_1 - 2x_2 \le 0 \\ 2x_1 - x_2 \le 6 \\ 3x_1 - x_2 \le 11 \\ x_1 \le 6,\ x_2 \ge 1; \end{cases}$ **12.2.** $\Omega : \begin{cases} x_1 + 3x_2 \le -1 \\ -x_1 + 3x_2 \ge 1. \end{cases}$

13. sup $\left\{ h(x_1, x_2) = \dfrac{x_1}{7x_1 + x_2 - 1} \right\}$ при условия:

13.1. $\Omega : \begin{cases} 6x_1 + x_2 \geq 12 \\ -6x_1 + x_2 \leq 1 \\ x_1 + x_2 \geq 2 \\ x_1 + 2x_2 \geq 0 \\ x_1 \geq 1,\ x_2 \leq 9; \end{cases}$ **13.2.** $\Omega : \begin{cases} x_1 + x_2 \leq 1 \\ 5x_1 + 2x_2 \leq -10 \\ 7x_1 - 2x_2 \geq -56 \\ x_1 \leq -2. \end{cases}$

14. $\sup \left\{ h(x_1, x_2) = \dfrac{x_1 + 2x_2 - 12}{x_2 - 4} \right\}$, $\Omega : \begin{cases} x_1 - x_2 \leq 8 \\ 3x_1 + 4x_2 \leq 24 \\ -2 \leq x_2 \leq 3. \end{cases}$

15. sup (inf) $\left\{ h(x_1, x_2) = \dfrac{x_1}{x_2} \right\}$ при условия:

15.1. $\Omega : \begin{cases} x_1 - x_2 \geq 0 \\ x_1 - 2x_2 \leq 1 \\ 1 \leq x_2 \leq 3; \end{cases}$ **15.2.** $\Omega : \begin{cases} x_1 - 2x_2 \leq -8 \\ 3x_1 - 4x_2 \leq -20 \\ x_1 - x_2 \leq -5 \\ 7x_1 - x_2 \geq -45 \\ 7x_1 - x_2 \leq 7 \\ x_1 \geq -6. \end{cases}$

§ 3. Числено решаване на задачата на хиперболичното оптимиране

Ще разгледаме един от най-простите и най-често използвани методи, при който решаването на задача (1)–(3) се свежда до решаване на линейна задача чрез подходяща трансформация и при предположението, че знаменателят на целевата функция (1) не се анулира в областта (2)–(3).

Да разгледаме задача (1)–(3) в каноничен вид

$$\sup \left\{ h(\mathbf{x}) = \frac{p(\mathbf{x})}{q(\mathbf{x})} = \frac{p_0 + \sum_{j=1}^{n} p_j x_j}{q_0 + \sum_{j=1}^{n} q_j x_j} \right\} \tag{7.1$'$}$$

при условия (ограничения)

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, \quad i = 1, \ldots, m, \tag{7.2$'$}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, \ldots, n. \tag{7.3$'$}$$

Областта (7.2′)–(7.3′) означаваме с Ω'. Ще казваме, че задача (7.1′)–(7.3′) е *решима* тогава и само тогава, когато съществува точка $\mathbf{x}^* \in \Omega'$, за която $h(\mathbf{x}^*) = \sup_{\Omega'} h(\mathbf{x})$.

Предполагаме, че $q(\mathbf{x}) \neq 0$ за всяко $\mathbf{x} \in \Omega'$. Тъй като $q(\mathbf{x})$ е непрекъсната функция, това означава, че тя запазва постоянен знак в Ω'. За определеност ще считаме, че $q(\mathbf{x}) > 0$ в Ω'.

При тези условия задача (7.1′)–(7.3′) може да се сведе до линейна задача по следния начин: Полагаме $y_0 = \dfrac{1}{q(\mathbf{x})}$ и въвеждаме новите променливи $y_j = y_0 x_j$, $j = 1, \ldots, n$. Тогава задача (7.1′)–(7.3′) добива вида

$$\max \left\{ l(\mathbf{y}) = \sum_{j=0}^{n} p_j y_j \right\} \tag{7.1''}$$

при условия

$$\sum_{j=0}^{n} a_{ij} y_j = 0, \qquad i = 1, \ldots, m, \tag{7.2''}$$

$$\sum_{j=0}^{n} q_j y_j = 1, \tag{7.3''}$$

$$y_j \geq 0, \qquad j = 0, \ldots, n, \tag{7.4''}$$

където $\mathbf{y} = (y_0, \ldots, y_n)$, $a_{i0} = -b_i$, $i = 1, \ldots, m$, а Ω'' е областта, определена от условия (7.2″)–(7.4″).

Връзката между задачи (7.1′)–(7.3′) и (7.1″)–(7.4″) се дава от следните теореми:

Теорема 2. Ако $\mathbf{x}' = (x'_1, \ldots, x'_n)$ е план на хиперболичната задача (7.1′)–(7.3′), то $\mathbf{y}' = \dfrac{1}{q(\mathbf{x})}(1, x'_1, \ldots, x'_n)$ е план на линейната задача (7.1″)–(7.4″). Ако $\bar{\mathbf{y}} = (\bar{y}_0, \bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_n)$ е план на линейната задача (7.1″)–(7.4″) и $\bar{y}_0 > 0$, то векторът $\bar{\mathbf{x}} = \dfrac{1}{\bar{y}_0}(\bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_n)$ е план на изходната задача (7.1′)–(7.3′). При това за всеки два съответни плана $\bar{\mathbf{x}}$ и $\bar{\mathbf{y}}$ имаме $\bar{y}_0 = \dfrac{1}{q(\bar{\mathbf{x}})}$ и $h(\bar{\mathbf{x}}) = l(\bar{\mathbf{y}})$.

Теорема 3. Ако $q(\mathbf{x}) > 0$ за всяко $\mathbf{x} \in \Omega'$, то компонентата y_0 е ограничена отгоре при $\mathbf{y} \in \Omega''$.

Теорема 4. Задача (1′)–(3′) е решима ($q(\mathbf{x}) > 0$ за всяко $\mathbf{x} \in \Omega'$) тогава и само тогава, когато е решима линейната задача (7.1″)–(7.4″) и за поне един оптимален план $\mathbf{y}^* = (y_0^*, y_1^*, \ldots, y_n^*)$ имаме $y_0^* > 0$. При това $\mathbf{x}^* = \dfrac{1}{y_0^*}(y_1^*, \ldots, y_n^*)$ е оптимален план за задача (7.1′)–(7.3′) и $h(\mathbf{x}^*) = l(\mathbf{y}^*)$.

Теорема 5. Ако $\mathbf{x}^* = (x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*)$ е опорен оптимален план на задача (7.1′)–(7.3′), то векторът $\mathbf{y}^* = \dfrac{1}{q(\mathbf{x}^*)}(1, x_1^*, \ldots, x_n^*)$ е опорен оптимален план на линейната задача (7.1″)–(7.4″).

На базата на тези теореми решаването на хиперболичната задача (1)–(3) се свежда до намирането на оптимален план на линейната задача (7.1″)–(7.4″), чиято компонента y_0 е строго положителна.

По-нататък решаването на хиперболични задачи ще извършваме по следния алгоритъм:

1. Привеждаме задачата в каноничен вид (7.1′)–(7.3′).

2. Получаваме линейна задача (7.1″)–(7.4″) и я решаваме със симплекс-метода:

   а) задачата няма решение; хиперболичната задача също няма решение; преминаваме към т. 4.

   б) задачата има решение; преминаваме към т. 3.

3. В зависимост от стойностите на y_0 са възможни случаите:

   а) $y_0^* > 0$. Хиперболичната задача има решение $\mathbf{x}^* = \dfrac{1}{y_0^*}(y_1^*, \ldots, y_n^*)$ и $\sup\limits_{\Omega} h(\mathbf{x}) = l(\mathbf{y}^*)$; преминаваме към т. 4.

   б) $y_0^* = 0$ и $\Delta_0^* < 0$. Хиперболичната задача няма решение (отново към т. 4).

   в) $y_0^* = 0$ и $\Delta_0^* = 0$. Решава се следната спомагателна линейна задача:

   $$(7.1''') \qquad \max\{y_0\} \qquad \text{при условия}$$
   $$(7.2''') \qquad \sum_{j \in J} \alpha_{ij}^* y_j = \beta_i^*, \qquad i = 1, \ldots, m,$$
   $$(7.3''') \qquad y_j \geq 0, \qquad j \in J,$$

   където J е множеството от индексите j $(0 \leq j \leq n)$, за които $\Delta_j^* = 0$, а α_{ij}^*, β_i^* са съответните коефициенти от последната симплексна таблица на линейната задача то т. 2. Индексният ред на началната таблица на задача (7.1‴)–(7.3‴) се получава така:

   - ако y_0 е небазисна променлива, в индексния ред се записват коефициентите на целевата функция (7.1″);

- ако y_0 е базисна променлива (например k-тата поред в базиса), то в индексния ред се записват съответните коефициенти α^*_{kj}, $j \in J$.

Решаването на задача (7.1‴)–(7.3‴) може да доведе до следните случаи:

I) получен е план $\bar{\mathbf{y}}$, за който $\bar{y}_0 > 0$; хиперболичната задача има решение $\mathbf{x}^* = (x^*_1, x^*_2, \dots, x^*_n)$, където

$$x^*_j = \frac{\bar{y}_j}{\bar{y}_0} \text{ за } j \in J, \qquad x^*_j = 0 \text{ за } j \notin J \qquad \sup_{\Omega} h(\mathbf{x}) = l(\mathbf{y}^*);$$

II) получен е оптимален план, за който $\bar{y}_0 = 0$; хиперболичната задача няма решение, преминаваме към т. 4;

III) компонентата y_0 расте неограничено. Знаменателят $q(\mathbf{x})$ се анулира в областта (2′)–(3′) — също към т. 4.

4. Край.

Пример 4. Да се реши задачата

$$\sup\left\{h(x_1, x_2) = \frac{3x_1 - x_2}{x_1 + x_2}\right\},$$

$$\begin{array}{rcl} x_1 + x_2 + x_3 & = & 5, \\ -x_1 + 3x_2 + x_4 & = & 7, \\ 3x_1 - x_2 + x_5 & = & 11, \end{array}$$

$$x_j \geq 0, \ j = 1, \dots, 5.$$

Решение.

1. Задачата е в каноничен вид. Предполагаме, че $q(\mathbf{x}) = x_1 + x_2 > 0$.

2. Полагаме $y_0 = \dfrac{1}{x_1 + x_2}$, $y_j = y_0 x_j$, $j = 1, \dots, 5$. Получаваме задачата:

$$\max\{l(\mathbf{y}) = 3y_1 - y_2\}$$

$$\begin{array}{rcl} 5y_0 - y_1 + y_2 + y_3 & = & 0, \\ -7y_0 - y_1 + 3y_2 + y_4 & = & 0, \\ -11y_0 + 3y_1 - y_2 + x_5 & = & 0, \\ y_1 + y_2 & = & 1, \end{array}$$

$$y_j \geq 0, \ j = 0, \dots, 5.$$

която е линейна. Решаваме тази задача със симплекс-метода и на последната итерация получаваме таблицата

B	$\mathbf{c}^B$	$\boldsymbol{\beta}$	y_0	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5
			0	3	−1	0	0	0
y_0	0	$\frac{1}{5}$	1	0	0	$\frac{1}{5}$	0	$\frac{1}{10}$
y_4	0	$\frac{8}{5}$	0	0	0	$\frac{18}{5}$	1	$\frac{9}{5}$
y_1	3	$\frac{4}{5}$	0	1	0	$\frac{11}{20}$	0	$\frac{3}{20}$
y_2	−1	$\frac{1}{5}$	0	0	1	$-\frac{11}{20}$	0	$-\frac{3}{20}$
		$\frac{11}{5}$	0	0	0	$-\frac{11}{5}$	0	$-\frac{21}{10}$

Решението на линейната задача е $\mathbf{y}^* = \left(\frac{1}{5}, \frac{4}{5}, \frac{1}{5}, 0, \frac{8}{5}, 0\right)$, $l(\mathbf{y}^*) = \frac{11}{5}$. Тъй като $y_0^* = \frac{1}{5} > 0$, хиперболичната задача има решение $\mathbf{x}^* = (4, 1, 0, 8, 0)$, $h(\mathbf{x}^*) = \frac{11}{5}$.

Пример 5. Да се реши задачата

$$\sup\left\{h(x_1, x_2, x_3) = \frac{-2x_1 + 3x_3 + 4}{x_1 + x_2 + 1}\right\},$$

$$\begin{aligned} -2x_1 + x_2 \quad\quad &\le 0, \\ -3x_1 + x_2 + x_3 &= 1, \\ x_j \ge 0,\ j = 1, 2, 3.& \end{aligned}$$

Решение.

1. Привеждаме условията в каноничен вид:

$$\begin{aligned} -2x_1 + x_2 \quad\quad + x_4 &= 0, \\ -3x_1 + x_2 + x_3 \quad\quad &= 1, \\ x_j \ge 0,\ j = 1, 2, 3, 4.& \end{aligned}$$

Предполагаме, че $q(\mathbf{x}) = x_1 + x_2 + 1 > 0$.

2. Съответната линейна задача е:

$$\max\{l(\mathbf{y}) = 4y_0 - 2y_1 + 3y_3\},$$

$$\begin{aligned} -2y_1 + y_2 \quad\quad + y_4 &= 0, \\ -y_0 - 3y_1 + y_2 + y_3 \quad\quad &= 0, \\ y_0 + y_1 + y_2 \quad\quad &= 1, \\ y_j \ge 0,\ j = 1, 2, 3, 4.& \end{aligned}$$

Тази задача свеждаме да M-задачата:

$$\max\{l_M(\mathbf{y}) = 4y_0 - 2y_1 + 3y_3 - My_5\},$$

$$\begin{aligned} - 2y_1 + y_2 \quad + y_4 \quad &= 0,\\ -y_0 - 3y_1 + y_2 + y_3 \quad &= 0,\\ y_0 + y_1 + y_2 \quad + y_5 &= 1,\\ y_j \geq 0,\ j = 1, \dots, 5. \end{aligned}$$

Последната симплексна таблица на M-задачата е:

$\mathbf{B}$	$\mathbf{c}^B$	$\boldsymbol{\beta}$	y_0 4	y_1 -2	y_2 0	y_3 3	y_4 0	y_5 $-M$
y_4	0	2	2	0	3	0	1	2
y_3	3	3	2	0	4	1	0	3
y_1	-2	1	1	1	1	0	0	1
		-7	0	0	-10	0	0	-7
		0	0	0	0	0	0	-1

От таблицата се вижда, че решението на M-задачата е

$$y_M^* = (0, 1, 0, 3, 2, 0), \quad l_M(\mathbf{y}_M^*) = 7.$$

Тъй като $y_5^* = 0$, то решението на първоначалната линейна задача е

$$y^* = (0, 1, 0, 3, 2), \quad l(\mathbf{y}^*) = 7.$$

3. За този оптимален план имаме $y_0^* = 0$ и $\Delta_0^* = 0$, т.е. точка 3, в) от алгоритъма. Решаваме спомагателната линейна задача

$$\max y_0$$

при условия

$$\begin{aligned} 2y_0 \quad + y_4 &= 2,\\ 2y_0 \quad + y_3 \quad &= 3,\\ y_0 + y_1 \quad &= 1,\\ y_j \geq 0,\ j = 0, 1, 3, 4. \end{aligned}$$

Началната симплексна таблица се получава директно от горната таблица чрез зачертаване на стълба y_2, а индексният ред съвпада с коефициентите на целевата функция, тъй като y_0 не е базисна променлива за оптималния план y^*:

$\mathbf{B}$	$\mathbf{c}^B$	$\boldsymbol{\beta}$	y_0 4	y_1 -2	y_3 3	y_4 0
y_4	0	2	$\boxed{2}$	0	0	1
y_3	3	3	2	0	1	0
y_1	-2	1	1	1	0	0
		0	1	0	0	0
y_0	4	1	1	0	0	$\frac{1}{2}$
y_3	3	1	0	0	1	-1
y_1	-2	0	0	1	0	$-\frac{1}{2}$
		-1	0	0	0	$-\frac{1}{2}$

Решението на спомагателната задача е $y_0^* = 1$, $y_1^* = 0$, $y_3^* = 1$, $y_4^* = 0$ и тъй като $y_0^* = 1 > 0$, то планът $\mathbf{x}^* = (0, 0, 1, 0)$ е решение на хиперболичната задача, а $h(\mathbf{x}^*) = 7$.

Дотук предполагаме, че знаменателят $q(\mathbf{x}) > 0$. На практика обаче знакът на $q(\mathbf{x})$ върху областта Ω обикновено не е известен и определянето му не е тривиално. Ако в действителност $q(\mathbf{x}) < 0$ за $\mathbf{x} \in \Omega$, при решаване на линейната задача (7.1″)–(7.4″) ще попаднем на случая, когато задачата няма решение поради несъвместимост на системата (7.2″)–(7.3″). Тогава полагаме $h(\mathbf{x}) = \dfrac{-p(\mathbf{x})}{-q(\mathbf{x})}$, т. е. в линейната задача целевата функция ще стане $l(\mathbf{y}) = -\sum\limits_{j=0}^{n} p_j y_j$, а условие (7.3″) ще добие вида $-\sum\limits_{j=1}^{n} q_j y_j = 1$.

Задачи

1. Да се решат следните хиперболични задачи чрез свеждане към линейни задачи:

1.1. $\inf\left\{h(\mathbf{x}) = \dfrac{x_1 + 3x_2}{x_1 + x_2 + 2}\right\}$,

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 - x_3 \qquad\qquad &= 4,\\ 3x_1 - x_2 \qquad + x_4 \qquad &= 6,\\ x_1 + x_2 \qquad\qquad + x_5 &= 3,\\ x_j \ge 0,\ j = 1, \dots, 5; \end{aligned}$$

1.2. $\sup\left\{h(\mathbf{x}) = \dfrac{-1 + 2x_1 + 2x_2 + x_3}{1 + 2x_2 - x_4}\right\},$

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} -x_1 & + & x_2 & + & x_3 & & & = & 0, \\ & - & x_2 & & & + & x_4 & = & 2, \end{array}$$
$$x_j \geq 0, \ \ j = 1, 2, 3, 4;$$

1.3. $\inf\left\{h(\mathbf{x}) = \dfrac{x_1 - 2x_2}{3x_1 + x_2 + 2}\right\},$

$$\begin{array}{rcrcr} 3x_1 & + & x_2 & \geq & 7, \\ -x_1 & + & 4x_2 & \leq & 5, \\ 4x_1 & - & 3x_2 & \leq & 17, \end{array}$$
$$x_1 \geq 0, \ \ x_2 \geq 0;$$

1.4. $\sup\left\{h(\mathbf{x}) = \dfrac{5x_1 + 2x_2}{x_1 - 4x_3}\right\},$

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} 1 \leq & & x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & \leq & 2, \\ & & 2x_1 & & & + & x_3 & = & 5, \\ & & & & 3x_2 & - & x_3 & \geq & 4, \end{array}$$
$$2 \leq x_1 \leq 10, \ \ x_2 \geq 0;$$

1.5. $\sup\left\{h(\mathbf{x}) = \dfrac{x_1 + 2x_2 - 20}{x_2 - 4}\right\},$

$$\begin{array}{rcrcr} 5x_1 & - & 4x_2 & \geq & 24, \\ x_1 & - & 2x_2 & \leq & 2, \end{array}$$
$$0 \leq x_1 \leq 15, \ \ x_2 \geq 4;$$

1.6. $\sup\left\{h(\mathbf{x}) = \dfrac{x_1 + x_2}{-14x_1 - 18x_2 - 16x_3 - 80x_4}\right\},$

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} 4{,}5x_1 & + & 8{,}5x_2 & + & 6x_3 & + & 20x_4 & \leq & 6000, \\ x_1 & + & x_2 & + & 4x_3 & + & 40x_4 & \leq & 4000, \\ -14x_1 & - & 18x_2 & - & 16x_3 & - & 80x_4 & = & 0, \end{array}$$
$$x_j \geq 0, \ \ j = 1, \ldots, 4;$$

1.7. $\inf\left\{h(\mathbf{x}) = \dfrac{3x_1 - x_2 + x_3}{x_1 + x_2 + x_3}\right\},$

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + x_3 &\le 12, \\ -3x_1 - 2x_2 - 2x_3 &\ge -18, \\ 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 &\ge 18, \\ x_j \ge 0, \quad j = 1, 2, 3; \end{aligned}$$

1.8. $\inf(\sup)\left\{h(\mathbf{x}) = \dfrac{2x_1 + x_2 + x_3 + 1}{3x_1 + x_2 + 4x_3 + 2}\right\},$

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &\le 4, \\ x_1 \qquad\qquad &\le 2, \\ x_j \ge 0, \ j = 1, 2, 3; \end{aligned}$$

1.9. $\inf\left\{h(\mathbf{x}) = \dfrac{5x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 + x_5}{2x_1 + x_2 + 3x_3}\right\},$

$$\begin{aligned} x_1 \quad + 4x_3 + 2x_4 - x_5 &= 8, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 + 2x_5 &= 14, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 - x_4 + x_5 &= 7, \\ x_j \ge 0, \ j = 1, \ldots, 5; \end{aligned}$$

1.10. $\sup\left\{h(\mathbf{x}) = \dfrac{x_1 + x_2 + x_3}{3x_1 + 2x_2 + x_3}\right\},$

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 + 2x_3 &\le 6, \\ 2x_1 + 4x_2 + 5x_3 &\le 2, \\ 4x_1 + 2x_2 + x_3 &= 12, \\ x_j \ge 0, \ j = 1, 2, 3; \end{aligned}$$

1.11. $\sup(\inf)\left\{h(\mathbf{x}) = \dfrac{3x_1 + x_2 + x_3}{x_1 + 2x_3 - 3}\right\},$

$$\begin{aligned} 3x_1 - 2x_2 + x_3 &\le 2, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 &\ge 2, \\ -x_1 + x_2 + 4x_3 &\le 4, \\ x_j \ge 0, \ j = 1, 2, 3; \end{aligned}$$

1.12. $\sup\left\{h(\mathbf{x}) = \dfrac{-x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4}{4x_1 + 3x_3 + x_4}\right\}$,

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + x_3 \phantom{{}-3x_4} &= 6, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 - 3x_4 &= 6, \\ x_1 \phantom{{}+x_2} + 3x_3 + x_4 &= 16, \\ x_j \geq 0,\ j = 1, \ldots, 4; \end{aligned}$$

1.13. $\sup\left\{h(\mathbf{x}) = \dfrac{x_1 + x_2}{x_1 + x_2 + x_3}\right\}$,

$$\begin{aligned} x_1 - 3x_2 + x_3 &\leq -5, \\ x_1 + x_2 - 5x_3 &\geq 5, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 &\leq 10, \\ x_j \geq 0,\ j = 1, 2, 3; \end{aligned}$$

1.14. $\inf\left\{h(\mathbf{x}) = \dfrac{4x_1 - x_2 + x_3 + 3}{3x_1 - x_2 + 2x_3 + 1}\right\}$,

$$\begin{aligned} 4x_1 - x_2 + 2x_3 &= 2, \\ -3x_1 + 2x_2 + x_3 &= 6, \\ x_j \geq 0,\ j = 1, 2, 3. \end{aligned}$$

Отговори и решения

§ 2. Геометрично решаване на задачата на хиперболичното оптимиране

1. sup: $\mathbf{x}^* = \left(\frac{23}{6}, \frac{1}{3}\right)$, $h(\mathbf{x}^*) = -\frac{3}{23}$; inf: $\mathbf{x}^* = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$, $h(\mathbf{x}^*) = -5$.

2. $\mathbf{x}^* = (4, 2)$, $h(\mathbf{x}^*) = \frac{21}{4}$.

3. Асимптотично решение: субоптимален план $(0, 2)$, оптимална посока $(1, -1)$, асимптотична стойност -1.

4. Няма решение.

5. sup: $\mathbf{x}^* = \left(\frac{3}{2}, 0\right)$, $h(\mathbf{x}^*) = 1$; inf: $\mathbf{x}^* = \left(0, \frac{3}{2}\right)$, $h(\mathbf{x}^*) = -\frac{2}{5}$.

6. $\mathbf{x}^* = (0, 2)$, $h(\mathbf{x}^*) = 1$.

7.1. $\mathbf{x}^* = (0, 0)$, $h(\mathbf{x}^*) = \frac{1}{8}$.

7.2. $\mathbf{x}^* = (1, 0)$, $h(\mathbf{x}^*) = \frac{1}{9}$.

7.3. $\mathbf{x}^* = \left(-4, \frac{17}{3}\right)$, $h(\mathbf{x}^*) = -\frac{1}{18}$.

8.1. $\mathbf{x}^* = (-2, 0)$, $h(\mathbf{x}^*) = -\frac{1}{4}$.

8.2. Няма решение.

9. $\mathbf{x}^* = (-3, 0)$, $h(\mathbf{x}^*) = \frac{3}{4}$.

10.1. sup: $\mathbf{x}^* = (0, 3)$, $h(\mathbf{x}^*) = 0$.

10.2. sup: $\mathbf{x}^* = (-6, 0)$, $h(\mathbf{x}^*) = \frac{1}{2}$.

10.3. sup: $\mathbf{x}^* = (4, 0)$, $h(\mathbf{x}^*) = -\frac{3}{4}$.

10.4. Асимптотично решение: субоптимален план $(6, 0)$, оптимална посока $(2, -1)$, асимптотична стойност $-\frac{1}{3}$.

11.1. Асимптотично решение за sup: субоптимален план $(-3, 0)$, оптимална посока $(-1, -1)$, асимптотична стойност $\frac{2}{3}$; inf: $\mathbf{x}^* = (0, -1)$, $h(\mathbf{x}^*) = \frac{1}{3}$.

11.2. Асимптотично решение за sup: субоптимален план $(-3, 4)$, оптимална посока $(1, 0)$, асимптотична стойност 1; inf: $\mathbf{x}^* = (-6, 7)$, $h(\mathbf{x}^*) = 0$.

12.1. Няма решение.

12.2. Асимптотично решение: субоптимален план $(-1, 0)$, оптимална посока $(-3, -1)$, асимптотична стойност $\frac{1}{2}$.

13.1. sup: $\mathbf{x}^* = (4, -2)$, $h(\mathbf{x}^*) = \frac{4}{25}$.

13.2. sup: $\mathbf{x}^* = (-4, 5)$, $h(\mathbf{x}^*) = \frac{1}{6}$.

14. Няма решение.

15.1. sup: $\mathbf{x}^* = (3, 1)$, $h(\mathbf{x}^*) = 3$; inf: $\mathbf{x}^* = (1, 1)$, $h(\mathbf{x}^*) = 1$.

15.2. sup: $\mathbf{x}^* = (2, 7)$, $h(\mathbf{x}^*) = \frac{2}{7}$; inf: $\mathbf{x}^* = (-6, 1)$, $h(\mathbf{x}^*) = -6$.

§ 3. Числено решаване на задачата на хиперболичното оптимиране

1.1. $\mathbf{x}^* = (2{,}2, 0{,}6, 0, 0, 0{,}2)$, $h(\mathbf{x}^*) = \frac{5}{6}$.

1.2. Няма решение.

1.3. $\mathbf{x}^* = (1{,}76, 1{,}69)$, $h(\mathbf{x}^*) = -0{,}179$.

1.4. $\mathbf{x}^* = (3, 1, -1)$, $h(\mathbf{x}^*) = 2{,}429$.

1.5. $\mathbf{x}^* = (15, 6{,}5)$, $h(\mathbf{x}^*) = 3{,}2$.

1.6. Няма решение.

1.7. $\mathbf{x}^* = (0, 6, 0)$, $h(\mathbf{x}^*) = -1$.

1.8. inf: $\mathbf{x}^* = (0, 0, 4)$, $h(\mathbf{x}^*) = \frac{5}{18}$; sup: $\mathbf{x}^* = (0, 4, 0)$, $h(\mathbf{x}^*) = \frac{5}{6}$.

1.9. $\mathbf{x}^* = (0, 0, 3, 0, 4)$, $h(\mathbf{x}^*) = \frac{10}{9}$.

1.10. $\mathbf{x}^* = \left(\frac{18}{7}, 0, \frac{12}{7}\right)$, $h(\mathbf{x}^*) = \frac{5}{11}$.

1.11. Няма решение.

1.12. $\mathbf{x}^* = \left(\frac{2}{3}, 0, \frac{14}{3}, \frac{4}{3}\right)$, $h(\mathbf{x}^*) = \frac{10}{9}$.

1.13. $\mathbf{x}^* = \left(\frac{1}{2}, 0, 0\right)$, $h(\mathbf{x}^*) = 2$.

1.14. $\mathbf{x}^* = (2, 3, 0)$, $h(\mathbf{x}^*) = 1$.

Глава 8

Квадратично оптимиране

§ 1. Кратки предварителни сведения

Определение 1. Функцията

$$f(\mathbf{x}) = f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_i x_j$$

се нарича *квадратична форма*. Ако $c_{ij} = c_{ji}$, квадратичната форма може да се запише във вида $f(\mathbf{x}) = \langle \mathbf{Cx}, \mathbf{x} \rangle$, където $\mathbf{C} = (c_{ij})_{n \times n}$ е квадратна симетрична матрица.

Определение 2. Квадратната симетрична матрица $\mathbf{C}$ се нарича *неотрицателно дефинитна* или *положително полудефинитна*, ако $\langle \mathbf{Cx}, \mathbf{x} \rangle \geq 0$ за всяко $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$; нарича се *положително дефинитна*, ако $\langle \mathbf{Cx}, \mathbf{x} \rangle > 0$ за всяко $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$. Матрицата $\mathbf{C}$ се нарича *отрицателно дефинитна* (*полудефинитна*), ако матрицата $-\mathbf{C}$ е положително дефинитна (полудефинитна).

Видът на матрицата $\mathbf{C}$ се отнася и до свързаната с нея квадратична форма.

Свойства, еквивалентни със свойството положителна дефинитност (полудефинитност) на симетрична матрица $\mathbf{C}$, са:

а) всички главни минори на $\mathbf{C}$ са положителни (неотрицателни);

б) всички собствени стойности на $\mathbf{C}$ са положителни (неотрицателни).

Привеждаме още няколко свойства.

1. Нека $\mathbf{C} = (c_{ij})_{n \times n}$ е положително полудефинитна (дефинитна) матрица.

а) от равенството $\langle \mathbf{Cx}, \mathbf{x} \rangle = \mathbf{0}$ ($\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$) следва $\mathbf{Cx} = \mathbf{0}$;

б) матрицата $\mathbf{ACA}$ е положително полудефинитна за произволна матрица $\mathbf{A}_{n \times m}$.

2. Всяка положително дефинитна матрица е неособена.

3. $\mathbf{C}^{-1}$ е положително дефинитна заедно с $\mathbf{C}$.

Теорема 1. Функцията $f(\mathbf{x}) = \langle \mathbf{Cx}, \mathbf{x} \rangle$ е изпъкнала (строго изпъкнала) тогава и само тогава, когато $\mathbf{C}$ е положително дефинитна (полудефинитна) матрица.

Ако $\mathbf{C}$ е ненулева квадратна симетрична матрица, функцията $f(\mathbf{x}) = \langle \mathbf{Cx}, \mathbf{x} \rangle + \langle \mathbf{p}, \mathbf{x} \rangle$, където $\mathbf{p}$ е произволен вектор, наричаме *квадратична функция*.

Задачи

1. Докажете свойство 1.

2. Докажете свойство 3.

3. Нека $\mathbf{B}$ е матрица с размери $m \times n$ ($m \geq n$) с линейно независими стълбове. Докажете, че матрицата $\mathbf{C} = \mathbf{BB}$ от ред n е симетрична и положително дефинитна.

4. Нека $\mathbf{C}$ е квадратна симетрична матрица. Покажете, че произволна пермутация на редовете (и на съответните стълбове) на $\mathbf{C}$ не променя дефинитността на $\mathbf{C}$.

5. Нека $\mathbf{A}$ е квадратна (не непременно симетрична) матрица $n \times n$, за която $\langle \mathbf{Ax}, \mathbf{x} \rangle \geq 0$ за всеки вектор $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. Покажете, че за елементите a_{ij}, $i, j = 1, \ldots, n$, на $\mathbf{A}$ е изпълнено $a_{ii} \geq 0$, $i = 1, \ldots, n$. Ако $a_{ii} = 0$, то $a_{ij} + a_{ji} = 0$ за всяко $j = 1, \ldots, n$. Покажете, че $\langle \mathbf{Ax}, \mathbf{x} \rangle \geq 0$ за всеки вектор $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ и матрица $\mathbf{A} = (a_{ij})_{n \times n}$, за която $a_{ij} = -a_{ji}$, $a_{ii} \geq 0$.

6. Нека $\mathbf{C}_1$ с размери $m_1 \times n_1$ и $\mathbf{C}_2$ с размери $m_2 \times n_2$ са положително полудефинитни матрици, а $\mathbf{A}$ (с размери $n_1 \times m_2$) е произволна матрица. Покажете, че за матрицата

$$\mathbf{M} = \left(\begin{array}{c|c} \mathbf{C}_1 & \mathbf{A} \\ \hline -\mathbf{A} & \mathbf{C}_2 \end{array} \right)$$

е изпълнено $\langle \mathbf{Mx}, \mathbf{x} \rangle \geq 0$ за произволен вектор $\mathbf{x}$ (със съответна размерност).

7. Кои от следните квадратични функции са изпъкнали:

а) $x_1^2 - 3x_1x_2 + x_2^2$;

б) $x_1^2 - x_2^2$;

в) $(x_1 - x_2 - x_3)(x_1 + x_2 + x_3)$;

г) x_1x_2;

д) $x_1^2 + x_1x_2 + x_22$;

е) $(x_1 - x_2 + x_3 - x_4)^2$.

8. Посочете примери на изпъкнала квадратична функция на n променливи.

9. Посочете пример в който $\langle \mathbf{Cx}, \mathbf{x} \rangle$ не е изпъкнала в $\mathbb{R}^n$, но е изпъкнала в подмножество на $\mathbb{R}^n$.

10. Докажете, че всяка строго изпъкнала квадратична функция е силно изпъкнала.

Забележка. Функцията $f(\mathbf{x})$ се нарича *силно изпъкнала*, ако при произволни $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$ е изпълнено

$$f\left(\frac{1}{2}\mathbf{x}_1 + \frac{1}{2}\mathbf{x}_2\right) \leq \frac{1}{2}[f(\mathbf{x}_1) + f(\mathbf{x}_2) - \alpha \langle \mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1 \rangle],$$

където $\alpha > 0$ е произволно малко число. Ако $f(\mathbf{x})$ е два пъти непрекъснато диференцуема, то условието силна изпъкналост е еквивалентно на условието $\langle f''(\mathbf{x})\mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle \geq \gamma \langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle$ за произволно число $\gamma > 0$ и произволен вектор $\mathbf{y}$.

§ 2. Формулировка и свойства на задачата на квадратичното оптимиране

Общата задача на квадратичното оптимиране е

$$\min \left\{ f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_i x_j + \sum_{j=1}^{n} p_j x_j \right\} \tag{1}$$

при условия

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i, \quad i = 1, \dots, s, \tag{2}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, \quad i = s+1, \dots, m, \tag{3}$$

(4) $$x_j \geq 0,\ j = 1, \dots, p, \quad p \leq n.$$

Коефициентите c_{ij}, $i, j = 1, \dots, n$, определят квадратна симетрична матрица $\mathbf{C} = (c_{ij})$. Когато $\mathbf{C}$ е положително дефинитна (полудефинитна), (1)–(4) е задача на изпъкналото оптимиране. Тук ще разгледаме именно тази задача и нея ще наричаме *задача на квадратичното оптимиране*.

Ще разгледаме една задача от практиката, която често се решава като задача на квадратичното оптимиране.

Пример 1. За определяне на процентното съдържание x_j, $j = 1, \dots, n$, на n компоненти в дадена смес са съставени уравненията

(5) $$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, \quad i = 1, \dots, m,$$

в които коефициентите a_{ij}, b_i са получени по експериментален път. Да се определят приближено количествата x_j.

Решение. Определянето на неизвестните x_j чрез решаване на системата (5) може да бъде затруднено от евентуална несъвместимост на системата (най-често $m > n$). Свеждаме задачата към следната

$$\min \left\{ \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j - b_i \right)^2 \right\}, \quad \sum_{j=1}^{n} x_j = 100, \quad x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, n,$$

която е задача на квадратичното оптимиране.

Една от често срещаните формулировки на задача (1)–(4) е при $s = m$, $p = n$. Записана във векторно-матрична форма, това е задачата

(6) $$\min \{ f(\mathbf{x}) = \langle \mathbf{Cx}, \mathbf{x} \rangle + \langle \mathbf{p}, \mathbf{x} \rangle : \mathbf{Ax} \leq \mathbf{b},\ \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \}.$$

Произволна задача на квадратичното оптимиране може да бъде сведена към задача (6).

Теорема 2. Задача (1)–(4) има решение тогава и само тогава, когато множеството, определено от (2)–(4), е непразно и функцията (1) е ограничена отдолу в това множество.

Теорема 3 (условия на Кун — Такър за задача (6))**.** Векторът $\mathbf{x}^* \in \mathbb{R}^n$ е решение на задача (6) тогава и само тогава, когато съществуват вектори $\mathbf{u}^* \in \mathbb{R}^m$, $\mathbf{y}^* \in \mathbb{R}^m$, $\mathbf{v}^* \in \mathbb{R}^n$, които заедно с $\mathbf{x}^*$ удовлетворява системата

(7) $$\mathbf{Ax} + \mathbf{y} = \mathbf{b},$$

(8) $$2\mathbf{Cx} - \mathbf{v} + \mathbf{Au} = -\mathbf{p},$$

(9) $$\mathbf{x} \geq \mathbf{0},\ \mathbf{y} \geq \mathbf{0},\ \mathbf{u} \geq \mathbf{0},\ \mathbf{v} \geq \mathbf{0},$$

(10) $$\langle \mathbf{x}, \mathbf{v} \rangle + \langle \mathbf{y}, \mathbf{u} \rangle = 0.$$

Теорема 4. Задача (6) има решение тогава и само тогава, когато системата (7)–(9) има решение.

Теорема 5 (теорема за включване)**.** Нека $\widetilde{\mathbf{x}}$, $\widetilde{\mathbf{y}}$, $\widetilde{\mathbf{u}}$, $\widetilde{\mathbf{v}}$ удовлетворяват системата (7)–(9) и нека $\mathbf{x}^*$ е решение на задача (6). Изпълнени са неравенствата

$$f(\widetilde{\mathbf{x}}) - \langle \widetilde{\mathbf{x}}, \widetilde{\mathbf{v}} \rangle - \langle \widetilde{\mathbf{y}}, \widetilde{\mathbf{u}} \rangle \le f(\mathbf{x}^*) \le f(\widetilde{\mathbf{x}}).$$

Задачи

1. Докажете теорема 2 за случая, когато $f(\mathbf{x})$ е строго изпъкнала квадратична функция. Валидна ли е аналогична теорема за произволна задача на изпъкналото оптимиране?

2. Изведете условията (7)–(10) на теорема 3, като приложите локалните условия на Кун — Такър за задача (6).

3. Изведете условията на Кун — Такър за задачите:

а) $\min\{f(\mathbf{x}) = \langle \mathbf{Cx}, \mathbf{x} \rangle + \langle \mathbf{p}, \mathbf{x} \rangle : \mathbf{Ax} = \mathbf{b}, \mathbf{x} \ge \mathbf{0}\}$;

б) $\min\{f(\mathbf{x}) = \langle \mathbf{Cx}, \mathbf{x} \rangle + \langle \mathbf{p}, \mathbf{x} \rangle : \mathbf{Ax} \le \mathbf{b}\}$.

4. Докажете теорема 4.

5. Докажете теорема 5.

6. Дадени са задачата $\min\{f(x_1, x_2) = 2x_1^2 + x_2^2 - 48x_1 - 40x_2 : x_1 + x_2 \le 8,$ $x_1 + 3x_2 \le 18,\ 0 \le x_1 \le 6,\ x_2 \ge 0\}$ и точка $\mathbf{x}^0 = (3, 5)$. Приложете теорема 5 за намиране на долна граница за функцията $f(\mathbf{x})$ и оценка за близостта на $f(\mathbf{x}^0)$ до $f_{\min}(\mathbf{x})$.

7. Докажете, че ако $\mathbf{x}^*$ е решение на задача (6), множеството от всички решения са тези допустими точки $\mathbf{x}$, за които $\mathbf{x} = \mathbf{x}^* + \mathbf{t}$, $\mathbf{Ct} = \mathbf{0}$, $\langle \mathbf{p}, \mathbf{t} \rangle = 0$.

8. Решете геометрично задачата

$$\min\left\{f(x_1, x_2) = \left(x_1 - \frac{3}{2}\right)^2 + (x_2 - 5)^2\right\},$$
$$-x_1 + x_2 \le 2, \quad 2x_1 + 3x_2 \le 11, \quad -x_1 \le 0, \quad x_2 \le 0$$

и докажете аналитично оптималността на решението.

Да се решат задачите 9–20, като се приложат локалните условия на Кун — Такър.

9. $\min\{x_1^2 + x_2^2 - 4x_1 - 6x_2 + 1\}$, $x_1 + x_2 \le 3$, $x_1 \ge 0$, $x_2 \ge 0$.

10. $\min\{x_1^2 + x_2^2 - 10x_1 - 4x_2\}$, $7x_1 + 2x_2 \ge 14$, $-x_1 - x_2 \ge -5$, $x_1 \ge 0$, $x_2 \ge 0$.

11. $\min\{x_1^2 + x_2^2 + 8x_1 - 2x_2\}$, $2x_1 + 3x_2 = 6$, $-x_1 + x_2 \geq -1$, $x_2 \geq 0$.

12. $\min\{x_1^2 + x_2^2 - 2x_1 + 2x_2\}$, $x_1 + x_2 = 1$, $4x_1 - 2x_2 \geq -1$, $x_1 \geq 0$.

13. $\max\{40x_1 + 48x_2 - x_1^2 - 2x_2^2\}$, $x_1 + x_2 \leq 8$, $3x_1 + x_2 \leq 18$, $x_1 \geq 0$, $0 \leq x_2 \leq 6$.

14. $\min\{x_1^2 - 14x_1 - x_2\}$, $x_1 - x_2 \geq -1$, $x_1 + 3x_2 \leq 6$, $x_2 \geq 0$.

15. $\min\{x_1^2 + x_2^2 - 4x_1 + 6x_2\}$, $3x_1 + 4x_2 = 12$, $x_1 + x_2 \geq -1$, $x_1 \geq 0$.

16. $\min\{x_1^2 + x_2^2 - 8x_1 - 12x_2\}$, $x_1 + x_2 \leq 6$, $4x_1 + 3x_2 \geq 12$, $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$.

17. $\min\left\{\left(x_1 - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(x_2 + \frac{1}{2}\right)^2\right\}$, $-4x_1 + 2x_2 \leq 1$, $x_1 + x_2 = 1$, $x_2 \geq 0$.

18. $\max\{2x_1 - x_1^2 - x_2^2\}$, $2x_1 + 3x_2 = 6$, $-x_1 + x_2 \geq -1$, $x_2 \geq 0$.

19. $\max\{2{,}4x_1 + 5{,}6x_2 - x_1^2 - x_2^2\}$, $-2x_1 + 3x_2 \leq 3$, $x_1 + x_2 \leq 3$, $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$.

20. $\max\{32x_1 + 120x_2 - 4x_1^2 - 15x_2^2\}$, $2x_1 + 5x_2 \leq 20$, $-2x_1 + x_2 \geq -8$, $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$.

21. Да се намери седлова точка на функцията

$$\Phi(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}) = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i^2 + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i (x_i - x_{i+1}) + (1 - x_1)\lambda_0 + \lambda_{n+1}(x_n - b)$$

в множеството $M = \{(\boldsymbol{\lambda}, \mathbf{x}) : \boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}^{n+2}, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n\}$, $b > 1$.

22. Да се реши с помощта на теоремата на Кун — Такър задачата

$$\min\left\{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \sum_{i=1}^{n} 2qix_i : x_i - x_{i+1} \leq 0, i = 1, \ldots, n-1, x_1 \geq q, x_n \leq nq\right\}$$

и да се покаже, че компонентите на оптималния вектор образуват аритметична прогресия.

23. Да се решат геометрично следните задачи. Да се намерят множителите на Лагранж, за които решенията удовлетворяват условията на Кун — Такър. Областта на всички задачи е

$$D = \{(x, y) : x + y - 1 \leq 0,\ x \geq 0,\ y \geq 0\}.$$

23.1. $\min\{x^2 + y^2 - 2x - 2y + 2 : (x, y) \in D\}$;
23.2. $\min\{x^2 + y^2 - x - \frac{1}{2}y + \frac{5}{16} : (x, y) \in D\}$;
23.3. $\min\{x^2 + y^2 + x + y + \frac{1}{2} : (x, y) \in D\}$;
23.4. $\min\{x^2 + y^2 - 2x + 2y + 2 : (x, y) \in D\}$;
23.5. $\min\{x^2 + y^2 - x + y + \frac{1}{2} : (x, y) \in D\}$.

24. Да се намерят компонентите x_1^*, x_2^* на оптималната точка $\mathbf{x}^*$ и коефициентите u_1^*, u_2^* в разлагането на антиградиента на функцията $f(\mathbf{x})$ по външните нормали (определени от векторите $g_1'(\mathbf{x}^*)$, $g_2'(\mathbf{x}^*)$) към граничните повърхнини в точката $\mathbf{x}^*$ за задачите:

24.1. $\min\ \{f(x) = x_1^2 + x_2^2 - 10x_1 - 16x_2\}$, $g_1(x) = x_1 + 2x_2 - 16 \le 0$, $g_2(x) = 5x_1 + 2x_2 - 40 \le 0$;

24.2. $\min\ \{f(x) = x_1^2 + x_2^2 - 3x_1 - 5x_2\}$, $g_1(x) = -x_1 + x_2 - 2 \le 0$, $g_2(x) = 2x_1 + 3x_2 - 11 \le 0$.

25. Да се покаже, че решаването на задачата

$$\min\{f(\mathbf{x}) = \langle \mathbf{C}\mathbf{x}, \mathbf{x}\rangle + \langle \mathbf{p}, \mathbf{x}\rangle : \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b},\ \mathbf{x} \ge \mathbf{0}\},$$

където $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$, $\mathbf{A}$ е матрица $m \times n$, може да се сведе до решаването на не повече от 2^n системи линейни уравнения ($n + m$ уравнения с $n + m$ неизвестни).

26. Като се използва теоремата на Кун — Такър, да се докаже,че точката $\mathbf{x}^*$ е решение на задачата

$$\min\{f(x_1, x_2) : g_1(x_1, x_2) \le 0,\ g_2(x_1, x_2) \ge 0\}.$$

Да се намери разлагането на антиградиента на $f(x_1, x_2)$ в точката $\mathbf{x}^*$ по нормалните вектори (определени от $g_1'(\mathbf{x}^*)$ и $-g_2'(\mathbf{x}^*)$) към граничните повърхнини, върху които лежи $\mathbf{x}^*$, ако:

26.1. $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 - 2x_1 - 8x_2 - 2$, $g_1(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 + 6x_1 - 2x_2 + 5$, $g_2(x_1, x_2) = x_1 - x_2^2 + 2x_2 + 1$, $x^* = (-1, 2)$;

26.2. $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 - 6x_1 + 2x_2 - 1$, $g_1(x_1, x_2) = x_1^2 - 6x_1 - x_2 + 11$, $g_2(x_1, x_2) = 14x_1 + 8x_2 - x_1^2 - x_2^2 - 55$, $x^* = (4, 3)$.

§ 3. Методи за решаване на задачата на квадратичното оптимиране

Могат да се прилагат с успех всички методи за решаване на задачи от изпъкналото оптимиране (в това ръководство те не се разглеждат). Някои от методите за квадратични оптимизационни задачи водят до решение за краен брой стъпки. Поради линейния характер на частните производни на целевата функция за тези задачи се развива изящна техника, която все още не е изчерпила своите многобройни възможности и която има самостоятелна теоретична стойност. Често се прилагат различни начини за решаване на системата от условия на Кун—Такър, която за тези задачи има просто представяне. Например за задачата

$$\min \{f(\mathbf{x}) = \langle \mathbf{Cx}, \mathbf{x} \rangle + \langle \mathbf{p}, \mathbf{x} \rangle : \mathbf{Ax} = \mathbf{b},\ \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\} \tag{11}$$

тези условия са:

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}, \tag{12}$$

$$2\mathbf{Cx} - \mathbf{v} + \mathbf{Au} = -\mathbf{p}, \tag{13}$$

$$\mathbf{x} \geq \mathbf{0},\ \mathbf{v} \geq \mathbf{0}, \tag{14}$$

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{v} \rangle = 0. \tag{15}$$

Поради условието (15) решенията на тази система са измежду неотрицателните базисни решения на линейната система (12)–(13). Условия (14)–(15) често се наричат *условия за допълнителност*. Наистина, (14) заедно с (15) означават, че ако $x_j > 0$, то $v_j = 0$ и ако $v_j > 0$, то $x_j = 0$. Известни са различни методи, използващи тази особеност. Тя позволява прилагането (с някои изменения) на симплекс-метода, който по същество се състои в замяна на едно базисно представяне на система линейни уравнения с друго. Тук привеждаме (схематично) два метода: на Вулф — като илюстрация на приложение на симплекс-метода за решаване на системата уравнения и неравенства (12)–(15) и на Бил — като илюстрация на едно естествено обобщение на симплекс-метода за задачи с линейни ограничения и целева функция от втора степен.

Метод на Вулф (за задача (11)). Решава се системата (12)–(15). Въвеждат се изкуствени променливи, така че от системата (12)–(13) се преминава към разширена система уравнения, която е в базисен вид и решението ѝ удовлетворява (14) и (15). След това с помощта на симплекс-метода изкуствените променливи се анулират. При това на всяка стъпка се спазва следното условие:

$$\begin{cases} \text{ако на дадена стъпка } x_j\ (v_j) \text{ е базисна, на следващата стъпка} \\ v_j\ (x_j) \text{ не бива да се включва в базиса.} \end{cases} \tag{16}$$

Доказва се, че спазването на условие (16) не затруднява анулирането на изкуствените променливи в един от случаите

а) $\mathbf{p} = \mathbf{0}$;

б) $\mathbf{C}$ е положително дефинитна.

Методът се прилага в два варианта — частен и общ. Успешното прилагане на частния вариант е гарантирано, когато е налице някой от случаите а) или б). Състои се от два етапа — на първия се анулират изкуствените променливи, въведени за ограниченията (12), а на втория — тези за ограничения (13). Общият вариант е повторение на първите два етапа при $\mathbf{p} = \mathbf{0}$. На практика това се осъществява чрез умножаване на вектора $\mathbf{p}$ с нова спомагателна неотрицателна променлива μ, която до края на втория етап не се включва в базиса и следователно има стойност 0. След това решението се получава (на третия етап) при стойност на тази променлива, равна на 1.

Един алгоритъм за общия вариант е следният:

1. Образуваме разширената система

$$\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{w} = \mathbf{b}, \tag{17}$$

$$2\mathbf{C}\mathbf{x} - \mathbf{v} + \mathbf{A}\mathbf{u} + \mathbf{z} + \mu\mathbf{p} = \mathbf{0}, \tag{18}$$

$$\mathbf{x} \geq \mathbf{0},\ \mathbf{v} \geq \mathbf{0},\ \mathbf{w} \geq \mathbf{0},\ \mathbf{z} \geq \mathbf{0},\ \mu > 0, \tag{19}$$

   $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^m$, $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$ са изкуствени променливи, а $\mu \in \mathbb{R}^1_+$ е спомагателна променлива, въведена за общия вариант.

2. Анулираме променливите w_i, $i = 1, \dots, m$, чрез решаване на задачата $\min \left\{ \sum\limits_{i=1}^{m} w_i \right\}$ при условия (17)–(19). Променливите u_i, $i = 1, \dots, m$, v_j, $j = 1, \dots, n$, и μ оставяме извън базиса. Така променливите x_j ще заместят базисните променливи w_i (ако това е невъзможно, системата (12) е несъвместима). От системата (17)–(19) отпадат променливите w_i. **Край на I етап.**

3. Анулираме променливите z_j, $j = 1, \dots, n$, чрез решаване на задачата $\min \left\{ \sum\limits_{j=1}^{n} z_j \right\}$ при условията, получени в края на I етап, като спазваме условие (16). Променливата μ остава извън базиса. От система (17)–(19) отпадат променливите z_j. **Край на II етап.**

4. Решаваме задачата $\max \{\mu\}$ при условията, получени в края на II етап. Възможни са случаите:

   4.1 $\max\ \mu = 0$. Доказва се, че този случай съответства на неограниченост на целевата функция на задача (11).

   4.2 $\max\ \mu \neq 0$. Доказва се, че този случай $\mu \to \infty$. Това гарантира достигане на стойност $\mu = 1$, при която получаваме решението на система (12)–(15) и с това на задача (11). Извършваме последователни итерации по симплекс-метода, докато на s-тата итерация стигнем до един от случаите:

а) $\mu^{(s)} = 1$. Задачата е решена.

б) $\mu^{(s-1)} < 1$, $\mu^{(s)} > 1$. Решението $\mathbf{x}^*$ получаваме от изпъкналата комбинация $\mathbf{y}^* = \alpha\mathbf{y}^{(s-1)} + (1-\alpha)\mathbf{y}^{(s)}$, $\mathbf{y} = (\mathbf{x}, \mathbf{v}, \mathbf{u}, \mu)$, за която α, $0 < \alpha < 1$, е решение на уравнението $\alpha\mu^{(s-1)} + (1-\alpha)\mu^{(s)} = 1$.

в) $\mu^{(s)} < 1$, но при s-тата итерация е налице критерият за неограниченост на μ. Тогава точката $\mathbf{y}^{(s)}$ е връх, от който излиза неограничен ръб, по който $\mu \to \infty$. Решението $\mathbf{x}^*$ на (11) получаваме от точката $\mathbf{y}^* = \mathbf{y}^{(s)} + \alpha\mathbf{y}^{(s+1)}$, където $\mathbf{y}^{(s+1)}$ е вектор по този неограничен ръб, а $\alpha = \dfrac{1-\mu^{(s)}}{\mu^{(s+1)}}$. (За получаването на компонентите на вектора $\mathbf{y}^{(s+1)}$ вж. гл. 3, формули (32)–(33) и примери 8 и 9.)

Пример 2. Да се реши по метода на Вулф задачата

$$\min\left\{f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 - 4x_1 - 6x_2\right\}, \quad x_1 + x_2 \le 3, \quad x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$$

Решение. Записваме задачата във вида

$$\begin{gathered}\min\left\{f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 - 4x_1 - 6x_2\right\},\\ x_1 + x_2 + x_3 = 3, \qquad x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0.\end{gathered}$$

Системата от условия на Кун—Такър за тази задача е

$$(12') \qquad x_1 + x_2 + x_3 = 3,$$

$$(13') \qquad \begin{cases} 2x_1 - v_1 + u = 4,\\ \quad + 2x_2 - v_2 + u = 6,\\ \quad - v_3 + u = 0,\end{cases}$$

$$(14') \qquad x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0, \quad x_3 \ge 0, \quad v_1 \ge 0, \quad v_2 \ge 0, \quad v_3 \ge 0,$$

$$(15') \qquad x_j v_j = 0, \quad j = 1, 2, 3.$$

От последното уравнение на (13′) получаваме $u = v_3$. Изключваме променливата u от останалите две уравнения на (13′). При образуване на разширената система (20) за задачата (аналогична на система (17)–(19) за задача (11)) можем да избегнем въвеждането на изкуствени променливи — за базисни променливи можем да използваме x_3, v_1 и v_2 (след умножаване на последните две уравнения на (20) с -1). Поради това прилагаме направо трети етап. Видът на разширената система (след изключване от (13′) на променливата u) е:

$$
(20)\qquad
\left|\begin{array}{l}
x_1 + \ \ x_2 + x_3 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad = 3 \\
2x_1 \qquad\qquad - v_1 \qquad + v_3 - 4\mu = 0 \\
\qquad 2x_2 \qquad\qquad - v_2 + v_3 - 6\mu = 0 \\
x_j \ge 0,\ v_j \ge 0,\ x_j v_j = 0, \quad j = 1, 2, 3.
\end{array}\right.
$$

На система (20) съответства „опорният план“ с базисни компоненти $x_3 = 3$, $v_1 = 0$, $v_2 = 0$. Променливата μ е небазисна и има стойност 0. Решението на задачата ще получим при $\mu = 1$. За тази цел решаваме задача за максимизиране на променливата μ (до получаване на стойност за μ, по-голяма или равна на 1) при условия (20) и (16). Ходът на решението е илюстриран таблично на следващата страница. Променливите, на които е забранено при поредната итерация да влизат в базиса, са отбелязани със звездичка над стълба, който им съответства.

Новата стойност на μ е $\mu^{(4)} = 3 > 1$. Следователно можем да получим решението $\mathbf{x}^*$ на задачата: $\mathbf{x}^*$ е изпъкнала комбинация на векторите $\mathbf{x}^{(3)} = \left(\frac{6}{5}, \frac{9}{5}, 0\right)$ и $\mathbf{x}^{(4)} = (0, 3, 0)$, които съответстват в последните две таблици на $\mu^{(3)} = \frac{3}{5}$ и $\mu^{(4)} = 3$: $\mathbf{x}^* = \alpha\mathbf{x}^{(3)} + (1 - \alpha)\mathbf{x}^{(4)}$, $0 < \alpha < 1$, където α определяме от уравнението $\alpha\mu^{(3)} + (1 - \alpha)\mu^{(4)} = 1$. Получаваме $\alpha = \frac{5}{6}$. И така $\mathbf{x}^* = \frac{5}{6}\left(\frac{6}{5}, \frac{9}{5}, 0\right) + \frac{1}{6}(0, 3, 0) = (1, 2, 0)$. Решението на изходната задача е $\mathbf{x}^* = (1, 2)$, $f^* = -11$.

Пример 3. Да се изследва решението на задачата

$$
\min\{f(x_1, x_2, \lambda) = x_1^2 + x_2^2 - 4\lambda x_1 - 6\lambda x_2\}, \quad x_1 + x_2 \le 3, \quad x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,
$$

където λ се мени в интервала $[0, \infty)$.

Решение. В тази задача линейната част на целевата функция е умножена с множител $\lambda \ge 0$. Можем да намерим решението за произволно λ, като приложим метода на Вулф и в третия етап заменим правилото за определяне на решението $\mathbf{x}^*$ при $\mu = 1$ с интересуващите ни $\mu = \lambda$.

Тъй като при $\lambda = 1$ задачата съвпада с тази от пример 2, ще илюстрираме решението ѝ, като използваме наготово таблиците от третия етап.

а) за $0 \le \lambda \le \frac{3}{5}$ имаме $\mathbf{x}^* = \alpha\mathbf{x}^{(2)} + (1 - \alpha)\mathbf{x}^{(3)}$, където α е решение на уравнението $0.\alpha + \frac{3}{5}(1 - \alpha) = \lambda$: $\alpha = \dfrac{3 - 5\lambda}{3}$, $1 - \alpha = \dfrac{5}{3}\lambda$; за $\mathbf{x}^*$ получаваме

$$
\mathbf{x}^* = \frac{3 - 5\lambda}{3}(0, 0, 3) + \frac{5\lambda}{3}\left(\frac{6}{5}, \frac{9}{5}, 0\right) = (2\lambda, 3\lambda, 3 - 5\lambda)
$$

Итерация 0

			*	*				*	
B	$\mathbf{c}^B$	$\boldsymbol{\beta}$	0	0	0	0	0	0	1
			x_1	x_2	x_3	v_1	v_2	v_3	μ
x_3	0	3	1	1	1	0	0	0	0
v_1	0	0	-2	0	0	1	0	-1	$\boxed{4}$
v_2	0	0	0	-2	0	0	1	-1	6
		0	0	0	0	0	0	0	1

Итерация 1

				*				*	
B	$\mathbf{c}^B$	$\boldsymbol{\beta}$	x_1	x_2	x_3	v_1	v_2	v_3	μ
x_3	0	3	1	1	1	0	0	0	0
μ	1	0	$-\frac{1}{2}$	0	0	$\frac{1}{4}$	0	$-\frac{1}{4}$	1
v_2	0	0	$\boxed{3}$	-2	0	$-\frac{3}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	0
		0	$\frac{1}{2}$	0	0	$-\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	0

Итерация 2

						*		*	
B	$\mathbf{c}^B$	$\boldsymbol{\beta}$	x_1	x_2	x_3	v_1	v_2	v_3	μ
x_3	0	3	0	$\boxed{\frac{5}{3}}$	1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{6}$	0
μ	1	0	0	$-\frac{1}{3}$	0	0	$\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{6}$	1
x_1	0	0	1	$-\frac{2}{3}$	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	0
		0	0	$\frac{1}{3}$	0	0	$-\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	0

Итерация 3

						*	*		
B	$\mathbf{c}^B$	$\boldsymbol{\beta}$	x_1	x_2	x_3	v_1	v_2	v_3	μ
x_2	0	$\frac{9}{5}$	0	1	$\frac{3}{5}$	$\frac{3}{10}$	$-\frac{1}{5}$	$-\frac{1}{10}$	0
μ	1	$\frac{3}{5}$	0	0	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$-\frac{1}{5}$	1
x_1	0	$\frac{6}{5}$	1	0	$\frac{2}{5}$	$-\frac{3}{10}$	$\frac{1}{5}$	$\boxed{\frac{1}{10}}$	0
		$-\frac{3}{5}$	0	0	$-\frac{1}{5}$	$-\frac{1}{10}$	$-\frac{1}{10}$	$\frac{1}{5}$	0

Итерация 4

					*		*		
B	$\mathbf{c}^B$	$\boldsymbol{\beta}$	x_1	x_2	x_3	v_1	v_2	v_3	μ
x_2	0	3	1	1	1	0	0	0	0
μ	1	3	2	0	1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	1
v_3	0	12	10	0	4	-3	2	1	0
		-3	-2	0	-1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	0

или за изходната задача $x_1^* = 2\lambda$, $x_2^* = 3\lambda$, $f(x_1^*, x_2^*, \lambda) = -13\lambda^2$;

б) за $\frac{3}{5} \le \lambda \le 3$ имаме $\mathbf{x}^* = \alpha\mathbf{x}^{(3)} + (1-\alpha)\mathbf{x}^{(4)}$, където α е решение на уравнението $\frac{3}{5}\alpha + 3(1-\alpha) = \lambda$: $\alpha = \dfrac{15-5\lambda}{12}$, $1-\alpha = \dfrac{5\lambda-3}{12}$, следователно $\mathbf{x}^* = \dfrac{15-5\lambda}{12}\mathbf{x}^{(3)} - \dfrac{5\lambda-3}{12}\mathbf{x}^{(4)}$. Или за изходната задача $\mathbf{x}^* = \left(\dfrac{3-\lambda}{2}, \dfrac{3+\lambda}{2}\right)$, $f^* = \dfrac{9-30\lambda-\lambda^2}{2}$;

в) за $\lambda > 3$ решението е $\mathbf{x}^* = (0, 3)$, $f^* = 9 - 18\lambda$. За да се убедим, че при $\lambda > 3$ решението $\mathbf{x}^*$ не зависи от λ, обръщаме внимание (вж. последната таблица), че μ може да расте неограничено с нарастването на v_1 без никоя от базисните променливи да се анулира (на лице е критерият за неограниченост на целевата функция — в стълба, съответстващ на v_1, няма положителни числа, а елементът от индексния ред в същия стълб е положителен). Тъй като компонентата x_2 на вектора $\mathbf{x}^{(4)}$ запазва стойността си като базисна променлива в последната таблица независимо от нарастването на μ и тъй като $x_1^{(4)}$ и $x_2^{(4)}$ не участват в базиса и запазват стойност 0 при нарастване на μ, за $\lambda = \mu = 3$ остава решението, получено в последната таблица.

Метод на Бил. Както при симплекс-метода и тук основната идея се състои в разделяне на променливите на базисни и небазисни и извеждане на критерия за оптималност чрез изключване на базисните променливи от целевата функция.

Един алгоритъм на метода за задача (11) е следният:

Нека е намерен начален опорен план $\mathbf{x}$ (по някой от познатите методи). Означаваме с $\mathbf{x}^B$ и $\mathbf{x}^N$ съответно базисните и небазисните му компоненти: $\mathbf{x} = (\mathbf{x}^B, \mathbf{x}^N)$. Ако въведем аналогични означения за стълбовете на матрицата $\mathbf{A}$: $\mathbf{A} = (\mathbf{B}, \mathbf{N})$, където $\mathbf{B}$ е подматрица на $\mathbf{A}$ от стълбовете ѝ, съответствуващи на базисните променливи $\mathbf{x}^B$, а $\mathbf{N}$ е подматрица на $\mathbf{A}$ от стълбовете ѝ, съответстващи на небазисните променливи $\mathbf{x}^N$, то равенството $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ се записва $\mathbf{B}\mathbf{x}^B + \mathbf{N}\mathbf{x}^N = \mathbf{b}$.

1. Изразяваме базисните променливи чрез небазисните

$$\mathbf{x}^B = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} - \mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}\mathbf{x}^N.$$

2. Изключваме базисните променливи от целевата функция, която представяме само чрез небазисните променливи: $f(\mathbf{x}) = \overline{f}(\mathbf{x}^N)$.

3. Пресмятаме частните производни $\overline{f}'_{x_j}(\mathbf{x}^N = \mathbf{0})$ на $\overline{f}(\mathbf{x}^N)$ в точката $\mathbf{x} = (\mathbf{x}^B, \mathbf{0})$. Критерият за оптималност е: ако $\overline{f}'_{x_j}(\mathbf{x}^N = \mathbf{0}) \geq 0$ за всички компоненти x_j на $\mathbf{x}^N$, то $\mathbf{x}$ е решение на задачата.

4. Ако съществува индекс s, за който $\overline{f}'_{x_s}(\mathbf{x}^N = \mathbf{0}) < 0$, стойността на целевата функция може да бъде намалена, като се увеличава небазисната променлива x_s от нула до някаква положителна стойност, която определяме от един от случаите:

   а) анулира се някоя от базисните променливи x_k (при симплекс-метода това е единствената причина за ограничаване нарастването на x_s);

   б) анулира се частната производна $\overline{f}'_{x_s}(\mathbf{x}^N)$. По-нататъшното увеличаване на x_s би довело до нарастване на стойността на целевата функция.

В случая 4а) постъпваме както при симплекс метода: въвеждаме в базиса x_s на мястото на x_k, с което получаваме нов опорен план. За него стойността на целевата функция е по-малка. Преминаваме към т. 1.

В случая 4б) преминаваме към нова точка (тя не е опорен план!), за която $\overline{f}'_{x_s}(\mathbf{x}^N) = 0$ (т. е. към точка, в която целевата функция има най-малка стойност по посока на увеличаване на x_s при фиксирани стойности за останалите небазисни променливи $x_j = 0$). Това става така: полагаме $\overline{f}'_{x_s}(\mathbf{x}^N) = u_1$, при което въвеждаме нова променлива u_1 и ново ограничение $u_1 = \overline{f}'_{x_s}(\mathbf{x}^N)$. (С това броят на базисните променливи също се увеличава с единица. Забележете, че броят на небазисните променливи се запазва.) Променливата u_1 причисляваме към „небазисните“, а към „базисните“ променливи на $\mathbf{x}^B$ прибавяме x_s. Критерият за оптималност в случая, когато са въведени променливи u_i, е:

$\left.\dfrac{\partial \overline{f}(\mathbf{x}^N)}{\partial x_j}\right|_{\mathbf{x}^N=\mathbf{0}} \geq 0$ за всички компоненти $x_j \geq 0$ на $\mathbf{x}^N$, различни от u_i;

$\left.\dfrac{\partial \overline{f}(\mathbf{x}^N)}{\partial u_i}\right|_{\mathbf{x}^N=\mathbf{0}} = 0$ за всички променливи u_i (на u_i не са наложени ограничения за неотрицателност).

Ако не е изпълнен критерият за оптималност, преминаваме към нова точка по следния начин:

Ако съществува „небазисна“ променлива u_i, за която

$$\left.\frac{\partial \overline{f}(\mathbf{x}^N)}{\partial u_i}\right|_{\mathbf{x}^N=\mathbf{0}} \neq 0,$$

за нова „базисна“ променлива избираме u_i. При това, ако

$$\left.\frac{\partial \overline{f}(\mathbf{x}^N)}{\partial u_i}\right|_{\mathbf{x}^N=\mathbf{0}} < 0,$$

я увеличаваме, а ако $\left.\frac{\partial \overline{f}(\mathbf{x}^N)}{\partial u_i}\right|_{\mathbf{x}^N=\mathbf{0}} > 0$, я намаляваме.

Ако $\left.\frac{\partial \overline{f}(\mathbf{x}^N)}{\partial u_i}\right|_{\mathbf{x}^N=\mathbf{0}} = 0$ за всички u_i (или изобщо между променливите $\mathbf{x}^N$ няма променливи u_i), за нова базисна променлива избираме x_s, за която $\left.\frac{\partial \overline{f}(\mathbf{x}^N)}{\partial x_s}\right|_{\mathbf{x}^N=\mathbf{0}} < 0$. Преминаваме към т. 1.

Нарастването на новата базисна променлива (евентуално намаляването ѝ, ако е от вида u_i и $\left.\frac{\partial \overline{f}(\mathbf{x}^N)}{\partial u_i}\right|_{\mathbf{x}^N=\mathbf{0}} > 0$) се определя от един от случаите 4а) или 4б). Ако никой от тези случаи не настъпва, $\overline{f}(\mathbf{x}^N)$ може безпрепятствено да намалява с изменението на променливата u_i (респективно x_s) и следователно задачата няма решение.

Пример 4. Да се реши по метода на Бил задачата

$$\min\left\{x_1^2 + x_2^2 - 10x_1 - 8x_2\right\}, \quad x_1 + x_2 \le 5, \quad x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0.$$

Решение. Записваме задачата във вида

$$\min\left\{x_1^2 + x_2^2 - 10x_1 - 8x_2 : x_1 + x_2 + x_3 = 5,\ x_j \ge 0,\ j = 1,2,3\right\}.$$

Итерация 0

За начален опорен план избираме $\mathbf{x}^{(0)} = (0,0,5)$, $\mathbf{x}^{B(0)} = x_3$, $\mathbf{x}^{N(0)} = (x_1, x_2)$.

1. Изразяваме x_3 чрез небазисните променливи x_1 и x_2:

$$x_3 = 5 - x_1 - x_2.$$

2. При така избрания начален опорен план имаме готово представяне на целевата функция чрез небазисните променливи:

$$f^{(0)}(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 - 10x_1 - 8x_2, \quad f^{(0)}(\mathbf{x}^{(0)}) = 0.$$

3. Частните производни на $f^{(0)}(x_1, x_2)$ при $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ имат стойности $\dfrac{\partial f^{(0)}}{\partial x_1} = -10$, $\dfrac{\partial f^{(0)}}{\partial x_2} = -8$. Критерият за оптималност не е изпълнен.

4. Стойността на целевата функция може да бъде намалена, като се увеличи коя да е от небазисните променливи (поради $\dfrac{\partial f^{(0)}}{\partial x_1} < 0$, $\dfrac{\partial f^{(0)}}{\partial x_2} < 0$), например x_2. Тя може да се увеличава до настъпването да един от случаите:

   а) $x_3 = 0$, т. е. $5 - x_2 = 0$, откъдето $x_2 = 5$;

   б) $\dfrac{\partial f^{(0)}}{\partial x_2} = 0$, т. е. $2x_2 - 8 = 0$, откъдето $x_2 = 4$.

   При увеличаването на x_2 първо настъпва случаят 4б) — анулира се $\dfrac{\partial f^{(0)}}{\partial x_2}$. Въвеждаме нова променлива $u_1 = \dfrac{\partial f^{(0)}}{\partial x_2} = 2x_2 - 8$. В базиса влиза x_2.

Итерация 1
Сега имаме $\mathbf{x}^B = (x_2, x_3)$, $\mathbf{x}^N = (x_1, u_1)$.

1. Изразяваме базисните променливи чрез небазисните

$$x_2 = 4 + \frac{1}{2}u_1, \quad x_3 = 1 - x_1 - \frac{1}{2}u_1.$$

   Компонентите на новия план са $\mathbf{x}^{(1)} = (0, 4, 1)$.

2. Изключваме x_2 и x_3 от целевата функция

$$f^{(1)}(x_1, u_1) = -16 - 10x_1 + x_1^2 + \frac{1}{4}u_1^2, \quad f^{(1)}(\mathbf{x}^{(1)}) = -16.$$

3. Частните производни на $f^{(1)}(x_1, u_1)$ при $x_1 = 0$, $u_1 = 0$ имат стойности $\dfrac{\partial f^{(1)}}{\partial x_1} = -10$, $\dfrac{\partial f^{(1)}}{\partial x_2} = 0$. Критерият за оптималност не е изпълнен.

4. Стойността на целевата функция може да бъде намалена чрез увеличаване на x_1. Тя ще нараства, докато:

   а) $x_3 = 0$, т. е. $1 - x_1 = 0$, откъдето $x_1 = 1$ (x_2 не зависи от x_1 и следователно не се анулира при нейното нарастване);

   б) $\dfrac{\partial f^{(1)}(x_1, u_1)}{\partial x_1} = 0$, т. е. $-10 + 2x_1 = 0$, откъдето $x_1 = 5$.

При увеличаването на x_1 първо настъпва случаят 4а) и x_3 излиза от базиса. В базиса влиза x_1.

Итерация 2
Сега имаме $\mathbf{x}^B = (x_1, x_2)$, $\mathbf{x}^N = (x_3, u_1)$.

1. Изразяваме базисните променливи чрез небазисните

$$x_1 = 1 - x_3 - \frac{1}{2}u_1, \quad x_2 = 4 + \frac{1}{2}u_1.$$

   Компонентите на новия план са $\mathbf{x}^{(2)} = (1, 4, 0)$.

2. Изключваме x_1 и x_2 от целевата функция:

$$f^{(1)}(x_3, u_1) = -25 + 8x_3 + 4u_1 + x_3^2 + \frac{1}{2}u_1^2, \quad f^{(2)}(\mathbf{x}^{(2)}) = -25.$$

3. Частните производни на $f^{(2)}(x_3, u_1)$ при $x_3 = 0$, $u_1 = 0$ имат стойности $\dfrac{\partial f^{(2)}}{\partial x_3} = 8$, $\dfrac{\partial f^{(2)}}{\partial u_1} = 4$. Поради $\dfrac{\partial f^{(2)}}{\partial u_1} \neq 0$ критерият за оптималност не е изпълнен.

4. За по-нататъшно намаляване стойността на целевата функция трябва да бъде намалена u_1 (от 0 до някаква отрицателна стойност), докато:

   а) $x_2 = 0$, т. е. $4 + \frac{1}{2}u_1 = 0$, откъдето $u_1 = -8$ (x_1 не се анулира за отрицателни стойности на u_1);

   б) $\dfrac{\partial f^{(2)}(x_3, u_1)}{\partial u_1} = 0$, т. е. $4 + u_1 = 0$, откъдето $u_1 = -4$.

   И така, при намаляването на u_1 първо настъпва случаят 4б) — анулира се производната $\dfrac{\partial f^{(2)}}{\partial u_1}$. В базиса влиза u_1. Към небазисните променливи се прибавя u_2.

Итерация 3
Сега имаме $\mathbf{x}^B = (x_1, x_2, u_1)$, $\mathbf{x}^N = (x_3, u_2)$.

1. Изразяваме базисните променливи чрез небазисните

$$u_1 = -4 - x_3 + u_2, \quad x_1 = 3 - \frac{1}{2}x_3 - \frac{1}{2}u_2, \quad x_2 = 2 - \frac{1}{2}x_3 + \frac{1}{2}u_2.$$

   Компонентите на новия план са $\mathbf{x}^{(3)} = (3, 2, 0)$.

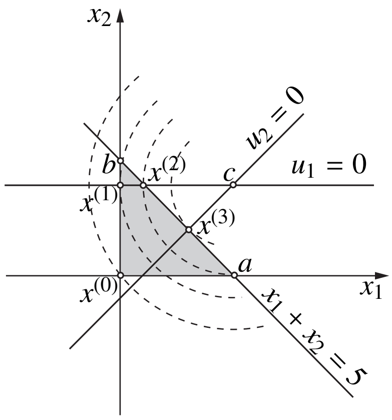
2. Изключваме x_1, u_1 и x_2 от целевата функция:

$$f^{(3)}(x_3, u_2) = -33 + 4x_3 + \frac{1}{2}x_3^2 + 4u_2^2, \qquad f^{(3)}(x^{(3)}) = -33.$$

3. Частните производни на $f^{(3)}(x_3, u_2)$ при $x_3 = 0$, $u_2 = 0$ имат стойности $\dfrac{df^{(3)}}{dx_3} = 4$, $\dfrac{df^{(3)}}{du_2} = 0$. Критерият за оптималност е изпълнен. Векторът $\mathbf{x}^{(3)} = (3, 2, 0)$ е решение на задачата. За изходната задача решението е $\mathbf{x}^* = (3, 2)$, $f(\mathbf{x}^*) = -33$.

Ако се изведат общи формули за представяне на $\mathbf{x}^B$ и $f^{(k)}(\mathbf{x}^N)$ чрез $\mathbf{x}^N$ на k-тата итерация посредством съответните им представяния на $(k-1)$-та итерация (подобно на формулите от гл. 3, § 5 за симплекс-метода), може да се формулират правила за таблично прилагане на метода на Бил. Предлагаме на читателя да се опита сам да изведе тези формули. Вместо това тук предлагаме една *геометрична интерпретация на метода на Бил*.

Ще илюстрираме подробно хода на решението на задачата от пример 4 на фиг. 19.



Фиг. 19

Итерация 0. Началната точка е $\mathbf{x}^{(0)} = (0, 0)$ (третата координата x_3 разглеждаме като определяща „отклонението“ на текущата точка $\mathbf{x}^{(k)} = \left(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}\right)$ от правата $x_1 + x_2 = 5$). От означените на чертежа линии на ниво на $f(x_1, x_2)$ се вижда, че както увеличаването на x_1, т. е. придвижването от $\mathbf{x}^{(0)}$ към върха a, така и на x_2, т. е. придвижването от $\mathbf{x}^{(0)}$ към върха b, води до намаляване стойността на целевата функция. Това съответства на получените отрицателни стойности за $\dfrac{df}{dx_1}$ и $\dfrac{df}{dx_2}$ в точката $\mathbf{x}^{(0)}$ при итерация 0. Избрано е движението по посока към върха b, т. е. увеличава се x_2.

Това продължава или до анулирането на x_3 (във върха b), или до анулирането на $\dfrac{df}{dx_2}$ (в точката $\mathbf{x}^{(1)}$). Движейки се от $\mathbf{x}^{(0)}$ към върха b, първо стигаме до точката $\mathbf{x}^{(1)}$, т. е. случай б) на итерация 0.

Итерация 1. Новата точка е $\mathbf{x}^{(1)} = (0, 4)$. Въведена е правата $u_1 = 0$ и по-нататъшното придвижване към точката на минимума продължава по тази права чрез увеличаване на x_1. Това продължава или до анулирането на x_3 (в точката $\mathbf{x}^{(2)}$), или до анулирането на $\dfrac{df}{dx_1}$ (в точката c, която не е в областта). Движейки се от точката $\mathbf{x}^{(1)}$ по правата $u_1 = 0$, първо стигаме до точката $\mathbf{x}^{(2)}$, което е случай а) на итерация 1.

Итерация 2. Новата точка е $\mathbf{x}^{(2)} = (1, 4)$. Тъй като $\dfrac{df}{du_1} \neq 0$, движението към точката на минимума продължава, като напускаме правата $u_1 = 0$, и тъй като $x_3 = 0$, то е по правата $x_1 + x_2 = 5$. Движението продължава до напускане на областта, т. е. до върха a или до анулирането на $\dfrac{df}{du_1}$ в точката $\mathbf{x}^{(3)}$. Първо стигаме до точка $\mathbf{x}^{(3)}$, т. е. случай б) на итерация 2.

Итерация 3. Новата точка е $\mathbf{x}^{(3)} = (3, 2)$. Въведена е правата $u_2 = 0$, по която би трябвало да продължи по-нататъшното движение. Но в точката $\mathbf{x}^{(3)}$ е изпълнен критерият за оптималност. Геометрично това се вижда от факта, че през $\mathbf{x}^{(3)}$ минава линия на ниво, съответстваща на най-малката стойност на $f(x_1, x_2)$ в областта. По-нататъшно движение по правата $u_2 = 0$ по посока на намаляване на стойността на $f(x_1, x_2)$ би довело до напускане на областта. Решението е $\mathbf{x}^{(3)}$.

Задачи

1. Да се покаже, че методът на Бил, приложен към задачи на линейното оптимиране, съвпада със симплекс-метода.

2. Да се приложи методът на Бил:

2.1. за да се установи, че функцията

$$x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2 - 2x_1 - 4x_2$$

намалява неограничено в множеството, определено с ограниченията

$$x_1 - 2x_2 \leq 4, \quad -x_1 + x_2 \leq 1, \quad x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0;$$

2.2. за да се определи вектор, по чиято посока функцията намалява неограничено в областта.

Да се илюстрира геометрично ходът на решението.

3. Да се приложи методът на Вулф за решаване на задача 2.

4. Да се изследва решението на задачата

$$\min\left\{2x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 - 6\lambda x_1\right\}, \qquad x_1 + x_2 \le 2, \quad x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0,$$

когато $\lambda \in (0, \infty)$.

5. Да се намери решението на задачата

$$\min\left\{2x_1^2 + x_2^2 - \alpha(48x_1 + 40x_2)\right\},$$
$$x_1 + x_2 \le 8, \quad x_1 \le 6, \quad x_1 + 3x_2 \le 18, \quad x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0,$$

за стойности на α: а) $\alpha = 0{,}5$; б) $\alpha = 1$; в) $\alpha = 1{,}5$; г) $\alpha = 2$.

Упътване. За задачи 4 и 5 да се използва общият вариант на метода на Вулф.

Да се решат задачите:

6. $\min\left\{\dfrac{1}{2}x_1^2 + \dfrac{1}{2}x_2^2 - x_1 - 2x_2\right\}$, $x_1 + 4x_2 \le 5$, $x_1 \ge 0$, $x_2 \ge 0$.

7. $\max\left\{4x_1 + 8x_2 - x_1^2 - x_2^2\right\}$, $x_1 + x_2 \le 4$, $x_1 \ge 0$, $x_2 \ge 0$.

8. $\min\left\{x_1^2 + x_2^2 - 8x_1 - 10x_2\right\}$, $3x_1 + 2x_2 \le 6$, $x_1 \ge 0$, $x_2 \ge 0$.

9. $\min\left\{x_1^2 + x_2^2 - 4x_1 - 6x_2\right\}$, $x_1 + x_2 \le 3$, $x_1 \ge 0$, $x_2 \ge 0$.

10. $\max\left\{x_1 - x_1^2 - x_1x_2 - \frac{1}{4}x_2^2\right\}$, $2x_1 + x_2 = 4$, $x_1 \ge 0$, $x_2 \ge 0$.

11. $\max\left\{10x_1 + 20x_2 + x_1x_2 - 2x_1^2 - 2x_2^2\right\}$, $0 \le x_1 \le 6$, $x_1 + x_2 \le 8$, $x_2 \ge 0$.

12. $\min\left\{x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 - 6x_1 - 9x_2\right\}$, $x_1 + 2x_2 \le 4$, $x_1 \ge 0$, $x_2 \ge 0$.

13. $\min\{\langle \mathbf{Cx}, \mathbf{x}\rangle + \langle \mathbf{p}, \mathbf{x}\rangle : \mathbf{Ax} \le \mathbf{b},\ \mathbf{x} \ge 0\}$, $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$,
$\mathbf{p} = (-3, -4, -1)$, $\mathbf{A} = (1 \quad 2 \quad 1)$, $\mathbf{b} = 4$.

14. $\min\left\{-4x_1 + \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}x_2^2 - 6x_2\right\}$, $x_1 + x_2 \le 6$, $x_1 \ge 0$, $x_2 \ge 0$.

15. $\max\left\{x_1 - x_1^2 + 2x_2 - x_3^2\right\}$, $x_1 + 2x_2 - x_3 = 6$, $x_i \ge 0$, $i = 1, 2, 3$.

16. $\min\left\{2x_1x_3 + x_2^2 - x_1\right\}$, $x_1 + x_2 = 8$, $x_2 + x_3 = 4$, $x_i \ge 0$, $i = 1, 2, 3$.

17. $\min\left\{2x_1^2 + x_2^2 - 20x_1 - 16x_2\right\}$, $x_1 + 2x_2 \le 16$, $5x_1 + 2x_2 \le 40$, $x_i \ge 0$, $i = 1, 2$.

18. $\min\left\{(x_1 - \frac{1}{2})^2 + (x_2 + \frac{1}{2})^2\right\}$, $4x_1 - 2x_2 \ge -1$, $x_1 + x_2 = 1$, $x_2 \ge 0$.

19. $\min\left\{x_1^2 + x_2^2 + 8x_1 - 2x_2\right\}$, $2x_1 + 3x_2 = 6$, $-x_1 + x_2 \geq -1$, $x_2 \geq 0$.

20. $\min\left\{x_1^2 + x_2^2 - 8x_1 - 4x_2\right\}$, $3x_1 - 2x_2 - 2x_3 + x_4 = 8$, $11x_1 + 6x_2 + x_3 + 2x_4 = 96$, $x_i \geq 0$, $i = 1, 2, 3, 4$.

21. $\max\left\{x_1 - 2x_2 - x_2^2\right\}$, $3x_1 + x_2 \leq 30$, $3x_1 + 5x_2 \leq 60$, $x_1 + x_2 \leq 15$, $x_i \geq 0$, $i = 1, 2$.

22. $\min\left\{(x_1 - 3)^2 + (x_2 - 2)^2\right\}$, $x_1 + x_2 = 4$, $x_i \geq 0$, $i = 1, 2$.

23. $\min\left\{x_1^2 + 2x_1 - x_2\right\}$, $3x_1 + x_2 \geq 1$, $x_i \geq 0$, $i = 1, 2$.

24. $\min\left\{x_1^2 + x_2^2 - 6x_1 + 4x_2\right\}$, $3x_1 + 2x_2 \leq 6$, $x_i \geq 0$, $i = 1, 2$.

25. $\min\left\{\frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}x_2^2 + x_1 + 2x_2\right\}$, $2x_1 + 3x_2 \geq 6$, $x_1 + 4x_2 \geq 5$, $x_i \geq 0$, $i = 1, 2$.

26. $\max\left\{-20x_1 + 10x_2 - 3x_1^2 - 2x_2^2\right\}$, $-2x_1 - x_2 \leq 6$, $x_1 + x_2 \leq 10$, $x_2 \geq 0$.

27. $\min\left\{2x_1^2 + x_2^2 - x_1 + 2x_2\right\}$, $x_1 - 2x_2 \geq 20$, $-2x_1 + 6x_2 \geq -48$, $x_1 \geq 0$.

28. $\min\left\{x_1^2 + x_1x_2 + 2x_2^2 - 3x_1 - 16x_2\right\}$, $x_1 - x_2 \geq -2$, $x_1 + x_2 \leq 4$, $x_i \geq 0$, $i = 1, 2$.

29. $\min\left\{x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2 - 3x_1\right\}$, $x_1 + 2x_2 \leq 4$, $x_1 - x_2 \leq 1$, $x_i \geq 0$, $i = 1, 2$.

30. $\max\left\{10x_1 + 20x_2 + x_1x_2 - 2x_1^2 - 2x_2^2\right\}$, $2 \leq x_1 \leq 7$, $x_2 \geq 0$.

31. $\min\left\{(x_1 - 3)^2 + (x_2 - 2)^2\right\}$, $x_1 + x_2 = 4$, $x_i \geq 0$, $i = 1, 2$.

32. $\max\left\{6x_1 - 2x_1^2 + 2x_1x_2 - 2x_2^2\right\}$, $x_1 + x_2 \leq 2$, $x_i \geq 0$, $i = 1, 2$.

33. $\min\left\{x_1^2 + x_1x_2 + 4x_2^2 - 2x_1 + 8x_2\right\}$, $x_1 - x_2 \leq 4$, $2x_1 + 4x_2 \leq 1$, $x_2 \geq 0$.

Отговори и решения

§ 1. Кратки предварителни сведения

1. а) Тъй като $\mathbf{C}$ е положително полудефинитна, за всяко $t \in \mathbb{R}$ и $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ имаме $\langle \mathbf{C}(\mathbf{x}+t\mathbf{y}), \mathbf{x}+t\mathbf{y}\rangle \geq 0$ или $\langle \mathbf{Cx}, \mathbf{x}\rangle + 2t\,\langle \mathbf{Cx}, \mathbf{y}\rangle + t^2\,\langle \mathbf{Cy}, \mathbf{y}\rangle \geq 0$ и тъй като $\langle \mathbf{Cx}, \mathbf{x}\rangle = 0$, а t е произволно реално число, то $\langle \mathbf{Cx}, \mathbf{y}\rangle = 0$ за всички $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$. За $\mathbf{y} = \mathbf{Cx}$ имаме $\langle \mathbf{Cx}, \mathbf{Cx}\rangle = 0$, откъдето $\mathbf{Cx} = 0$.

б) $\langle \mathbf{ACAx}, \mathbf{x}\rangle = \langle \mathbf{C}(\mathbf{Ax}), \mathbf{Ax}\rangle \geq 0$ поради положителната полудефинитност на C.

2. Нека $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. Полагаме $\mathbf{y} = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{x}$ ($\mathbf{y} \neq \mathbf{0}$, тъй като $\mathbf{C}^{-1}$ е неособена). Имаме $0 < \langle \mathbf{Cy}, \mathbf{y}\rangle = \left\langle \mathbf{CC}^{-1}\mathbf{x}, \mathbf{C}^{-1}\mathbf{x}\right\rangle = \left\langle \mathbf{x}, \mathbf{C}^{-1}\mathbf{x}\right\rangle$, т. е. $\left\langle \mathbf{C}^{-1}\mathbf{x}, \mathbf{x}\right\rangle > 0$ за всяко $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$.

3. $\mathbf{Bx} = \mathbf{0}$ само при $\mathbf{x} = \mathbf{0}$, тъй като стълбовете на $\mathbf{B}$ са линейно независими. Трябва да покажем $\langle \mathbf{BBx}, \mathbf{x}\rangle > 0$ при $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$. Имаме $\langle \mathbf{BBx}, \mathbf{x}\rangle = \langle \mathbf{Bx}, \mathbf{Bx}\rangle = ||\mathbf{Bx}||^2 > 0$ при $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ (поради $\mathbf{Bx} = \mathbf{0}$ само при $\mathbf{x} = \mathbf{0}$).

4. Следва от дефиницията на положително дефинитна матрица и комутативния закон при числа.

5. Ако $a_{ii} < 0$ или $a_{ii} = 0$, но $a_{ij} + a_{ji} \neq 0$, неравенството $\langle \mathbf{Ax}, \mathbf{x}\rangle \geq \mathbf{0}$ няма да бъде изпълнено за всеки вектор $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. Обратното е очевидно.

6. $\langle \mathbf{Mx}, \mathbf{x}\rangle = \langle \mathbf{M}'\mathbf{x}, \mathbf{x}\rangle \geq 0$, където $\mathbf{M}' = \left(\begin{array}{c|c} \mathbf{C}_1 & 0 \\ \hline 0 & \mathbf{C}_2 \end{array}\right)$.

7. а) Не; б) не; в) не; г) не; д) изпъкнала; е) изпъкнала.

8. За произволна матрица $\mathbf{A}$ с размери $m \times n$, матрицата $\mathbf{C} = \mathbf{AA}$ е положително полудефинитна с размери $n \times n$. Тогава функцията $\langle \mathbf{Cx}, \mathbf{x}\rangle + \langle \mathbf{p}, \mathbf{x}\rangle$ е изпъкнала ($\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n$).

9. Например функцията $x_1^2 - x_2^2$ не е изпъкнала в $\mathbb{R}^2$, но е изпъкнала върху правата $x_2 = 0$. Изобщо, ако една квадратична функция не е изпъкнала в $\mathbb{R}^n$, тя може да бъде изпъкнала само в подмножество на $\mathbb{R}^n$, което лежи изцяло в подпространство (или линейно многообразие) на $\mathbb{R}^n$ с по-малка размерност.

10. Упътване. Ако λ е най-малката собствена стойност на квадратна симетрична матрица $\mathbf{C}$ ($n \times n$), то $\langle \mathbf{Cx}, \mathbf{x}\rangle \geq \lambda\,\langle \mathbf{x}, \mathbf{x}\rangle$ за всеки вектор $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ (вж. зад. 4, гл. 1).

§ 2. Формулировка и свойства на задачата на квадратичното оптимиране

1. Когато $f(\mathbf{x})$ е строго изпъкнала, теорема 2 следва веднага от факта, че в този случай $f(\mathbf{x})$ е силно изпъкнала (вж. зад. 10, § 1), а силно изпъкналите функции достигат минимална стойност в затворено множество. За произволна изпъкнала функция това не е така.

2. Функцията на Лагранж за задача (6) има вида

$$L(\mathbf{x},\mathbf{u}) = f(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^{m} u_i \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j - b_i \right) = \langle \mathbf{Cx},\mathbf{x}\rangle + \langle \mathbf{p},\mathbf{x}\rangle + \langle \mathbf{u},\mathbf{Ax}-\mathbf{b}\rangle\,.$$

Като положим $v = \dfrac{\partial L}{\partial \mathbf{x}} = \mathbf{p} + 2\mathbf{Cx} + \mathbf{Au}$ и $\mathbf{y} = -\dfrac{\partial L}{\partial \mathbf{u}} = -\mathbf{Ax} + \mathbf{b}$, локалните условия на Кун— Такър за задача 6 се изразяват именно със (7)–(10).

3. а) $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, $2\mathbf{Cx} - \mathbf{v} + \mathbf{Ax} = -\mathbf{p}$, $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$, $\mathbf{v} \geq \mathbf{0}$, $\langle \mathbf{x},\mathbf{v}\rangle = 0$.
б) $\mathbf{Ax} + \mathbf{y} = \mathbf{b}$, $2\mathbf{Cx} + \mathbf{Au} = -\mathbf{p}$, $\mathbf{y} \geq \mathbf{0}$, $\mathbf{u} \geq \mathbf{0}$, $\langle \mathbf{y},\mathbf{u}\rangle = \mathbf{0}$.

4. *Необходимост.* Следва от теорема 3 — условията на Кун — Такър (7)–(10) се удовлетворяват.

Достатъчност. Нека $\widetilde{\mathbf{x}}$, $\widetilde{\mathbf{y}}$, $\widetilde{\mathbf{u}}$, $\widetilde{\mathbf{v}}$ удовлетворяват (7)–(9). От $\widetilde{\mathbf{y}} \geq \mathbf{0}$ следва $\mathbf{A}\widetilde{\mathbf{x}} \leq \mathbf{b}$, т. е. $\widetilde{\mathbf{x}}$ е допустима точка и множеството от допустимите точки не е празно. Съгласно теорема 2 достатъчно е да покажем, че $f(\mathbf{x})$ е ограничена отдолу в множеството от допустимите точки. От изпъкналостта на $f(\mathbf{x})$ (вж. гл. 2, св. 1^0) за всяка допустима точка $\mathbf{x}$ имаме

$$\begin{aligned}
f(\mathbf{x}) - f(\widetilde{\mathbf{x}}) &\geq \langle \mathbf{x}-\widetilde{\mathbf{x}}, f'(\widetilde{\mathbf{x}})\rangle = \langle \mathbf{x}-\widetilde{\mathbf{x}}, 2\mathbf{C}\widetilde{\mathbf{x}}+\mathbf{p}\rangle = \langle \mathbf{x}-\widetilde{\mathbf{x}}, \widetilde{\mathbf{v}}-\mathbf{A}\widetilde{\mathbf{u}}\rangle \\
&= \langle \mathbf{x},\widetilde{\mathbf{v}}\rangle - \langle \widetilde{\mathbf{x}},\widetilde{\mathbf{v}}\rangle - \langle \mathbf{Ax},\widetilde{\mathbf{u}}\rangle + \langle \mathbf{A}\widetilde{\mathbf{x}},\widetilde{\mathbf{u}}\rangle \\
&= \langle \mathbf{x},\widetilde{\mathbf{v}}\rangle - \langle \widetilde{\mathbf{x}},\widetilde{\mathbf{v}}\rangle - \langle \mathbf{b}-\mathbf{y},\widetilde{\mathbf{u}}\rangle + \langle \mathbf{b}-\widetilde{\mathbf{y}},\widetilde{\mathbf{u}}\rangle \\
&= \langle \mathbf{x},\widetilde{\mathbf{v}}\rangle - \langle \widetilde{\mathbf{x}},\widetilde{\mathbf{v}}\rangle - \langle \mathbf{b},\widetilde{\mathbf{u}}\rangle + \langle \mathbf{y},\widetilde{\mathbf{u}}\rangle + \langle \mathbf{b},\widetilde{\mathbf{u}}\rangle - \langle \widetilde{\mathbf{y}},\widetilde{\mathbf{u}}\rangle \\
&\geq -\langle \widetilde{\mathbf{x}},\widetilde{\mathbf{v}}\rangle - \langle \widetilde{\mathbf{y}},\widetilde{\mathbf{u}}\rangle \geq 0,
\end{aligned}$$

т. е. $f(\mathbf{x}) \geq f(\widetilde{\mathbf{x}}) - \langle \widetilde{\mathbf{x}},\widetilde{\mathbf{v}}\rangle - \langle \widetilde{\mathbf{y}},\widetilde{\mathbf{u}}\rangle = \mathrm{const}$.

5. Вж. зад. 4 и заместете в последното неравенство произволна допустима точка $\mathbf{x}$ с решението $\mathbf{x}^*$.

6. За допустимата точка $\mathbf{x}_0 = (3,5)$ получаваме $\mathbf{y}_0 = (0,3,0)$. При $\mathbf{v}_0 = \mathbf{0}$ от (8) получаваме $\mathbf{u}_0 = (30,60,0)$, $f(\mathbf{x}_0) = -301$, $\langle \mathbf{x}_0,\mathbf{v}_0\rangle = 0$, $\langle \mathbf{y}_0,\mathbf{u}_0\rangle = 18$ и за $f(\mathbf{x}^*)$ получаваме $-319 \leq f(\mathbf{x}^*) \leq -301$.

7. Следва от общия вид на всички решения на задачата на изпъкналото оптимиране (вж. зад. 26, гл. 2) при $f(\mathbf{x}) = \langle \mathbf{C}\mathbf{x}, \mathbf{x}\rangle + \langle \mathbf{p}, \mathbf{x}\rangle$.

8. $\mathbf{x}^* = (1, 3)$, $f^* = \frac{17}{4}$.

9. $\mathbf{x}^* = (1, 2)$, $f^* = -10$.

10. $\mathbf{x}^* = (4, 1)$, $f^* = -27$.

11. $\mathbf{x}^* = \left(-\frac{30}{13}, \frac{46}{13}\right)$, $f^* = -\frac{1300}{169}$.

12. $\mathbf{x}^* = \left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right)$, $f^* = -\frac{3}{2}$.

13. $\mathbf{x}^* = (4, 4)$, $f^* = 304$.

14. $\mathbf{x}^* = (6, 0)$, $f^* = -48$.

15. $\mathbf{x}^* = \left(\frac{104}{25}, -\frac{3}{25}\right)$, $f^* = -\frac{1}{25}$.

16. $\mathbf{x}^* = (2, 4)$, $f^* = -44$.

17. $\mathbf{x}^* = (1, 0)$, $f^* = \frac{1}{2}$.

18. $\mathbf{x}^* = (1{,}615, 0{,}923)$, $f^* = -0{,}231$.

19. $\mathbf{x}^* = \left(\frac{6}{5}, \frac{9}{5}\right)$, $f^* = \frac{207}{25}$.

20. $\mathbf{x}^* = \left(\frac{5}{2}, 3\right)$, $f^* = 280$.

23.1. $\mathbf{x}^* = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, $u^* = 1$.

23.2. $\mathbf{x}^* = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$, $u^* = 0$.

23.3. $\mathbf{x}^* = (0, 0)$, $u^* = 0$.

23.4. $\mathbf{x}^* = (1, 0)$, $u^* = 0$.

23.5. $\mathbf{x}^* = \left(\frac{1}{2}, 0\right)$, $u^* = 0$.

24.1. $\mathbf{x}^* = (4, 6)$, $\mathbf{u}^* = (2, 0)$.

24.2. $\mathbf{x}^* = (1, 3)$, $\mathbf{u}^* = (1, 1)$.

25. Условията на Кун— Такър за тази задача са: $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, $2\mathbf{Cx} - \mathbf{v} + \mathbf{Au} = -\mathbf{p}$, $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$, $\mathbf{v} \geq \mathbf{0}$, $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = 0$. Даваме на n от променливите x_j, v_j стойност 0, така че да имаме $x_j v_j = 0$ за $j = 1, \dots, n$ (всичко възможни начини, по които може да стане това, са $C_n^0 + C_n^1 + \cdots + C_n^n = 2^n$). Решаваме получената след всяко фиксиране система уравнения. Първото решение на системата, за което останалите (нефиксирани) променливи x_j, v_j са неотрицателни, е решение на задачата.

26. $-f'(\mathbf{x}^*) = u^* g_1'(\mathbf{x}^*) + v^*(-g_2'(\mathbf{x}^*))$, където:

26.1. $-f'(\mathbf{x}^*) = (4, 4)$, $g_1'(\mathbf{x}^*) = (4, 2)$, $-g_2'(\mathbf{x}^*) = (-1, 2)$, $u^* = \frac{6}{5}$, $v^* = \frac{4}{5}$.

26.2. $-f'(\mathbf{x}^*) = (-2, -8)$, $g_1'(\mathbf{x}^*) = (-6, -2)$, $-g_2'(\mathbf{x}^*) = (2, -1)$, $u^* = \frac{9}{5}$, $v^* = \frac{22}{5}$.

§ 3. Методи за решаване на задача от квадратичното оптимиране

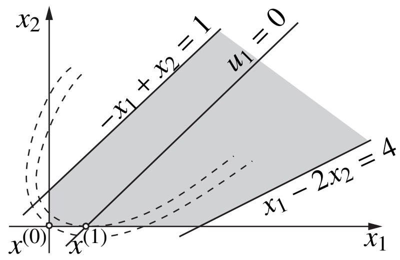
1. Действително, методът на Бил може да се прилага за задачи на линейното оптимиране и ходът на решението съвпада с този при симплекс-метода: преминаването от един план към друг става по съседни опорни планове (налице е винаги случаят а) от схемата на метода на Бил); критерият за оптималност, приложен за линейни задачи, съвпада с този на симплекс-метода.

2.1. Въвеждаме допълнителните променливи $x_3 \geq 0$ и $x_4 \geq 0$ и записваме ограниченията на задачата в каноничен вид.

Итерация 0. $\mathbf{x}^{(0)} = (0, 0, 4, 1)$; $\mathbf{x}_B = (x_3, x_4)$, $\mathbf{x}_N = (x_1, x_2)$, $x_3 = 4 - x_1 + 2x_2$, $x_4 = 1 + x_1 - x_2$, $\dfrac{\partial f^{(0)}(\mathbf{x}^{(0)})}{\partial x_1} = -2$, $\dfrac{\partial f^{(0)}(\mathbf{x}^{(0)})}{\partial x_2} = -4$, т. е. $x^{(0)}$ не е оптимален.

Итерация 1. $\mathbf{x}^{(1)} = (1, 0, 4, 1, 0)$; $\mathbf{x}_B = (x_3, x_4, x_1)$, $\mathbf{x}_N = (x_2, u_1)$, $u_1 = -2 + 2x_1 - 2x_2$, $x_1 = 1 + x_2 + \frac{1}{2}u_1$, $x_3 = 3 + x_2 - \frac{1}{2}u_1$, $x_4 = 2 + \frac{1}{2}u_1$, $f^{(1)}(\mathbf{x}^{(1)}) = -1 + \frac{1}{4}u_1^2 - 6x_2$, $\dfrac{\partial f^{(1)}(\mathbf{x}^{(1)})}{\partial u_1} = 0$, $\dfrac{\partial f^{(1)}(\mathbf{x}^{(1)})}{\partial x_2} = -6 < 0$, т. е. $\mathbf{x}^{(1)}$ не е оптимален, но при $\mathbf{x}_2^{(1)} \to \infty$ променливите x_1, x_3 и x_4 остават положителни, а $\dfrac{\partial f^1}{\partial x_2} = -3 < 0$— налице е критерият за неограниченост на $f(\mathbf{x})$.

2.2. Посоката $\overline{\mathbf{y}}$, по която f намалява неограничено в областта, се определя от коефициентите пред $\mathbf{x}_2^{(1)}$ в представянето на $\mathbf{x}_B = (x_1, x_3, x_4)$ чрез $\mathbf{x}_N = (x_2, u_1)$. Получаваме $\overline{\mathbf{y}} = (1, 1, 1, 0)$, или за изходната задача $\overline{\mathbf{y}} = (1, 1)$. Геометрично ходът на решението е представен на фиг. 20.



Фиг. 20

3. Системата от условията на Кун—Такър за задачата е:

$$\begin{array}{rrrrrrrrrrl}
x_1 & - 2x_2 & + x_3 & & & & & & & & = 4, \\
-x_1 & + x_2 & & + x_4 & & & & & & & = 1, \\
2x_1 & - 2x_2 & & & - v_1 & & & & + u_1 & - u_2 & = 2, \\
-2x_1 & + 2x_2 & & & & - v_2 & & & - 2u_1 & + u_2 & = 4, \\
& & & & & & - v_3 & & + u_1 & & = 0, \\
& & & & & & & - v_4 & & + u_2 & = 0,
\end{array}$$

$$x_j \geq 0,\ v_j \geq 0,\ x_j v_j = 0, \quad j = 1, 2, 3, 4.$$

От последните две уравнения имаме $u_1 = v_3 \geq 0$, $u_2 = v_4 \geq 0$. Записваме системата в следната еквивалентна форма, към която прилагаме направо трети етап:

$$\begin{array}{rrrrrrrrrll}
x_1 & - 2x_2 & + x_3 & & & & & & & = 4, & \\
-x_1 & + x_2 & & + x_4 & & & & & & = 1, & \\
2x_1 & - 2x_2 & & & - v_1 & & + v_3 & - v_4 & - 2\mu & = 0, & |.(-1) \\
-2x_1 & + 2x_2 & & & & - v_2 & - 2v_3 & + v_4 & - 4\mu & = 0, & |.(-1)
\end{array}$$

$$x_j \geq 0,\ v_j \geq 0,\ \mu \geq 0,\ j = 1, 2, 3, 4.$$

Таблиците могат да бъдат намерени на следващата страница.

Налице е критерият за оптималност на линейната задача. Променливата μ има стойност 0 и не може да нараства повече. Съгласно правилата на метода на Вулф е изпълнен критерият за неограниченост на целевата функция на квадратичната задача. Координатите на вектор, определящ посоката на неограниченото намаляване на $f(\mathbf{x})$ в областта, се определят от стълба, съответстващ на x_2 в последната таблица.

4. а) за $0 \leq \lambda \leq \frac{1}{3}$ $\mathbf{x}^*(\lambda) = (3\lambda, 3\lambda)$, $f^*(\lambda) = -9\lambda^2$;

Итерация 0

									$*$	$*$	
B	$\mathbf{c}^B$	$\boldsymbol{\beta}$	0	0	0	0	0	0	0	0	1
			x_1	x_2	x_3	x_4	v_1	v_2	v_3	v_4	μ
x_3	0	4	1	-2	1	0	0	0	0	0	0
x_4	0	1	-1	1	0	1	0	0	0	0	0
v_1	0	0	-2	2	0	0	1	0	-1	1	$\boxed{2}$
v_2	0	0	2	-2	0	0	0	1	2	-1	4
		0	0	0	0	0	0	0	0	0	1

Итерация 1

				$*$					$*$	$*$	
B	$\mathbf{c}^B$	$\boldsymbol{\beta}$	0	0	0	0	0	0	0	0	1
			x_1	x_2	x_3	x_4	v_1	v_2	v_3	v_4	μ
x_3	0	4	1	-2	1	0	0	0	0	0	0
x_4	0	1	-1	1	0	1	0	0	0	0	0
μ	1	0	-1	1	0	0	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1
v_2	0	0	$\boxed{6}$	-6	0	0	-2	1	4	-3	0
		0	1	-1	0	0	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0

Итерация 2

							$*$		$*$	$*$	
B	$\mathbf{c}^B$	$\boldsymbol{\beta}$	0	0	0	0	0	0	0	0	1
			x_1	x_2	x_3	x_4	v_1	v_2	v_3	v_4	μ
x_3	0	4	0	-1	1	0	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{6}$	$-\frac{2}{3}$	$\frac{1}{2}$	0
x_4	0	1	0	0	0	1	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{2}$	0
μ	1	0	0	0	0	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	0	1
x_1	0	0	1	-1	0	0	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{2}$	0
		0	0	0	0	0	$-\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{6}$	0	0

б) за $\frac{1}{3} \le \lambda \le 2$ $\mathbf{x}^*(\lambda) = \left(\frac{3\lambda+4}{5}, \frac{6-3\lambda}{5}\right)$, $f^*(\lambda) = \frac{4-9\lambda^2-24\lambda}{5}$;
в) за $\lambda \ge 2$ $\mathbf{x}^*(\lambda) = (2, 0, 0)$, $f^*(\lambda) = 4(2-3\lambda)$.

5. а) $\mathbf{x}^* = \left(\frac{10}{3}, \frac{14}{3}\right)$, $f^* = -\frac{388}{3}$.
б) $\mathbf{x}^* = (4, 4)$, $f^* = -304$.
в) $\mathbf{x}^* = \left(\frac{14}{3}, \frac{10}{3}\right)$, $f^* = -\frac{1444}{3}$.
г) $\mathbf{x}^* = \left(\frac{16}{3}, \frac{8}{3}\right)$, $f^* = -\frac{1984}{3}$.

6. $\mathbf{x}^* = \left(\frac{13}{17}, \frac{15}{17}\right)$, $f^* = -2{,}029$.

7. $\mathbf{x}^* = (1, 3)$, $f^* = 18$.

8. $\mathbf{x}^* = (0{,}308, 2{,}538)$, $f^* = -21{,}308$.

9. $\mathbf{x}^* = (1, 2)$, $f^* = -11$.

10. $\mathbf{x}^* = (2, 0)$, $f^* = 2$.

11. $\mathbf{x}^* = (3, 5)$, $f^* = 77$.

12. $\mathbf{x}^* = \left(1, \frac{3}{2}\right)$, $f^* = -14\frac{3}{4}$.

13. $\mathbf{x}^* = \left(\frac{5}{2}, 0, \frac{7}{4}\right)$, $f^* = -8\frac{1}{4}$.

14. $\mathbf{x}^* = (2, 4)$, $f^* = -22$.

15. $\mathbf{x}^* = \left(0, \frac{13}{4}, \frac{1}{2}\right)$, $f^* = 6\frac{1}{4}$.

16. $\mathbf{x}^* = \left(4\frac{1}{6}, 3\frac{5}{6}, \frac{1}{6}\right)$, $f^* = 11{,}917$.

17. $\mathbf{x}^* = (4{,}44, 5{,}78)$, $f^* = -108{,}44$.

18. $\mathbf{x}^* = (1, 0)$, $f^* = \frac{1}{2}$.

19. $\mathbf{x}^* = \left(-\frac{30}{13}, \frac{46}{13}\right)$, $f^* = -\frac{100}{13}$.

20. $\mathbf{x}^* = (4{,}2, 8{,}16)$, $f^* = -20$.

21. $\mathbf{x}^* = (10, 0)$, $f^* = 10$.

22. $\mathbf{x}^* = \left(\frac{5}{2}, \frac{3}{2}\right)$, $f^* = \frac{1}{2}$.

23. Целевата функция е неограничена.

24. $\mathbf{x}^* = (2, 0)$, $f^* = -8$.

25. $\mathbf{x}^* = (1{,}15, 1{,}23)$, $f^* = 5{,}04$.

26. $\mathbf{x}^* = \left(-\frac{10}{3}, \frac{5}{2}\right)$, $f^* = 45\frac{5}{6}$.

27. $\mathbf{x}^* = (12, -4)$, $f^* = 284$.

28. $\mathbf{x}^* = (1, 3)$, $f^* = -29$.

29. $\mathbf{x}^* = (1, 0)$, $f^* = -2$.

30. $\mathbf{x}^* = (4, 6)$, $f^* = 80$.

31. $\mathbf{x}^* = \left(\frac{9}{2}, \frac{1}{2}\right)$, $f^* = \frac{9}{2}$.

32. $\mathbf{x}^* = \left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$, $f^* = -\frac{11}{2}$.

33. $\mathbf{x}^* = \left(\frac{1}{2}, 0\right)$, $f^* = -\frac{3}{4}$.

Глава 9

Някои по-тесни класове оптимизационни задачи. Алгоритми

Почти всяка от предложените тук оптимизационни задачи спада към някой от разгледаните вече класове (линейни, квадратични, изпъкнали, дискретни и др.) и може да се решава със съответните за класа методи. Спецификата им обаче позволява да се създадат много по-ефективни методи за тяхното решаване. Задачите са резултат от моделиране на реалните системи и имат практическо значение.

Задачи

1. Да се предложат алгоритми за решаване на следните задачи:

1.1. $\max\left\{l(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j : \mathbf{x} \in X\right\}$, където $X = \{\mathbf{x} : 0 \le x_1 \le \cdots \le x_n \le 1\}$.

1.2. $\max\left\{l(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j : \mathbf{x} \in X\right\}$, където $X = \{\mathbf{x} : a \le x_1 \le \cdots \le x_n \le b\}$.

1.3. $\max\left\{l(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j : \mathbf{x} \in X\right\}$, където

$$X = \{\mathbf{x} : a \le x_1,\ x_1 + \varepsilon_1 \le x_2,\ x_2 + \varepsilon_2 \le x_3, \ldots,\ x_{n-1} + \varepsilon_{n-1} \le x_n,\ x_n \le b\},$$

a, b са произволни реални числа и $\varepsilon_i \ge 0$, $1, \ldots, n-1$. Съставете програми по предложените алгоритми.

2. Нека $h(\mathbf{x}) = \dfrac{p(\mathbf{x})}{q(\mathbf{x})} = \dfrac{p_0 + \sum\limits_{j=1}^{n} p_j x_j}{q_0 + \sum\limits_{j=1}^{n} q_j x_j}$ и $X = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : a_j \le x_j \le b_j,\ j = 1,\dots,n\}$. Ще предполагаме, че $q(\mathbf{x}) > 0$ за всяко $\mathbf{x} \in X$, $q_j \neq 0$ и $a_j < b_j$, $j = 1,\dots,n$. Да означим: $J = \{1,\dots,n\}$, $\Delta_j = \dfrac{p_j}{q_j}$, $j = 1,\dots n$, $J_+ = \{j \in J : q_j > 0\}$, $J_- = \{j \in J : q_j < 0\}$, и за всяко $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ $J_a(\mathbf{x}) = \{j \in J : x_j = a_j\}$, $J_b(\mathbf{x}) = \{j \in J : x_j = b_j\}$.

Докажете, че $\mathbf{x}^* = (x_1^*,\dots,x_n^*)$ е решение на задачата $\max\{h(\mathbf{x}) : \mathbf{x} \in X\}$ тогава и само тогава, когато

а) $h(\mathbf{x}^*) \ge \Delta_j$ за $j \in (J_a(\mathbf{x}^*) \cap J_+) \cup (J_b(\mathbf{x}^*) \cap J_-)$,

б) $h(\mathbf{x}^*) \le \Delta_j$ за $j \in (J_a(\mathbf{x}^*) \cap J_-) \cup (J_b(\mathbf{x}^*) \cap J_+)$,

в) $h(\mathbf{x}^*) = \Delta_j$ за $j \in J \setminus (J_a \cup J_b)$.

Да се направи алгоритъм за решаването ѝ. Програмирайте предложения алгоритъм.

3. Дадена е оптимизационната задача $\min\left\{f(\mathbf{x}) = \sum\limits_{i=1}^{n} x_j^2 : \mathbf{x} \in P_\sigma[a,b]\right\}$, където $P_\sigma[a,b] = \left\{\mathbf{x} : a_j \le x_j \le b_j, j = 1,\dots,n; \sum\limits_{j=1}^{n} x_j = \sigma\right\}$.

Да се докаже, че $\mathbf{x}^* = (x_1^*,\dots,x_n^*) \in P_\sigma[a,b]$ е решение на задачата точно тогава, когато съществува такова w, че:

а) $x_j^* = w$, ако $a_j < x_j^* < b_j$;

б) $x_j^* \ge w$, ако $x_j^* = a_j$;

в) $x_j^* \le w$, ако $x_j^* = b_j$.

Да се направи ефективен алгоритъм за решаването ѝ. Програмирайте предложения алгоритъм.

4. С алгоритъма, предложен за решаване на зад. 3, да се решат следните задачи:

4.1. $\min\left\{f(\mathbf{x}) = \sum\limits_{j=1}^{10} x_j^2 : \sum\limits_{j=1}^{10} x_j = 70,\ j \le x_j \le 2j,\ j = 1,\dots,10\right\}$,

4.2. $\min\left\{\sum\limits_{j=1}^{12} x_j^2 + \sum\limits_{j=1}^{12} (-1)^j x_j : \sum\limits_{j=1}^{12} x_j = 200,\ 2j \le x_j \le 3j,\ j = 1,\dots,12\right\}$.

5. За оптимизационната задача $\min\left\{f(\mathbf{x}) = \sum\limits_{j=1}^{n} c_j x_j^2 : \mathbf{x} \in P_\sigma[a,b]\right\}$ множеството $P_\sigma[a,b]$ е определено в зад. 3 и $c_j > 0$, $j = 1,\dots,n$. Да се докаже, че $\mathbf{x}^* = (x_1^*,\dots,x_n^*) \in P_\sigma[a,b]$ е решение на задачата тогава и само тогава, когато съществува w такова, че:

а) $x_j^* = \dfrac{w}{\sqrt{c_j}}$, ако $a_j < x_j^* < b_j$;

б) $x_j^* \geq \dfrac{w}{\sqrt{c_j}}$, ако $x_j^* = a_j$;

в) $x_j^* \leq \dfrac{w}{\sqrt{c_j}}$, ако $x_j^* = b_j$.

Да се направи ефективен алгоритъм за решаването ѝ и да се програмира.

6. Да се състави алгоритъм за решаването на оптимизационната задача $\min\left\{f(\mathbf{x}) = \dfrac{1}{2}\sum\limits_{j=1}^{n} c_j x_j^2 + \sum\limits_{j=1}^{n} d_j x_j : \mathbf{x} \in P_\sigma[a,b]\right\}$, където $c_j > 0$, $j = 1,\dots,n$, а множеството $P_\sigma[a,b]$ е определено в зад. 3.

7. Да се намери в експлицитен вид решението на задачата

$$\min\left\{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} x_{ij}^2 : \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i,\ i = 1,\dots,m,\ \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_i,\ j = 1,\dots,n\right\},$$

където a_i, $i = 1,\dots,m$, и b_j, $j = 1,\dots,n$, са дадени реални числа, изпълняващи условието $\sum\limits_{i=1}^{m} a_i = \sum\limits_{j=1}^{n} b_j = s$.

Да се напише програма за пресмятане на решението.

8. Да се намери в експлицитен вид решението на задачата

$$\min\left\{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} (x_{ij} - c_{ij})^2 : \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i,\ i = 1,\dots,m,\ \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j,\ j = 1,\dots,n\right\},$$

където a_i, $i = 1,\dots,m$, b_j, $j = 1,\dots,n$, изпълняват условието $\sum\limits_{i=1}^{m} a_i = \sum\limits_{j=1}^{n} b_j$.

9. Да означим с M пространството на реалните матрици с размер $m \times n$. Под разстояние между две матрици $\mathbf{X}$ и $\mathbf{Y}$ от M ще разбираме числото $d(\mathbf{X},\mathbf{Y}) = \left\{\sum\limits_{i=1}^{m}\sum\limits_{j=1}^{n} (x_{ij} - y_{ij})^2\right\}^{\frac{1}{2}}$.

Нека B е подпространството на M от балансираните матрици (матриците, за които сумата от елементите от всеки ред и всеки стълб е нула), а $\mathbf{C}_B$ е проекцията на матрицата $\mathbf{C} \in M$ върху B, т. е. $d(\mathbf{C}, \mathbf{C}_B) = \inf\limits_{\mathbf{X} \in B} d(\mathbf{C}, \mathbf{X})$.

а) Да се докаже, че всяка матрица $\mathbf{C} \in M$ има, и то единствена проекция върху B.

б) Да се намерят елементите на матрицата $\mathbf{C}_B$ в експлицитен вид в зависимост от елементите на матрицата $\mathbf{C}$.

в) Да се напише програма за изчисляване на елементите на матрицата $\mathbf{C}_B$.

10. Нека функцията $\varphi(t)$ е изпъкнала и диференцируема за всяко $t \in \mathbb{R}^1$, $a_0, a_1, \dots, a_n$ са реални числа, удовлетворяващи условията: $a_0 = 0$, $a_k \geq \frac{1}{2}(a_{k-1} + a_{k+1})$, $k = 1, \dots, n-1$. Да се намери, точка $\mathbf{x}^* = (x_1^*, \dots, x_n^*)$ от областта $X = \left\{\mathbf{x} : \sum\limits_{j=1}^{k} x_i \geq a_k, k = 1, \dots, n, \sum\limits_{j=1}^{n} x_j = a_n\right\}$, в която функцията $f(\mathbf{x}) = \sum\limits_{j=1}^{n} \varphi(x_j)$ достига минимума си в тази област, т. е. $f(\mathbf{x}^*) = \min\{f(\mathbf{x}) : \mathbf{x} \in X\}$.

11. Нека $\varphi_j(t)$, $j = 1, \dots, n$, са непрекъснати монотонно растящи функции, $f(\mathbf{x}) = \min\limits_{1 \leq j \leq n} \varphi_j(\mathbf{x})$ и

$$X = \left\{\mathbf{x} : \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i,\ i = 1, \dots, m,\ x_j \geq 0,\ j = 1, \dots, n\right\},$$

$a_{ij} > 0$, $b_i > 0$, $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$. Да се докаже,че $\mathbf{x}^* = (x_1^*, \dots, x_n^*) \in X$ е решение на оптимизационната задача $\max\{f(\mathbf{x}) : \mathbf{x} \in X\}$ точно тогава, когато съществува t^* такова, че:

а) за поне едно i_0, $1 \leq i_0 \leq m$, $\sum\limits_{j=1}^{n} a_{i_0 j} x_j^* = b_{i_0}$;

б) ако $x_j^* > 0$, то $\varphi_j(x_j^*) = t^*$;

в) ако $x_j^* = 0$, то $\varphi_j(x_j^*) \geq t^*$.

12. Да се намери експлицитен вид на решението на оптимизационната задача $\max\limits_{\mathbf{x} \in X} \min\limits_{1 \leq j \leq n} c_j x_j$, където

$$X = \left\{\mathbf{x} : \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i,\ i = 1, \dots, m,\ x_j \geq 0,\ j = 1, \dots, n\right\}$$

и $a_{ij} > 0$, $b_i > 0$, $c_j > 0$, $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$.

13. Да се направи ефективен алгоритъм за решаване на оптимизационната задача $\max\limits_{\mathbf{x} \in X} \min\limits_{1 \le j \le n} (c_j x_j + d_j)$, където

$$X = \left\{ \mathbf{x} : \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i,\ i = 1, \dots, m,\ x_j \ge 0,\ j = 1, \dots, n \right\}$$

и $a_{ij} > 0$, $b_i > 0$, $c_j > 0$, $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$.

14. За даден е вектор $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ ще означим с $P_{\mathbf{b}}$ множеството от всички n-мерни вектори, получени от вектора **b** чрез пермутиране на компонентите му. Да се намери $\mathbf{y}^* \in P_{\mathbf{b}}$ такова, че $\langle \mathbf{a}, \mathbf{y}^* \rangle = \min\limits_{\mathbf{y} \in P_{\mathbf{b}}} \langle \mathbf{a}, \mathbf{y} \rangle$.

Отговори и решения

1.1. Задачата има решение, тъй като областта не е празна и е компактна. Решението ѝ ще търсим измежду опорните планове, а те са: $\mathbf{x}^k = (0, \dots, 0, \underbrace{1, 1, \dots, 1}_{k}),\ k = 0, 1, \dots, n$.

Стойностите на целевата функция за тези планове са съответно:

$$
\begin{aligned}
&l(\mathbf{x}^0) = 0 = s_0,\\
&l(\mathbf{x}^1) = c_n = s_1,\\
&l(\mathbf{x}^2) = c_{n-1} + c_n = s_2,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&l(\mathbf{x}^k) = c_{n-k+1} + \dots + c_n = s_k,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&l(\mathbf{x}^n) = c_1 + c_2 + \dots + c_n = s_n.
\end{aligned}
$$

Следователно $\max\limits_{\mathbf{x}\in X} l(\mathbf{x}) = \max\limits_{0\le k\le n} l(\mathbf{x}^k)$. Така че, ако $s_{k_0} = \max\limits_{0\le k\le n} l(\mathbf{x}^k)$, то решението на задачата е $\mathbf{x}^{k^0} = (0, 0, \dots, 0, \underbrace{1, \dots, 1}_{k_0})$ и $l(\mathbf{x}^{k^0}) = s_{k_0}$. Построяването на алгоритъм за намиране на максималното s_k е тривиално.

1.2. Използвайте идеята в зад. 1.1.

1.3. Ако представим ограниченията в еквивалентния им вид

$$a \le x_1 \le x_2 - \varepsilon_1 \le x_3 - \varepsilon_2 - \varepsilon_1 \le x_n - \varepsilon_{n-1} - \dots - \varepsilon_1 \le b - \varepsilon_{n-1} - \dots - \varepsilon_1,$$

очевидно с линейната трансформация задачата се свежда до зад. 1.2 или 1.1.

2. Условията а), б), в) се получават от очевидните необходими и достатъчни условия за оптималност:

$$\frac{\partial h(\mathbf{x}^*)}{\partial x_j} \le 0,\ \text{за}\ x_j^* = a_j, \quad \frac{\partial h(\mathbf{x}^*)}{\partial x_j} \ge 0\ \text{за}\ x_j^* = b_j, \quad \frac{\partial h(\mathbf{x}^*)}{\partial x_j} = 0\ \text{за}\ a_j < x_j^* < b_j.$$

Алгоритъм

1. Пресмятаме $\Delta_j = p_j/q_j$.

2. Подреждаме $\Delta_{j_1} \ge \Delta_{j_2} \ge \dots \ge \Delta_{j_n}$.

3. Определяме множествата $J_+ = \{j : q_j > 0\}$ и $J_- = \{j : q_j < 0\}$.
4. $k := 0$.
5. $x_j := a_j$ за $j \in J_+$, $x_j := b_j$ за $j \in J_-$.
6. $h := h(\mathbf{x})$.
7. $k := k + 1$.
8. Ако $\Delta_{j_k} > h$, към т. 9. Ако $\Delta_{j_k} \leq h$, към т. 12.
9. Ако $j_k \in J_+$, към т. 10. Ако $j_k \in J_-$, към т. 11.
10. $x_{j_k} := b_{j_k}$; към т. 6.
11. $x_{j_k} := a_{j_k}$; към т. 6.
12. Край.

3. *Необходимост*. Нека $\mathbf{x}^* \in P_\sigma[a,b]$ е решение на оптимизационната задача. Следователно съществуват константи λ, μ_j и ν_j, $j = 1, \dots, n$, такива, че са изпълнени условията на Кун—Такър

$$\begin{aligned} &x_j^* - \lambda - \mu_j + \nu_j = 0, \qquad && \nu_j(x_j^* - b_j) = 0, \\ &\mu_j(-x_j^* + a_j) = 0, && \mu_j \geq 0,\ \nu_j \geq 0,\ j = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

Оттук,

- ако $a_j < x_j^* < b_j$, то $\mu_j = \nu_j = 0$, следователно $x_j^* = \lambda$;
- ако $x_j^* = a_j$, то $\mu_j \geq 0$, $\nu_j = 0$, следователно $x_j^* = \lambda + \mu_j \geq \lambda$;
- ако $x_j = b_j$, то $\mu_j = 0$, $\nu_j \geq 0$, следователно $x_j^* = \lambda - \nu_j \leq \lambda$.

С това необходимостта е доказана, $w = \lambda$.

Достатъчност. Нека $\mathbf{x}^* \in P_\sigma[a,b]$ и удовлетворява условията а), б) и в). Полагаме

$$\begin{aligned} &\lambda = w, && \\ &\mu_j = \nu_j = 0, && \text{ако } a_j < x_j^* < b_j; \\ &\mu_j = x_j^* - \lambda,\ \nu_j = 0, && \text{ако } x_j^* = a_j; \\ &\mu_j = 0,\ \nu_j = \lambda - x_j', && \text{ако } x_j^* = b_j. \end{aligned}$$

Очевидно $\mathbf{x}^*$, λ, μ_j, ν_j удовлетворяват условията на Кун—Такър. Следователно x^* е решение на оптимизационната задача. Въвеждаме означенията

$$J = \{1, 2, \dots, n\}, \qquad J_w = \{j \in J : a_j < w < b_j\},$$
$$J_w^a = \{j \in J : a_j \geq w\}, \quad J_w^b = \{j \in J : b_j \leq w\}.$$

Броят на елементите в множествата J_w, J_w^a, J_w^b означаваме съответно с $N(J_w)$, $N(J_w^a)$, $N(J_w^b)$.

Алгоритъм

1. Ако е изпълнено условието $\sum_{j=1}^{n} a_j \leq \sigma \leq \sum_{j=1}^{n} b_j$, към т. 2, иначе към т. 9.
2. $w := \sigma/n$.
3. Образуваме множествата J_w, J_w^a, J_w^b и определяме $N(J_w)$.
4. $\Delta := \sigma - \sum_{J_w^a} a_j - \sum_{J_w^b} b_j - N(J_w)w$.
5. Ако $\Delta = 0$, към т. 8; ако $\Delta < 0$, към т. 6; ако $\Delta > 0$, към т. 7.
6. $J := J \setminus J_w^a$, $\sigma := \sigma - \sum_{J_w^a} a_j$, $n := n - N(J_w^a)$, $x_j := a_j$, $j \in J_w^a$. Към т. 2.
7. $J := J \setminus J_w^b$, $\sigma := \sigma - \sum_{J_w^b} b_j$, $n := n - N(J_w^b)$, $x_j := b_j$, $j \in J_w^b$. Към т. 2.
8. $x_j := a_j$, $j \in J_w^a$, $x_j := b_j$, $j \in J_w^b$, $x_j := w$, $j \in J_w$. Към т. 10.
9. Няма решение: $P_\sigma[a, b] = \emptyset$.
10. Край.

4.1. $x_j^* = 2j$, $j = 1, 2, 3$, $x_j^* = 7\frac{3}{4}$, $j = 4, 5, 6, 7$, $x_j^* = j$, $j = 8, 9, 10$, $f^* = 541\frac{1}{4}$;

4.2. $x_j^* = 3j$, $j = 1, \dots, 7$, $x_8^* = 22\frac{1}{2}$, $x_9^* = 23\frac{1}{2}$, $x_{10}^* = 22\frac{1}{2}$, $x_{11}^* = 23\frac{1}{2}$, $x_{12}^* = 24$, $f^* = 3969$.

5. Свежда се към зад. 3 с подходяща трансформация.

6. *Упътване.*

$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} c_j x_j^2 + \sum_{j=1}^{n} d_j x_j = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} c_j \left(x_j + \frac{d_j}{c_j}\right)^2 - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} \frac{d_j^2}{c_j}.$$

7. Функцията на Лагранж, съответстваща на оптимизационната задача, е

$$L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu}) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} x_{ij}^2 - \sum_{i=1}^{m}\lambda_i\left(\sum_{j=1}^{n} x_{ij} - a_i\right) - \sum_{j=1}^{n}\mu_j\left(\sum_{i=1}^{m} x_{ij} - b_j\right),$$

а условията за екстремум са:

$$(1) \qquad x_{ij} - \lambda_i - \mu_j = 0, \quad i = 1,\dots,m, \quad j = 1,\dots,n,$$

$$(2) \qquad \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, \qquad j = 1,\dots,m,$$

$$(3) \qquad \sum_{j=1}^{m} x_{ij} = b_j, \qquad j = 1,\dots,n.$$

От (1) имаме $x_{ij} = \lambda_i + \mu_j$. Като сумираме в (1) по i, по j и по i и j и отчетем (2) и (3), получаваме

$$(4) \qquad b_j - \sum_{i=1}^{m}\lambda_i - m\mu_j = 0,$$

$$(5) \qquad a_i - n\lambda_i - \sum_{j=1}^{n}\mu_j = 0,$$

$$(6) \qquad s - n\sum_{i=1}^{m}\lambda_i - m\sum_{j=1}^{n}\mu_j = 0 \quad \left(s = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} x_{ij}\right).$$

Умножаваме (4) с n, (5) — с m, събираме и като вземем предвид (6), получаваме $nb_j + ma_i - s - mn(\lambda_i + \mu_j) = 0$. Оттук $\lambda_i + \mu_j = \dfrac{a_i}{n} + \dfrac{b_j}{m} - \dfrac{s}{mn}$. Следователно $x_{ij} = \dfrac{a_i}{n} + \dfrac{b_j}{m} - \dfrac{s}{mn}$, $i = 1,\dots,m$, $j = 1,\dots,n$.

8. *Упътване*. С линейна трансформация се свежда до зад. 7.

9. *Упътване*. Виж предните две задачи.

10. Условията на Кун—Такър за оптимизационната задача при функция на Лагранж

$$L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}) = \sum_{j=1}^{n}\varphi(x_j) + \sum_{k=1}^{n}\lambda_k\left(-\sum_{j=1}^{k} x_j + a_k\right) = \sum_{j=1}^{n}\varphi(x_j) - \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{k=j}^{n}\lambda_k\right)x_j + \sum_{k=1}^{n} a_k\lambda_k$$

са:

$$(7) \qquad \varphi'(x_j) - \sum_{k=j}^{n} \lambda_k = 0, \quad j = 1, \ldots, n,$$

$$(8) \qquad \sum_{j=1}^{k} x_j \ge a_k, \qquad k = 1, \ldots, n-1,$$

$$(9) \qquad \sum_{j=1}^{n} x_j = a_n,$$

$$(10) \qquad \lambda_k \ge 0, \qquad k = 1, \ldots, n-1.$$

Очевидно $x_1^* = a_1$, $x_j^* = a_j - a_{j-1}$, $j = 1, \ldots, n$, е решение на (8) и (9), а $\lambda_n = \varphi'(x_n)$, $\lambda_k = \varphi'(x_k) - \varphi'(x_{k+1})$, $k = 1, \ldots, n-1$, е решение на (7) за всяко $\mathbf{x}$. Следователно $\lambda_k^* = \varphi'(x_k^*) - \varphi'(x_{k-1}^*)$, $k = 1, \ldots, n-1$, $\lambda_n^* = \varphi'(x_n^*)$ удовлетворяват (7). От условията за a_k се вижда, че $x_{k+1}^* \le x_k^*$, $k = 1, \ldots, n-1$. Оттук и от това, че $\varphi(t)$ е изпъкнала ($\varphi'(t)$ — монотонно растяща), следва, че λ_k^* удовлетворяват и условията (10). Следователно $\mathbf{x}^* = (x_1^*, \ldots, x_n^*)$ е решение на оптимизационната задача.

11. *Упътване*. Използвайте това, че $t^* = \max\limits_{\mathbf{x} \in X} \varphi(\mathbf{x})$.

12. $t^* = \min\limits_i \dfrac{b_i}{\sum\limits_{j=1}^{n} \frac{a_{ij}}{c_j}}$, $x_k^* = \dfrac{t^*}{c_k}$, $k = 1, \ldots, n$.

13. *Упътване*. Да се използват условията от зад. 11.

14. Означаваме с $\pi_r(\mathbf{a}) = (a_{r_1}, \ldots, a_{r_n})$ такава пермутация на вектора $\mathbf{a}$, за която $a_{r_1} \le a_{r_2} \le \cdots \le a_{r_n}$, а с $\pi_s(\mathbf{b}) = (b_{s_1}, \ldots, b_{s_n})$ — пермутация на $\mathbf{b}$, за която $b_{s_1} \ge b_{s_2} \ge \cdots \ge b_{s_n}$. Ще покажем, че $\mathbf{y}^* = \pi_r^{-1}(\pi_s(\mathbf{b}))$. Вземаме произволно $\mathbf{y} \in P_{\mathbf{b}}$. Очевидно $\mathbf{y}$ не може да се представи във вида $\mathbf{y} = \pi_r^{-1}(\pi_t(\mathbf{b}))$, където $\pi_t(\mathbf{b}) = (b_{t_1}, \ldots, b_{t_n})$ е подходяща пермутация на на $\mathbf{b}$. Тогава

$$\begin{aligned}
\langle \mathbf{a}, \mathbf{y}^* \rangle - \langle \mathbf{a}, \mathbf{y} \rangle &= \left\langle \mathbf{a}, \pi_r^{-1}(\pi_s(\mathbf{b})) \right\rangle - \left\langle \mathbf{a}, \pi_r^{-1}(\pi_t(\mathbf{b})) \right\rangle \\
&= \langle \pi_r(\mathbf{a}), \pi(\mathbf{b}) \rangle - \langle \pi_r(\mathbf{a}), \pi_t(\mathbf{b}) \rangle = \sum_{i=1}^{n} a_{r_i} b_{s_i} - \sum_{i=1}^{n} a_{r_i} b_{t_i} \\
&= \sum_{j=1}^{n} a_{r_j} \sum_{i=j}^{n} b_{s_i} - \sum_{j=1}^{n-1} a_{r_j} \sum_{i=j+1}^{n} b_{s_i} - \left[\sum_{j=1}^{n} a_{r_j} \sum_{i=j}^{n} b_{t_i} - \sum_{j=1}^{n-1} a_{r_j} \sum_{i=j+1}^{n} b_{t_i} \right]
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= (a_{r_2} - a_{r_1}) \sum_{i=2}^{n} b_{s_i} + (a_{r_3} - a_{r_2}) \sum_{i=3}^{n} b_{s_i} + \cdots + (a_{r_n} - a_{r_{n-1}}) b_{s_n} \\
&\quad - \left[(a_{r_2} - a_{r_1}) \sum_{i=2}^{n} b_{t_i} + (a_{r_3} - a_{r_2}) \sum_{i=3}^{n} b_{t_i} + \cdots + (a_{r_n} - a_{r_{n-1}}) b_{t_n} \right] \\
&= (a_{r_2} - a_{r_1}) \left[\sum_{i=2}^{n} b_{s_i} - \sum_{i=2}^{n} b_{t_i} \right] + (a_{r_3} - a_{r_2}) \left[\sum_{i=3}^{n} b_{s_i} - \sum_{i=3}^{n} b_{t_i} \right] \\
&\quad + \cdots + (a_{r_n} - a_{r_{n-1}})(b_{s_n} - b_{t_n}) \le 0.
\end{aligned}
$$

Тъй като първите множители в произведението са неотрицателни, а вторите са положителни, то $\langle \mathbf{a}, \mathbf{y}^* \rangle \le \langle \mathbf{a}, \mathbf{y} \rangle$ за всяко $\mathbf{y} \in P_{\mathbf{b}}$.

Глава 10

Математически модели на оптимизационни задачи

В тази глава се предлагат неголям брой упражнения за формулиране задачи на математическото оптимиране въз основа на силно опростени условни ситуации от производството, селското стопанство, транспорта (параграф 1) и други области (параграф 2). С тези упражнения не се цели да се дадат общи препоръки за построяване на математически модели и да се формализира процесът на моделирането. Опит за построяване на реални икономико-математически и други модели може да се придобие единствено в практиката. Чрез тези упражнения само се илюстрира принципната възможност за прилагане на математическо оптимиране в икономическите и други изследвания. Включени са модели, водещи до всички класове задачи, които се разглеждат в ръководството. Някои от тях илюстрират и други, нестандартни приложения на известни традиционни задачи на математическото оптимиране (напр. транспортната задача). Други (параграф 2) показват някои връзки между оптимизационните и други математически задачи.

При съставяне на математическия модел преди всичко е нужно добре да се осъзнае словесната формулировка на задачата, колкото и опростена да е тя. Важно значение има удачният избор на променливите. Често за една и съща задача могат да се съставят различни, еквивалентни (в определен смисъл) модели, които се различават по сложност или принадлежат към различни класове оптимизационни задачи.

§ 1. Математически модели на икономико-производствени задачи

Тук привеждаме няколко примера за съставяне на математически модели на задачи от производството, селското стопанство, транспорта.

Пример 1 (задача за разпределение на производствени мощности за минимално време)**.** Предприятие трябва да произведе m вида изделия съответно в количества $b_1, b_2, \ldots, b_m$. Всеки вид изделие може да се произведе на всяка от n различни машини, чиито производствени мощности са a_{ij} ($i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$) — времето, за което j-тата машина произвежда единица изделие от i-тия вид. Да се организира изпълнение на плана за най-кратък срок.

Решение. Означаваме с x_{ij} ($i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$) количеството изделия от i-тия вид, които ще произведе j-тата машина, $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$. При план на производството $\mathbf{x} = (x_{11}, x_{12}, \ldots, x_{mn})$ времето t_j, през което j-тата машина ще бъде натоварена, ще бъде

$$t_j = a_{1j}x_{1j} + a_{2j}x_{2j} + \ldots + a_{mj}x_{mj}.$$

Тъй като всички машини работят едновременно, времето T за реализиране на плана ще бъде най-голямото от числата $t_1, \ldots, t_n$, т. е.

$$T = \max(t_1, t_2, \ldots, t_n) = \max_{1 \le j \le n} \left\{ \sum_{i=1}^{m} a_{ij}x_{ij} \right\}.$$

Общото количество изделия от i-тия вид, което ще се произведе от всички машини, е $x_{i1} + x_{i2} + \cdots + x_{in}$ и съгласно производствения план то трябва да удовлетворява условието

$$x_{i1} + x_{i2} + \cdots + x_{in} = b_i.$$

Получаваме следния математически модел: Да се намери минимумът на функцията

$$T(x_{11}, x_{12}, \ldots, x_{mn}) = \left\{ \max_{1 \le j \le n} \sum_{i=1}^{m} a_{ij}x_{ij} \right\}$$

при условията

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = b_i, \quad i = 1, \ldots, m,$$

$$x_{ij} \ge 0, \quad i = 1, \ldots, m, \ j = 1, \ldots, n.$$

С въвеждането на нова променлива t — времето за изпълнение на плана — получаваме еквивалентен на горния модел, в който всички ограничения и функцията, която се минимизира, са линейни:

$$\min\{T_1(x_{11}, x_{12}, \ldots, x_{mn}, t) = t\}$$

при условия

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = b_i, \qquad i = 1, \ldots, m,$$

$$\sum_{j=1}^{m} a_{ij}x_{ij} - t \le 0, \quad j = 1, \ldots, n,$$

$$x_{ij} \ge 0, \qquad i = 1, \ldots, m, \; j = 1, \ldots, n.$$

Първоначалният модел (който не е линеен) сведохме до еквивалентен линеен модел с увеличаване броя на променливите с една и на ограниченията — с n.

Формулирайте линеен модел на задачата при променливи y_{ij} ($i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$) — времето, през което j-тата машина ще произвежда изделия от i-тия вид.

Пример 2 (задачата за оптимално разкрояване на материали)**.** Предприятие произвежда комплекти, състоящи се от s различни детайла (части). Всеки комплект съдържа d_k детайла от k-тия вид, $k = 1, \ldots, s$. Предприятието изработва частите от m различни по размери полуфабрикати, от които разполага с количества съответно $b_1, b_2, \ldots, b_m$. Предварително е установено по колко начина (в зависимост от размерите му) един брой от всеки полуфабрикат може да бъде нарязан (разкроен) на детайли. Нека n_i, $i = 1, \ldots, m$, е броят на възможните начини, по които i-тият полуфабрикат може да бъде разкроен, а a_{ijk} е броят детайли от k-тия вид, които се получават при разкрояването на i-тия полуфабрикат по j-тия начин, $j = 1, \ldots, n_i$, $i = 1, \ldots, m$, $k = 1, \ldots, s$. Да се разкроят полуфабрикатите така, че да се получи максимален брой пълни комплекти.

Решение. Въвеждаме неизвестни x_{ij} — броят на полуфабрикатите от вида i, които ще бъдат разкроени по начина j, $j = 1, \ldots, n_i$, $i = 1, \ldots, m$. Тогава броят детайли от k-тия вид, които ще се получат от всички полуфабрикати от i-тия вид, ще бъде $\sum\limits_{j=1}^{n_i} a_{ijk}x_{ij}$, а общият брой детайли от k-тия вид, получени от всички полуфабрикати, ще бъде $\sum\limits_{i=1}^{m}\sum\limits_{j=1}^{n_i} a_{ijk}x_{ij}$. Готовите комплекти са не повече от $\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{m}\sum\limits_{j=1}^{n_i} a_{ijk}x_{ij}}{d_k} = N_k$ (тъй като в един комплект има d_k детайла от k-тия вид). Следователно броят на готовите комплекти ще се определи от най-малкото от числата N_k, $k = 1, \ldots, s$ (тъй като всички комплекти трябва да бъдат пълни). Да означим с y броя на готовите комплекти. Получаваме следния математически модел:

$$\max\left\{y:\sum_{j=1}^{n_i}x_{ij}=b_i,\ \sum_{i=i}^{m}\sum_{j=1}^{n_i}a_{ijk}x_{ij}-d_ky\ge 0,\ x_{ij}\ge 0 \text{ и цели, } \begin{array}{l} k=\overline{1,s}\\ j=\overline{1,n_i}\\ i=\overline{1,m}\end{array}\right\}.$$

Пример 3 (задача за рентабилно производство)**.** Предприятие произвежда n вида изделия, като използва m вида суровини, от които разполага съответно в количества $b_1, b_2, \dots, b_m$. За производство на единица от j-тото изделие се изразходват a_{ij} единици от i-тата суровина, $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$. Разходите за производство на единица продукция от j-тия вид са d_j, а приходът от нея е c_j, $j = 1, \dots, n$. Минималните количества от j-тия вид изделия, които трябва да бъдат произведени, са h_j, $j = 1, \dots, n$. Да се планира производството така, че с наличните ресурси да се осигури максимална рентабилност (рентабилността се измерва с печалбата от единица изразходван капитал).

Решение. Означаваме с x_j, $j = 1, \dots, n$, количеството изделия от j-тия вид, което предприятието трябва да произведе. Общите разходи по производството на цялата продукция са $\sum_{j=1}^{n} d_j x_j$, а общият приход — $\sum_{j=1}^{n} c_j x_j$. Общата печалба на предприятието е $\sum_{j=1}^{n}(c_j - d_j)x_j$, която се реализира при изразходване на средства $\sum_{j=1}^{n} d_j x_j$. Получаваме следния математически модел

$$\max\left\{\frac{\sum_{j=1}^{n}(c_j-d_j)x_j}{\sum_{j=1}^{n}d_jx_j}:\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j\le b_j,\ x_j\ge h_j,\ i=1,\dots,m,\ j=1,\dots,n\right\}.$$

Пример 4 (квадратична задача за назначения)**.** В даден машинен цех са подготвени n площадки $P_1, \dots, P_n$, на всяка от които трябва да се монтират по една от n машини $M_1, \dots, M_n$. Произвежда се еднотипен продукт по строго определена технология (последователно преминаване на продукта от една машина на друга за обработка). Сумарното количество продукт, което протича между машините M_j и M_l съобразно технологиите на производството е h_{jl}, $j, l = 1, \dots, n$, а разстоянието от площадката P_i до площадката P_k е c_{ik}, $i, k = 1, \dots, n$. Да се монтират машините върху работните площадки по такъв начин, че технологичната обработка да се извършва с минимални промишлено-транспортни разходи. (Примери за така наречената *линейна задача за назначенията* са задачи 19 и 20 на този параграф).

Решение. Въвеждаме логическите променливи

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{ако машината } M_j \text{ се постави на площадката } P_i, \\ 0, & \text{в противен случай.} \end{cases}$$

Ако машината M_j бъде монтирана на площадката P_i, машината M_l — на площадката P_k, то $x_{ij} = 1$ и $x_{kl} = 1$ и разходите по транспортирането на продукта от машината M_j до машината M_l ще бъдат пропорционални на $c_{ik}h_{jl}$. Сумарните промишлено-транспортни разходи ще бъдат пропорционални на сумата

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} c_{ik}h_{jl}x_{ij}x_{kl},$$

където променливите x_{ij} (x_{kl}), $i, j, k, l = 1, \dots, n$, удовлетворяват ограниченията $\sum\limits_{j=1}^{n} x_{ij} = 1$, $i = 1, \dots, n$, т. е. на всяка площадка ще бъде монтирана точно една машина, $\sum\limits_{i=1}^{n} x_{ij} = 1$, $j = 1, \dots, n$, т. е. всяка машина ще бъде поставена на точно една площадка. Получаваме задачата

$$\min\left\{ \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} c_{ik}h_{jl}x_{ij}x_{kl} : \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1, \sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1, \right.$$
$$\left. x_{ij} \geq 0 \text{ и цели, } i = 1, \dots, n, \ j = 1, \dots, n \right\}.$$

Пример 5 (минимаксна задача)**.** Предприятие A произвежда определен продукт, а предприятие B организира неговото изкупуване и пласмент. При производството предприятие A допуска дефекти, като p е относителната честота, с която се произвежда редовен (бездефектен) продукт. При поява на дефект предприятие A заплаща глоба α. Себестойността на единица редовен продукт е u_1, а на единица дефектен — u_2. Предприятие B извършва частичен контрол (с относителна честота q) на продукцията, която изкупува. Цените за изкупуване на единица редовен и дефектен продукт са съответно μ_1 и μ_2, а цените, на които се продава единица редовен и дефектен продукт — съответно c_1 и c_2. Продуктите, които не са контролирани, се изкупуват на цените на редовните. Контролът на единица продукт струва β.

Да се определи оптималната честота на контрол при изкупуване (респективно на производство на редовен продукт), гарантираща максимална печалба за предприятието B (респективно A), независимо от честотата на производство на редовни продукти от предприятие A (респективно от честотата на контрол при изкупуване на продукта от предприятие B).

Решение. Образуваме платежната матрица (вж. гл. 5) за предприятието B

A \ B		Редовен	Дефектен
		p	$1-p$
Контролиран	q	$c_1-\mu_1-\beta$	$c_2-\mu_2-\beta$
Неконтролиран	$1-q$	$c_1-\mu_1$	$c_2-\mu_1$

При производство само на редовни изделия средната печалба на В е $(c_1-\mu_1-\beta)q+(c_1-\mu_1)(1-q)$, а при производство само на дефектни изделия — съответно $(c_2-\mu_2-\beta)q+(c_2-\mu_1)(1-q)$. Тъй като А произвежда редовни изделия с честота p и дефектни с честота $1-p$, то средната печалба на В е

$$\pi_B = p[(c_1-\mu_1-\beta)q+(c_1-\mu_1)(1-q)]+(1-p)[(c_2-\mu_2-\beta)q+(c_2-\mu_1)(1-q)].$$

Изборът на честотата q, гарантираща максимална печалба и при най-неблагоприятна честота на производство на дефектни изделия от А, се определя от решението на следната задача

$$\max_p \min_q \pi_B \quad \text{при условия} \quad 0 \le p \le 1,\ 0 \le q \le 1.$$

Аналогично платежната матрица за предприятие А е

A \ B		Контролиран	Неконтролиран
		q	$1-q$
Редовен	p	μ_1-u_1	μ_1-u_1
Дефектен	$1-p$	$\mu_2-u_2-\alpha$	μ_1-u_2

и средната печалба на А се изразява с функцията

$$\pi_A = q[(\mu_1-u_1)p+(\mu_2-u_2-\alpha)(1-p)]+(1-q)[(\mu_1-u_1)p+(\mu_1-u_2)(1-p)].$$

Изборът на честота p, гарантираща на А максимална печалба и при най-неблагоприятната честота на контрол при изкупуване от предприятие В, се определя от решението на следната задача

$$\max_p \min_q \pi_A \quad \text{при условия} \quad 0 \le p \le 1,\ 0 \le q \le 1.$$

Както се вижда, интересите на предприятията А и В не са непременно противоположни. Така е и най-често в реалните ситуации от производствен и друг тип, имащи подобен характер.

Задачи

Да се състави математически модел на следните задачи:

1. Предприятие произвежда два типа изделия, като производствената мощност на предприятието за едно денонощие е 100 броя от първия тип или 300 броя от втория. Отдел технически контрол е в състояние да проверява не повече от 150 изделия (независимо от кой тип) в денонощие. Едно изделие от I тип е два пъти по-скъпо от едно изделия от II тип. Да се определи план на производство, който осигурява максимална (по стойност) продукция в денонощие.

2. Производството на два вида детайли се извършва последователно в два цеха — механичен и термичен. Механичният цех може да изготви за една смяна 600 детайла №1 или 1200 детайла №2, а термичният — 1200 детайла №1 или 800 детайла №2. Механичният цех работи на три смени, а термичният — на две. Да се определи ежедневната производствената програма, максимизираща приходите от производството, ако цените на детайлите №1 и №2 се отнасят както 9 : 2.

3. Производствената мощност на завод позволява да се произведат за месец 200 електродвигатели от тип A или 600 от тип B, или 800 от тип C. Месечно могат да бъдат опаковани за експедиция не повече от 1700 електродвигатели независимо от кой тип. Произведените количества електродвигатели трябва да се отнасят както 3 : 1 : 2. Да се организира производството така, че производствената мощност на завода да се използва максимално.

4. Вместимостта на товарна вагонетка е 7 t брикети или 4 t въглища. Един тон въглища развиват 1,5 пъти повече калории от един тон брикети. Моторът на вагонетката може да извозва до 5 t. Да се натовари вагонетката така, че да превозва товар с максимална калоричност.

5. Машинен цех изпълнява поръчка на друг цех за производство на три вида части A, B и C съответно в количества 400, 250 и 320 броя. Поръчката трябва да се изпълни за възможно най-кратък срок. Цехът може да осигури денонощна работа на четири различни струга. Времето (в минути) за производство на един брой от всяка част за всеки струг се дава с таблицата

Стругове / Време	I	II	III	IV
A	20	30	15	35
B	60	100	80	40
C	25	40	20	15

6. Производственият план на едно предприятие е 100 единици от изделие A, 60 единици от изделие B и 90 единици от изделие C. Всяко от изделията може да бъде произведено по две различни технологии. Времето (в условни единици), необходимо за производство на единица от всеки вид изделие по двете технологии, е дадено в таблицата

Изделие / Технология	A	B	C
I	2	5	5
II	3	4	10

По двете технологии се работи едновременно. Да се състави производствена програма за изпълнение на плана за минимално време.

7. За производството на два вида изделия A и B се използват три вида машини. Времето (в часове) за изработване на всеки вид изделие на всяка от машините се дава с таблицата

Машина / Изделие	I	II	III
A	2	1	1,5
B	0	1	0,5

За 24 часа всяка от машините може да работи съответно 10, 12 и 14 часа. Да се намери производствена програма, при която:

7.1. Да се получава максимален доход, ако доходът от едно изделие A е 3 лв., а от едно изделие B — 4 лв.;

7.2. Да се използва максимално машинният парк за 24 часа.

8. От железни тръби с дължина 700 cm трябва да се нарежат 60 парчета с дължина 230 cm, 90 парчета с дължина 190 cm и 320 парчета с дължина 80 cm. Счита се, че тръбите са в неограничено количество. Да се изпълни поръчката с минимален разход на тръби.

9. Да се определи как да бъдат нарязани 100 парчета тръбна ламарина с дължина 3 m на части с размери 0,6 m, 1,5 m и 2,5 m, така че да се получат максимален брой комплекти, ако един комплект съдържа съответно 2, 1 и 3 части от трите размера.

10. За производство на комплекти от по три детайла предприятие разполага с 50 летви с дължина 6,5 m и 200 летви с дължина 4 m. Всеки комплект се изработва от два детайла с дължина 2 m и един детайл с дължина 1,25 m. Да се използват наличните материали така, че да се произведат най-много комплекти.

11. Предприятие произвежда комплекти, съдържащи три части A и една част B. Частите A и B могат да бъдат произведени в два цеха при различни разходи на материали и енергия, дадени (в условни единици) за едно изделие в таблицата

Част	I цех		II цех	
	Материали	Енергия	Материали	Енергия
A	0,15	0,50	0,20	0,40
B	0,15	0,30	0,12	0,30

Общото количество материали е 432, а общото количество енергия 1350. По колко части A и B трябва да се изработят във всеки цех, за да се осигури максимален брой комплекти при условие, че във всеки цех частите се комплектуват поотделно.

12. Цех произвежда комплектна продукция, за която се изготвят два вида детайли. Един комплект се състои от два детайла от I вид и един детайл от II вид. Цехът разполага с три типа машини, които могат да произвеждат детайли и от двата вида. Броят на машините от всеки тип, както и техните производствени мощности (брой детайли за единица време) са дадени в таблицата

Тип машини	Брой машини	Производствени мощности	
		I детайл	II детайл
M1	6	80	70
M2	20	40	15
M3	15	130	100

Да се разпределят наличните машини за производство на детайли по такъв начин, че да се осигури максимален брой готови комплекти.

13. В склад може да се съхраняват 300 t от даден вид стока, чиято покупно-продажна цена през четирите тримесечия на годината е съответно 80, 100, 120, 90 лв./t. Складовите разходи за престоя на един тон от стоката за едно тримесечие са 7 лв. В началото на всяко тримесечие става закупуването и продажбата на стока. Да се състави план за експлоатация на склада за една година, при който печалбата да е максимална, ако в началото на годината е имало запас от 80 t.

14. В склад за метални изделия се съхраняват железни тръби, ламарина и стомана. Капацитетът на склада (по вместимост) е 100 хил. t тръби или 120 хил. t ламарина или 80 хил. t стомана, но основите на склада не издържат повече от 100 хил. t. Пред склада под навеси могат да се съхранят при по-лоши условия неограничени количества стока. Пристигнали са 80 хил. t тръби, 145 хил. t ламарина и 75 хил. t стомана. Да се определи какви количества от всеки вид изделия да се поместят в склада и какви да се оставят на открито, ако загубата от лошо съхранение за един тон от всяко изделие е съответно 1,20, 0,90 и 1 лв./t.

15. При проектирането на нов жилищен (или индустриален) район е известно къде ще бъдат разположени електрическите подстанции и консуматорите на ел. енергия. Известни са разстоянията c_{ij} от j-тия консуматор, $j = 1, \dots, n$, до i-тата подстанция, $i = 1, \dots, m$, както и максималните мощности b_j на всеки консуматор и мощностите a_i на всяка от подстанциите. Да се определи кои консуматори към кои подстанции да бъдат свързани, така че разходите на кабели за свързване да бъдат минимални.

16. Планът (в dka) за посев на три вида зърнени култури е a_1, a_2, a_3 и трябва да бъде изпълнен от пет стопанства, всяко от които разполага съответно с b_j dka, $j = 1, \dots, 5$, площ. Известен е очакваният добив (в условни единици) c_{ij}, $i = 1, 2, 3$, $j = 1, \dots, 5$, на всяко стопанство за 1 dka от всяка култура. Да се планират посевите така, че да се получи максимален добив.

17. Селско стопанство разполага с три парцела земя с големини съответно b_1, b_2, b_3 ha. На тях трябва да се засадят четири вида култури. Добивът (в t) от 1 ha от i-тия парцел от j-тата култура е a_{ij}, $i = 1, 2, 3$, $j = 1, \dots, 4$. Да се състави план на посевите за постигане на максимален общ добив, така че получените количества от отделните култури да се отнася както $p : q : r : s$.

18. Дневната дажба за хранене на група животни може да се изготви от сено (не повече от 50 kg) и силаж (не повече от 85 kg). Дажбата трябва да съдържа: а) не по-малко от 30 кръмни единици; б) не по-малко от 1 kg белтъци; в) не по-малко от 100 g калций; г) не по-малко от 80 g фосфор. Съдържанието в 1 kg сено или силаж на тези хранителни вещества (в g) се дава с таблицата

Хранително вещество / Вид храна	Кръмни единици	Белтъчини	Фосфор	Калций	Цена
Сено	10	40	2	1,25	24
Силаж	8	10	1	2,50	16

Да се определи най-евтината дневна дажба, осигуряваща пълноценно хранене на животните.

19. За n вакантни места са се явили n кандидати. Средствата, които i-тият кандидат изразходва за изпълнението на j-тата длъжност, са c_{ij}, $i, j = 1, \dots, n$. Да се разпределят длъжностите между кандидатите така, че сумарните средства за изпълнението на всички длъжности да бъдат минимални.

20. Да се определи оптимално разпределение на три багера от различен тип между три обекта, ако горивото за извършване на изкопните работи от i-тия багер на j-тия обект, $i, j = 1, 2, 3$, се дава с таблицата

Багер \ Обект	I	II	III
I	9	14	7
II	8	6	9
III	12	11	14

21. Спортен цех произвежда плажни чадъри и три вида палатки, за което използва два вида плат и метални тръби. Цехът разполага с 1000 m плат от I вид, 1500 m плат от II вид и 2800 m тръби. Загубите от всеки материал (в m), сумарните производствени разходи и печалбата (в лв) се дават с таблицата (за едно изделие)

Материали \ Изделия	Палатки модел 1	Палатки модел 2	Палатки модел 3	Плажни чадъри
Плат I вид	2,0	4,6	5,0	0,9
Плат II вид	5,2	1,5	4,5	0,9
Метални тръби	12,0	10,0	16,2	2,0
Разходи	15,3	9,2	18,1	4,3
Печалба	3,6	2,1	5,2	1,4

Наложени са ограничения за асортимента: а) модел 1 — поне 40; б) модел 2 — поне 70; в) модел 3 — не повече от 15; г) броят на чадърите да не надвишава общия брой на всички палатки и да не е по-малък от половината от този брой. Да се изготви производствена програма, осигуряваща максимална рентабилност на производството при наличните ресурси.

22. Автобаза има следните потребности от шофьори през денонощието:

от 02 до 06 часа — 20; от 10 до 14 часа — 80; от 18 до 22 часа — 40;

от 06 до 10 часа — 50; от 14 до 18 часа — 100; от 22 до 02 часа — 30.

Всеки шофьор работи по 8 часа непрекъснато. Да се състави разписание, минимизиращо общия брой шофьори.

23. Авиокомпания трябва да състави план за назначаване и подготовка на стюардеси за шест месеца напред (напусканията на стюардесите стават естествено). Общият брой летателни часове от януари до юни трябва да бъде:

януари	—	8000,	февруари	—	7000,	март	—	7000,
април	—	9000,	май	—	10000,	юни	—	12000,

Подготовката на нова стюардеса трае един месец и отнема 100 летателни часа на една обучена. Една стюардеса (обучена или не) трябва да има не повече от 150 летателни часа на месец. Заплатата на една стюардеса е b лв през периода на обучение и d лв след това. Компанията разполага с 60 обучени стюардеси в началото на януари. В края на всеки месец средно $p\%$ от стюардесите напускат. Напуснали стюардеси не се приемат отново на работа. Да се състави оптимална програма за назначаване на стюардеси.

24. В неголямо населено място А има училище, което се посещава от 72 ученици, неживеещи в това място. Организирано е превозването на учениците с автобуси. Спирка В се намира между А и спирка С. От спирка С в училището идват 42 ученици, а от спирка В — 20. Освен това между спирките С и В живеят 6 ученици, а между А и В — 4 ученици. Автобаза разполага с 2 типа автобуси: 35- и 50-местни. Разходите (в лв) на автобазата за всеки тип автобус в зависимост от разстоянията са дадени в таблицата:

Автобус / Отсечка	35-местен	50-местен
В—А	2,00	2,50
С—А	2,50	3,50
С—В	2,25	3,00

Да се определи какъв тип автобуси да се използват на всяка отсечка от маршрута, така че разходите на автобазата за превозването на учениците да бъдат минимални.

§ 2. Математически модели на други оптимизационни задачи

Тук привеждаме няколко примера за свеждане на математически или други оптимизационни задачи към задачи на математическото оптимиране.

Пример 6 (задача за минимизиране на сума от абсолютни стойности). Нека са дадени k линейни функции $l_s(x_1, \dots, x_n) = \sum_{j=1}^{n} c_{s_j} x_j - c_{s_0}$, $s = 1, \dots, k$, и система от m линейни неравенства $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_j$, $i = 1, \dots, m$. Да се намери точка $\mathbf{x}^* = (x_1^*, \dots, x_n^*)$, чиито координати удовлетворяват дадените неравенства и за която сумата от абсолютните стойности на функциите $l_s(x_1, \dots, x_n)$ има минимална стойност.

Решение. Задачата се формулира по следния начин:

$$\min \left\{ \sum_{s=1}^{k} \left| \sum_{j=1}^{n} c_{s_j} x_j - c_{s_0} \right| : \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_j, \quad i = 1, \dots, m \right\}$$

и е задача на изпъкналото оптимиране (минимизира се изпъкнала частично линейна функция при линейни ограничения). С въвеждането на още k променливи $y_1, \dots, y_k$, където $y_s = \left|\sum\limits_{j=1}^{n} c_{s_j} x_j - c_{s_0}\right|$, и $2k$ ограничения $\sum\limits_{j=1}^{n} c_{s_j} x_j - c_{s_0} \le y_s$, $-\sum\limits_{j=1}^{n} c_{s_j} x_j + c_{s_0} \le y_s$ задачата може да се сведе до задача на линейното оптимиране

$$\min\left\{y_1 + \cdots + y_s : \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_j,\ \sum_{j=1}^{n} c_{s_j} x_j - y_s \le c_{s_0},\right.$$
$$\left. -\sum_{j=1}^{n} c_{s_j} x_j - y_s \le -c_{s_0},\ i = 1, \dots, m,\ s = 1, \dots, k\right\}.$$

Пример 7 (задача за чебишово приближение на несъвместима система линейни уравнения)**.** Нека е дадена несъвместима система от m линейни уравнения с n неизвестни ($m > n$): $\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_j$, $i = 1, \dots, m$. Да се намери точка $\mathbf{x}^* = (x_1^*, \dots, x_n^*)$, за която максималната по модул от разликите $\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} x_j - b_j$, $i = 1, \dots, m$, е минимална.

Решение. Търси се точка $\mathbf{x}^*$, за която

$$\max_{1\le i\le m}\left|\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^* - b_j\right| = \min_{x}\left\{\max_{1\le i\le m}\left|\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j - b_j\right|\right\}.$$

Ако означим с y най-голямата по модул от разликите $\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} x_j - b_j$, $i = 1, \dots, m$, задачата може да се формулира по следния начин

$$\min\left\{y : \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j - y \le b_j,\ -\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j - y \le -b_j,\ i = 1, \dots, m\right\}.$$

Пример 8 (задача за съставяне на учебна програма)**.** В учебно заведение се провеждат седмично n различни занятия, за които има на разположение s учебни зали, позволяващи провеждането на T учебни часа (занятия) седмично. Известно е кои групи с кои преподаватели имат занятия. Да се състави седмична програма на занятията така, че да няма „застъпвания“, т. е. никой преподавател да няма едновременно занятия с повече от една група, никоя група да няма едновременно занятия с повече от един преподавател и да не се провеждат едновременно повече от s занятия.

Решение. Да означим всички занятия, които ще се провеждат през седмицата, със $Z_1, \dots, Z_n$. Въвеждаме коефициентите a_{ij}, $i, j = 1, \dots, n$, които определяме по следния начин

$$a_{ij} = \begin{cases} a > 0, & \text{ако занятията } Z_i \text{ и } Z_j \text{ не могат да се провеждат} \\ & \text{едновременно,} \\ 0, & \text{в противен случай.} \end{cases}$$

Въвеждаме неизвестните x_{it}, $i = 1, \dots, n$, $t = 1, \dots, T$, с които изразяваме дали занятието Z_i се провежда през t-тия учебен час, или не, а именно

$$x_{it} = \begin{cases} 1, & \text{когато } i\text{-тото занятие се провежда през } t\text{-тия час,} \\ 0, & \text{в противен случай.} \end{cases}$$

Тъй като всяко занятие се провежда в точно един учебен час, за неизвестните x_{it} ще имаме $\sum_{t=1}^{T} x_{it} = 1$, $i = 1, \dots, n$, а тъй като залите са s на брой, не може да се провеждат повече от s занятия едновременно или $\sum_{i=1}^{n} x_{it} \le s$, $t = 1, \dots, T$. Стремежът за разпределяне на занятията така, че да няма застъпвания, се изразява в търсенето на такива стойности за неизвестните x_{it}, при които функцията $\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \sum_{t=1}^{T} a_{ij} x_{it} x_{jt}$ се анулира. Стигаме до задачата

$$\min \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \sum_{t=1}^{T} a_{ij} x_{it} x_{jt}$$

при ограничения $\sum_{t=1}^{T} x_{it} = 1$, $i = 1, \dots, n$, $\sum_{i=1}^{n} x_{it} \le s$, $t = 1, \dots, T$, $x_{it} \in \{0, 1\}$, $i = 1, \dots, n$, $t = 1, \dots, T$.

Задачи

Да се формулират като задачи на математическото оптимиране следните задачи:

1. Дадена е система от линейни неравенства $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i$, $i = 1, \dots, m$, при което $\min_x \max_i \left\{ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j - b_i \right\} > -\infty$. Да се намери точка $\mathbf{x}^*$, за която

$$\max_i \left\{ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^* - b_i \right\} = \min_x \max_i \left\{ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j - b_i \right\}$$

(задача за *чебишова точка* на система линейни неравенства).

Забележка. Чебишовата точка се нарича още *чебишово решение*, ако системата неравенства е съвместима и *чебишово приближение*, ако е несъвместима.

2. Дадена е система от m прави $l^1, \ldots, l^m$ в $\mathbb{R}^n$, определени от m системи от $n-1$ взаимно ортогонални хиперравнини

$$l^i : \begin{cases} a_{11}^{(i)} x_1 + \cdots + a_{1n}^{(i)} x_n = b_1^{(i)} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n-1,1}^{(i)} x_1 + \cdots + a_{n-1,n}^{(i)} x_n = b_{n-1}^{(i)} \end{cases}, \qquad i = 1, \ldots, m.$$

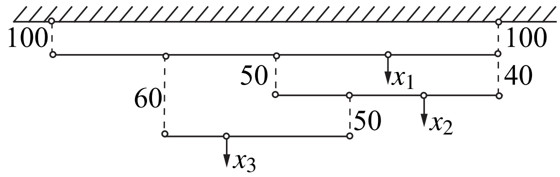
Да се намери точка $\mathbf{x}^* = (x_1^*, \ldots, x_n^*)$, за която максималното от разстоянията ѝ до правите $l^1, \ldots, l^m$ е минимално. (Задача за намиране на точка, най-малко отдалечена от система прави.)

3. В правоъгълна зала се провежда писмен изпит на n студенти, които трябва да се разположат така, че опасността от взаимно влияние да бъде минимална (влиянието между двама студенти ще измерваме с разстоянието между тях).

4. Експериментална уредба във физическа лаборатория се състои от n електрично заредени периодично движещи се (с период T) части. Законът за движението на i-тата част се дава с функцията $\varphi_i(t)$, $t \in [0, T]$, $i = 1, \ldots, n$. Да се определят местата на частите върху площта, определена за уредбата, по такъв начин, че да се намали максимално възможността за искров разряд между частите.

5. За лечението на тежко болен лекар разполага с два вида антибиотици. Първият от тях е 1,5 пъти по ефикасен от втория. Организмът на болния може да издържи най-много по 3 таблетки от първия или най-много по 5 таблетки от втория антибиотик в денонощие. Лекарството (независимо от кой вид) трябва да се приема по 4 пъти в денонощието (по една таблетка). Каква максимална, но безвредна за болния доза трябва да предпише лекарят за денонощие?

6. Дадена е система от стоманени прътове и въжета, за всяко от които е посочен максималният товар (в условни единици), който може да издържи (фиг. 21). Приема се, че стоманените прътове могат да издържат неограничен товар. На три места (показани на фиг. 21) са поставени товари. Да се определят теглата x_1, x_2, x_3 на тези товари така, че системата да издържи максимален товар.



Фиг. 21

7. За определяне на процентното съдържание x_j, $j = 1, \ldots, n$, на n минерала в скала са съставени m уравнения $\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i$, $i = 1, \ldots, m$, $m > n$, в които коефициентите a_{ij}, b_i са получени по експериментален път и са неточни. Да се определят приближено количествата x_j, ако стандартните отклонения на числата a_{ij}, b_i са съответно σ_{ij}, σ_i.

8. Военно командване иска да извърши q на брой бойни операции, като за целта разполага с m различни типа бомби, чиито запасите са съответно $b_1, \ldots, b_m$, и с n бомбардировача, за всеки от които командването е планирало съответно $d_1, \ldots, d_n$ бойни полета. Известна е ефективността на всяка бомба от тип i при изпълнение на операцията k, която се дава с числото a_{ik}, $i = 1, \ldots, m$, $k = 1, \ldots, q$. На борда си j-тият самолет може да носи не повече от h_j бомби, $j = 1, \ldots, n$. Командването приписва на операцията k тегло c_k, $k = 1, \ldots, q$. Да се определи максималният сумарен ефект от бойните операции при наличните бомбардировачи, планираните им полети и наличните запаси от всеки тип бомби.

Отговори и решения

§ 1. Математически модели на икономико-производствени задачи

1. Нека x_1 (x_2) е количеството изделия от I (II) тип. Моделът е: max $\{2x_1 + x_2 : 3x_1 + x_2 \le 300,\ x_1 + x_2 \le 150,\ x_1, x_2 \ge 0\}$.

2. Нека x_1 (x_2) е броят детайли № 1 (№ 2). Моделът е: max $\{9x_1 + 2x_2 : 2x_1 + x_2 \le 3600,\ 2x_1 + 3x_2 \le 4800,\ x_1, x_2 \ge 0$ и цели$\}$.

3. Нека x_1, x_2, x_3 е броят на електрически двигатели съответно от тип A, B, C. Моделът е: max $\{x_1 : x_1 - 3x_2 = 0,\ 2x_1 - 3x_3 = 0,\ 12x_1 + 4x_2 + 3x_3 \le 2400,\ x_1 + x_2 + x_3 \le 1700,\ x_1, x_2, x_3 \ge 0$ и цели числа$\}$.

4. Нека x_1 (x_2) е количеството брикети (въглища), измерено в тонове. Моделът е: max $\left\{x_1 + \frac{3}{2}x_2 : 4x_1 + 7x_2 \le 28,\ x_1 + x_2 \le 5,\ x_1, x_2 \ge 0\right\}$.

5. Нека x_{i1} е броят детайли от тип A, x_{i2} — броят детайли тип B, x_{i3} — броят детайли тип C, произведени на i-тия струг, $i = 1, \dots, 4$, а y е времето за изпълнение на поръчката. Моделът е: min $\{y\}$ при условия

$$\begin{aligned}
&20x_{11} + 60x_{12} + 25x_{13} - y \le 0, && x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} = 400,\\
&30x_{21} + 100x_{22} + 40x_{23} - y \le 0, && x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{42} = 250,\\
&15x_{31} + 80x_{32} + 20x_{33} - y \le 0, && x_{13} + x_{23} + x_{33} + x_{43} = 320,.\\
&35x_{41} + 40x_{42} + 15x_{43} - y \le 0, && x_{ij} \ge 0 \text{ и цели числа,}\\
&\qquad\qquad i = 1, \dots, 4,\ j = 1, 2, 3,
\end{aligned}$$

6. Нека x_{ij} е броят изделия A, B, C (съответно при $j = 1, 2, 3$), които се произвеждат по i-тата технология, а y е времето за изпълнение на плана. Моделът е: min $\{y\}$ при условия

$$\begin{aligned}
&x_{11} + x_{21} = 100, && 2x_{11} + 5x_{12} + 5x_{13} - y \le 0,\\
&x_{12} + x_{22} = 60, && 3x_{21} + 4x_{22} + 10x_{23} - y \le 0, \qquad .\\
&x_{13} + x_{23} = 90, && x_{ij} \ge 0 \text{ и цели числа}, i = 1, 2,\ j = 1, 2, 3,\ y \ge 0,
\end{aligned}$$

7.1. Нека x_1 (x_2) е количеството изделия от вид A (B). Моделът е:

$$\max\ \{3x_1 + 4x_2 : x_1 + x_2 \le 12,\ 1{,}5x_1 + 0{,}5x_2 \le 14,\ 0 \le x_1 \le 5,\ x_2 \ge 0\}.$$

7.2. Нека x_1 (x_2) е количеството изделия от вид A (B), а x_3 (x_4, x_5) е времето за престой (в часове) на I (II, III) машина. Моделът е: min $\{x_3 + x_4 + x_5 : 2x_1 + x_3 = 10,\ x_1 + x_2 + x_4 = 12,\ \frac{3}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 + x_5 = 14,\ x_j \ge 0,\ j = 1, \dots, 5\}$.

8. Определяме всички възможни (разумни) начини, по които тръба с дължина 700 cm може да бъде нарязана на парчета с дължина 230 cm, 190 cm и 80 cm. Бройките парчета от всеки размер по всеки от начините представяме в таблицата (оказва се, че тези начини са 10).

Начин на рязане / Бройки от всеки размер	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
230 cm	3	2	2	1	1	1	0	0	0	0
190 cm	0	1	0	2	1	0	3	2	1	0
80 cm	0	0	3	1	3	5	1	4	6	8

Означаваме с x_j, $j = 1, \dots, 10$, броя на тръбите, които ще бъдат нарязани по j-тия начин. Получаваме следния математически модел:

$$\min\,\{x_1 + \cdots + x_{10}\}$$

$$\left|\begin{array}{l} 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5 + x_6 \geq 60, \\ x_2 + 2x_4 + x_5 + 3x_7 + 2x_8 + x_9 \geq 90, \\ 3x_3 + x_4 + 3x_5 + 5x_6 + x_7 + 4x_8 + 6x_9 + 8x_{10} \geq 320, \\ x_j \geq 0 \text{ и цели}, \ j = 1, \dots, 10. \end{array}\right.$$

(Необходимо ли е ограниченията да бъдат зададени като неравенства?)

9. Всяко парче тръбна ламарина може да бъде нарязано по 4 начина (предоставяме на читателя да ги намери; кои са те, личи от предложения математически модел) на парчета с нужните размери. С x_j означаваме броя на парчетата, нарязани по j-тия начин, $j = 1, \dots, 4$, а с y — броя на готовите комплекти. Моделът е: $\max\,\{y : 2x_3 + 5x_4 - 2y \geq 0,\ 2x_2 + x_3 - y \geq 0,\ x_1 - 3y \geq 0,\ x_j \geq 0$ и цели, $j = 1, \dots, 4\}$.

10. Всяка летва с дължина 6,5 m може да бъде нарязана на парчета с дължина 2 m и 1,25 m по 4 начина (тук те не са изброени; кои са тези начини?). Означаваме с x_{1j} броя на летвите по 6,5 m, които ще бъдат нарязани по j-тия начин, $j = 1, \dots, 4$. Аналогично всяка летва от 4 m може да бъде нарязана на парчета с горните размери по 3 начина. Означаваме с x_{2j} броя на летвите по 4 m, които ще бъдат нарязани по j-тия начин, $j = 1, 2, 3$. С y означаваме броя на готовите комплекти. Моделът е:

$$\max\,\{y\}$$

$$\left|\begin{array}{l} x_{11}+x_{12}+x_{13}+x_{14}\le 50,\\ x_{21}+x_{22}+x_{23}\le 200,\\ 3x_{11}+2x_{12}+x_{13}+2x_{21}+x_{22}-2y\ge 0,\\ 2x_{12}+3x_{13}+5x_{14}+x_{22}+3x_{23}-y\ge 0,\\ x_{ij}\ge 0 \text{ и цели числа}, \ i=1,2,\ j=1,2,3,4. \end{array}\right.$$

11. Нека x_1 е броят комплекти в I цех, а x_2 е броят комплекти във II цех. Моделът е: $\max\{x_1+x_2 : 0{,}60x_1+0{,}72x_2\le 432,\ 1{,}80x_1+1{,}50x_2\le 1350,\ x_1,x_2\in\{0,1\}\}$.

12. Нека x_{ij} е броят детайли от i-тия вид, произведени на j-тата машина. Моделът е: $\max\ \{y\}$ при условия $x_{11}+x_{12}=6$, $x_{21}+x_{22}=20$, $x_{31}+x_{32}=5$, $80x_{11}+40x_{21}+130x_{31}-2y\ge 0$, $70x_{21}+15x_{22}+100x_{32}-y\ge 0$, $x_{ij}\ge 0$ и цели числа, $i=1,2,\ j=1,2,3$.

13. Нека x_j $(z_j,\ y_j)$ са съответно количествата продадена (закупена, оставена на съхранение) стока през j-тото тримесечие, $j=1,\dots,4$. Моделът е: $\max\ \{80(x_1-z_1)+100(x_2-z_2)+120(x_3-z_3)+90(x_4-z_4)-7(y_1+y_2+y_3+y_4) : x_1+y_1-z_1=-80,\ x_j+y_j-z_j-y_{j-1}=0,\ j=2,3,4,\ 0\le y_j\le 300,\ x_j,z_j\ge 0,\ j=1,\dots,4\}$.

14. Нека x_1 (x_4) е количеството тръби в склада (под навеси); x_2 (x_5) — количеството ламарина в склада (под навеси); x_3 (x_6) — количеството стомана в склада (под навеси) (всички количества са в хиляди тона). Моделът е: $\min\ \{1200x_4+900x_5+1000x_6 : x_1+0{,}83x_2+1{,}25x_3\le 100,\ x_1+x_2+x_3\le 100,\ x_1+x_4=80,\ x_2+x_5=145,\ x_3+x_6=75,\ x_j\ge 0,\ j=1,\dots,6\}$.

15. Нека x_{ij}, $i=1,\dots,m$, $j=1,\dots,n$, е консумацията на j-тия консуматор от i-тата подстанция;

$$y_{ij}=\begin{cases}1, & \text{ако } i\text{-тата подстанция е свързана с } j\text{-тия консуматор;}\\ 0, & \text{в противен случай;}\end{cases}$$

M е константа, $M\ge\max\{a_i,b_j,\ i=1,\dots,m,\ j=1,\dots,n\}$. Моделът е: $\min\ \left\{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}c_{ij}y_{ij} : \sum_{i=1}^{m}x_{ij}\le b_j,\ j=1,\dots,n,\ \sum_{j=1}^{n}x_{ij}\le a_i,\ i=1,\dots,m,\ 0\le x_{ij}\le My_{ij},\ i=1,\dots,m,\ j=1,\dots,n\right\}$.

16. Нека x_{ij}, $i=1,2,3$, $j=1,\dots,5$, е площта от j-тото стопанство (в dka), засадено с i-тата култура. Моделът е: $\min\ \left\{\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{5}c_{ij}x_{ij} : \sum_{j=1}^{5}x_{ij}=a_i,\ i=1,2,3,\ \sum_{i=1}^{3}x_{ij}\le b_j,\ j=1,\dots,5\ x_{ij}\ge 0,\ i=1,2,3,\ j=1,\dots,5\right\}$.

17. Нека x_{ij}, $i = 1, 2, 3$, $j = 1, \dots, 4$, е площта (в ha) от i-тия парцел, засадена с j-тата култура. Моделът е: max $\left\{\sum_{i=1}^{3} a_{i1}x_{i1}\right\}$ при ограничения

$$\left|\begin{array}{l} q\sum\limits_{i=1}^{3} a_{i1}x_{i1} - p\sum\limits_{i=1}^{3} a_{i2}x_{i2} = 0, \\ r\sum\limits_{i=1}^{3} a_{i1}x_{i1} - p\sum\limits_{i=1}^{3} a_{i3}x_{i3} = 0, \\ s\sum\limits_{i=1}^{3} a_{i1}x_{i1} - p\sum\limits_{i=1}^{3} a_{i4}x_{i4} = 0, \\ \sum\limits_{j=1}^{4} x_{ij} = b_i, \quad i = 1, 2, 3, \\ x_{ij} \geq 0, \quad i = 1, 2, 3, \; j = 1, \dots, 4, \end{array}\right. .$$

18. Нека x_1 (x_2) са количествата (в kg) сено (силаж) в дневната дажба. Моделът е: min $\{24x_1 + 16x_2\}$ при условия: $10x_1 + 8x_2 \geq 30$, $40x_1 + 10x_2 \geq 1000$, $2x_1 + x_2 \geq 80$, $1{,}25x_1 + 2{,}50x_2 \geq 100$, $0 \leq x_1 \leq 50$, $0 \leq x_2 \leq 85$.

19. Нека $x_{ij} = 1$, ако i-тият кандидат заеме j-тата длъжност, и $x_{ij} = 0$ в противен случай. Тогава търсеният математически модел е:

$$\min\left\{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} : \sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1,\; \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1,\; x_{ij} \in \{0, 1\},\; i, j = 1, \dots, n\right\}.$$

20. Нека x_{ij}, $i, j = 1, 2, 3$, са логически променливи, като $x_{ij} = 1$, ако i-тият багер работи на j-тия обект, и $x_{ij} = 0$ в противен случай. Тогава $\min\{9x_{11} + 14x_{12} + 7x_{13} + 8x_{21} + 6x_{22} + 9x_{23} + 12x_{31} + 11x_{32} + 14x_{33} : x_{i1} + x_{i2} + x_{i3} = 1$, $i = 1, 2, 3$, $x_{1j} + x_{2j} + x_{3j} = 1$, $j = 1, 2, 3$, $x_{ij} \geq 0$ и цели$\}$.

21. Нека x_j, $j = 1, \dots, 3$, е броят на палатките модел j, а x_4 — броят на чадърите. Получаваме задачата

$$\max\left\{H(x_1, x_2, x_3, x_4) = \frac{3{,}6x_1 + 2{,}1x_2 + 5{,}2x_3 + 1{,}4x_4}{15{,}3x_1 + 9{,}2x_2 + 18{,}1x_3 + 4{,}3x_4}\right\}$$

при условия: $2x_1 + 4,6x_2 + 5x_3 + 0,9x_4 \leq 1000$, $5,2x_1 + 1,5x_2 + 4,5x_3 + 0,9x_4 \leq 1500$, $12x_1 + 10x_2 + 16,2x_3 + 2x_4 \leq 2800$, $0{,}5(x_1 + x_2 + x_3) \leq x_4 \leq x_1 + x_2 + x_3$, $x_1 \geq 40$, $x_2 \geq 70$, $0 \leq x_3 \leq 15$, $x_4 \geq 0$, x_j са цели числа, $j = 1, \dots, 4$.

22. Нека x_j, $j = 1, \dots, 6$, е броят на шофьорите, дежурни от $(4(j-1) + 2)$ часа̀ до $(4(j-1) + 10)$ часа̀. Тогава $\min\{x_1 + \dots + x_6 : x_1 + x_6 \geq 20$, $x_1 + x_2 \geq 50$, $x_2 + x_3 \geq 80$, $x_3 + x_4 \geq 100$, $x_4 + x_5 \geq 40$, $x_5 + x_6 \geq 30$, $x_j \geq 0$ и цели, $j = 1, \dots, 6\}$.

23. Нека x_j, $j = 1, \dots, 6$, е броят на назначените стюардеси през j-тия месец и $q = 1 - p$. Тогава

$$\min\left\{b\sum_{i=1}^{6} x_i + d\left(\sum_{i=1}^{6} x_i \sum_{j=1}^{6-i} q^j + 60\sum_{j=1}^{6} q^{j-1}\right)\right\}$$

при условия

$$\begin{aligned}
&x_1 \le 10 \iff 60.150 - 100x_1 \ge 8000,\\
&150q(x_1 + 60) - 100x_2 \ge 7000,\\
&150q((x_1 + 60)q + x_2) - 100x_3 \ge 7000,\\
&150q(((x_1 + 60)q + x_2)q + x_3) - 100x_4 \ge 9000,\\
&150q((((x_1 + 60)q + x_2)q + x_3)q + x_4) - 100x_5 \ge 10\,000,\\
&150q(((((x_1 + 60)q + x_2)q + x_3)q + x_4)q + x_5) - 100x_6 \ge 12\,000,\\
&x_j \ge 0 \text{ и цели.}
\end{aligned}$$

24. Нека x_j (y_j), $j = 1, 2, 3$, е броят на автобусите с 35 (50) места, които се движат по отсечките: B—A (при $j = 1$), C—A (при $j = 2$), C—B (при $j = 3$), а x е броят на учениците, превозвани по отсечката C—A, y — броят на учениците, превозвани по отсечката C—B. Тогава задачата е $\min\{2{,}00x_1 + 2{,}50y_1 + 2{,}50x_2 + 3{,}50y_2 + 2{,}25x_3 + 3{,}00y_3 : 35x_1 + 50y_1 - y \ge 24,\ 35x_2 + 50y_2 - x \ge 0,\ 35x_2 + 50y_3 - y \ge 0,\ x_j \ge 0$ и $y_j \ge 0$ са цели числа за $j = 1, 2, 3,\ x + y = 48,\ 0 \le x \le 42,\ 6 \le y \le 48\}$.

§ 2. Математически модели на други оптимизационни задачи

1. $\min\{y\}$ при условията $\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}x_j - y = b_i$, $i = 1, \dots, m$.

2. Евклидовото разстояние от точка $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ до правата l^i е

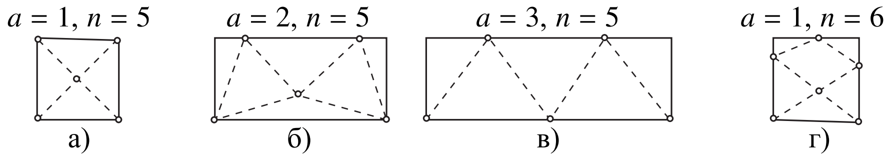
$$\rho_i(\mathbf{x}) = \sqrt{\sum_{k=1}^{n-1} \frac{\left(\sum\limits_{j=1}^{n} a_{kj}^{(i)} x_j - b_k^{(i)}\right)^2}{\sqrt{\sum\limits_{j=1}^{n} \left(a_{kj}^{(i)}\right)^2}}}.$$

Търси се точка $\mathbf{x}^*$ такава, че $\max\limits_{1\le i\le m} \rho_i^2(\mathbf{x}^*) = \min\limits_{x}\left\{\max\limits_{i} \rho_i^2(\mathbf{x})\right\}$. Ако означим

$\max\limits_{1\le i\le m} \rho_i^2(\mathbf{x}) = y$, получаване задачата

$$\min\left\{ y : \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\left(\sum\limits_{j=1}^{n} a_{kj}^{(i)} x_j - b_k^{(i)}\right)^2}{\sqrt{\sum\limits_{j=1}^{n} (a_{kj}^{(i)})^2}} - y \le 0,\ i = 1, \dots, m \right\}.$$

3. Да изберем координатна система с начало един от ъглите на залата и оси по двата ръба, излизащи от него, с единична отсечка например по-малкия от двата размера на залата и да означим с a дължината на другия размер спрямо нея, с x_j и y_j, $j = 1, \dots, n$, координатите на j-тия студент, с z — квадрата на най-малкото от разстоянията между всички двойки студенти. Получаваме задачата $\max z$ при ограничения $(x_j - x_k)^2 + (y_j - y_k)^2 \ge z$, $1 \le j < k \le n$, $0 \le x_j \le a$, $0 \le y_j \le 1$, $j = 1, \dots, n$. Видът на решението на някои стойности на a и n се илюстрира на фиг. 22 а)–г).



Фиг. 22

4. Вж. решението на задача 3.

5. Нека x_1 е броят таблетки от антибиотик 1, а x_2 — от антибиотик 2. Тогава $\max\{1{,}5x_1 + x_2 : 5x_1 + 3x_2 \le 15,\ x_1 + x_2 = 4,\ x_1, x_2 \ge 0$ и цели$\}$.

6. Търси се $\max\{x_1 + x_2 + x_3\}$ при ограничения $\frac{2}{3}x_3 \le 60$, $\frac{1}{3}x_3 \le 50$, $\frac{1}{3}x_2 + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3}x_3 \le 50$, $\frac{2}{3}x_2 + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3}x_3 \le 40$, $\frac{1}{4}x_1 + \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3}x_3 \le 100$, $\frac{3}{4}x_1 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}x_2 + \frac{2}{9}x_3\right) + \frac{2}{3}x_2 + \frac{1}{9}x_3 \le 100$, $x_j \ge 0$, $j = 1, 2, 3$.

7. Означаваме с y_{ij} (съответно y_i) действителните (неизвестните) стойности на намерените a_{ij} (съответно b_i), $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$. За тях системата $\sum\limits_{j=1}^{n} y_{ij}x_j = y_i$, $i = 1, \dots, m$, $\sum\limits_{j=1}^{n} x_j = 100$, $j = 1, \dots, n$, трябва да бъде съвместима, като при това неизвестните y_{ij} (y_i) трябва да се различават минимално по стойност от измерените a_{ij} (съответно b_i), $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$. Отчитаме още, че колкото по-голяма е дисперсията σ_{ij}^2 (съответно σ_i^2) на a_{ij} (b_i), толкова по-голяма може да бъде и разликата $a_{ij} - y_{ij}$ (съответно $b_i - y_i$). За тази цел минимизираме сумата от квадратите на разликите от горния вид, разделени на съответните дисперсии. Получаваме задачата

$$\min\left\{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{a_{ij}-y_{ij}}{\sigma_{ij}}\right)^2+\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{b_i-y_i}{\sigma_i}\right)^2\right\}$$

при ограничения:

$$\sum_{j=1}^{n} y_{ij}x_j = y_i, \quad \sum_{j=1}^{n} x_j = 100, \quad x_j \ge 0, \quad i = 1,\dots,m, \; j = 1,\dots,n.$$

В случая не само целевата функция, но и ограниченията са нелинейни.

8. Нека x_{ijk}, $i = 1,\dots,m$, $j = 1,\dots,n$, $k = 1,\dots,q$, е броят на бомбите тип i, носени от j-тия самолет при един полет в изпълнение на k-тата операция, а y_{jk}, $j = 1,\dots,n$, $k = 1,\dots,q$, е броят на полетите, с които j-тият самолет участва в k-тата операция. Тогава се търси

$$\max\left\{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{q} a_{ik}c_k y_{ik} x_{ijk}\right\},$$

при ограничения

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{q} y_{jk}x_{ijk} \le b_i, \quad & i = 1,\dots,m\\
\sum_{k=1}^{q} y_{jk} = d_j, \quad & j = 1,\dots,n,\\
\sum_{i=1}^{m} x_{ijk} \le h_j, \quad & j = 1,\dots,n, \; k = 1,\dots,q,\\
x_{ijk} \ge 0, \; y_{jk} \ge 0 \text{ и цели}, \quad & i = 1,\dots,m, \; j = 1,\dots,n, \; k = 1,\dots,q.
\end{aligned}$$

Моделът е целочислен нелинеен.

Библиография

[1] Алексеев, В. М., Э. М. Галеев, В. М. Тихомиров. Сборник задач по оптимизации. М., Наука, 1984.

[2] Алексеев, В. М., В. М. Тихомиров, С. В. Фомин. Оптимальное управление. М., Наука, 1979.

[3] Базара, М., К. Шетти. Нелинейное программирование. Теория и алгоритмы. М., Мир, 1982.

[4] Банди, Б. Методы оптимизации — вводный курс. М., Радио и связь, 1988.

[5] Васильев, Ф. П. Лекции по методам решения экстремальных задач. М., МГУ, 1974.

[6] Вентцел, Е. С. Елементи от теорията на игрите. С., Наука и изкуство, 1965.

[7] Воробьев, Н. Н. Теория игр. Лекции для экономистов-кибернетиков. Л., ЛУ, 1974.

[8] Гилл, Ф., У. Мюррей, М. Райт. Практическая оптимизация, М., Мир, 1985.

[9] Гичев, Т., З. Караметева. Теория на игрите, С., Наука и изкуство, 1980.

[10] Емеличев, В. А., М. М. Ковалев, М. К. Кравцов. Многогранники, графы, оптимизация. М., Наука, 1981.

[11] Заславский, Ю. Л. Сборник задач по линейному программированию. М., Наука, 1969.

[12] Иванов, Г. Хиперболични и изродени квадратични оптимизационни задачи. Хабилитационен труд. С., ИМ с ИЦ, БАН, 1983.

[13] Калихман, И. Л. Сборник задач по математическому программированию, М., Высшая школа, 1975.

[14] Кендеров, П., Г. Христов, А. Дончев. Математическо оптимиране. С., Университетско издатество „Кл. Охридски“, 1989.

[15] Ковалев, М. М. Дискретная оптимизация, Минск, БГУ, 1977.

[16] Кюнци Г. П., В. Крелле. Нелинейное программирование. М., Советское радио, 1965.

[17] Муртаф, Б. Современное линейное программирование. М., Мир, 1984.

[18] Оуэн, Г. Теория игр, М., Мир, 1971.

[19] Петков, М. Числени методи на алгебрата. С., Наука и изкуство, 1974.

[20] Саати, Ш. Целочисленные методы оптимизации и связанные с ними экстремальные проблемы. М., Мир, 1973.

[21] Христов, Г., Р. Калтинска. Математическо оптимиране, ч. 1. Линейно оптимиране. С., Наука и изкуство, 1972.

[22] Христов, Г., В. Кючукова, З. Карамитева. Универсална система за решаване и изследване на задачите на дробно-линейното (хиперболичното) оптимиране. Пета пролетна конференция на СМБ, 1976.

Г. Христов, В. Кючукова, Р. Калтинска,
З. Карамитева, А. Дончев, Й. Митев,
П. Миланов, Н. Киров, О. Кунчев

РЪКОВОДСТВО ЗА РЕШАВАНЕ НА ЗАДАЧИ ПО
МАТЕМАТИЧЕСКО ОПТИМИРАНЕ

Българска
Първо издание

Рецензенти Тодор Боянов, Никола Янев
Редактор Елисавета Михайлова
Художник на корицата Пенчо Мутафчиев
Худ. редактор Борис Драголов

Изд. индекс 51
Код 36 / 9534612431 / 4805–332–89
Подписана за печат март 1989 г.
Формат 59 × 84/16 Тираж 2000 ЛГ III–4
Печатни коли 16,50 Изд. коли 15,34 УИК 13,54
Цена 0,80 лв.

Университетско издателство „Климент Охридски“
Издателско-печатна база – ЕЦНПКФКС