Полагаме $x_n = 0$

$\sigma_1^{(n)}(x_1 .. x_{n-1}, 0) = \sigma_1^{(n-1)}(x_1 .. x_{n-1})$

...

$\sigma_n^{(n)} = 0$

↳ Заместваме

$0 = g(\sigma_1^{(n)} .. \sigma_n^{(n)}) = g_0(\sigma_1^{(n-1)} .. \sigma_{n-1}^{(n-1)}) + g_1(\sigma_1^{(n-1)} .. \sigma_{n-1}^{(n-1)}).0 + .. + 0 =$

$= g_0(\sigma_1^{(n-1)} .. \sigma_{n-1}^{(n-1)}) \Rightarrow g_0(y_1 .. y_{n-1}) \neq 0$ и $g_0(\sigma_1^{(n-1)} .. \sigma_{n-1}^{(n-1)}) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow g_0 \in T_{n-1} = \emptyset$ (от ИП) $\Rightarrow$ ↯ $\Rightarrow T_n = \emptyset$

$\Rightarrow$ По [redacted] и индукция доказахме, че ако $g(y_1 .. y_n) \neq 0$

$\Rightarrow g(\sigma_1^{(n)} .. \sigma_n^{(n)}) \neq 0 \Rightarrow$ единствеността

Следствие: Ако $f(x) \in F[x]$ (F - поле), $\deg f = n$ и $\alpha_1 .. \alpha_n$ са всички корени на $f(x)$, $\alpha_i \in T \supset F$, и $g(y_1 .. y_n) \in F[y_1 .. y_n]$ е симетричен $\Rightarrow g(\alpha_1 .. \alpha_n) \in F$

Доказателство: $\exists! h(y_1 .. y_n) \in F[y_1 .. y_n] : h(\sigma_1 .. \sigma_n) = g(y_1 .. y_n)$

$\sigma_i(\alpha_1 .. \alpha_n) \in F$ (от Виет) $\Rightarrow h(\sigma_1(\alpha_1 .. \alpha_n) .. \sigma_n(\alpha_1 .. \alpha_n)) \in F$

Теорема на Даламбер

D F - поле. F е алгебрически затворено, ако за $\forall f(x) \in F[x]$ $\deg f > 1$ $\exists \alpha \in F : f(\alpha) = 0$

1 Лема на Гаус → доказателството е малко shaky

Всеки полином с $\mathbb{R}$ коефициенти има поне един комплексен корен.

Доказателство: индукция по k

$n = \deg f$, $n = 2^k m$, m - нечетно, $k \geq 0$

$k = 0 \Rightarrow n$ - нечетно $\Rightarrow \lim_{x \to +\infty} f(x) = -\lim_{x \to -\infty} f(x) \Rightarrow \exists t_0 : f(t_0) = 0, t_0 \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow$ имаме корен

Нека е доказано за $k-1$. Ще го докажем за $k \geq 1$

$n = 2^k m$, $\deg f = n$

$\exists$ поле $T \supseteq \mathbb{R}$ - поле на разлагане на f над $\mathbb{R}$

$\alpha_1 .. \alpha_n$ - корени на f, $\alpha_i \in T$

$\beta_{ij}^{(r)} = \alpha_i + \alpha_j + r\alpha_i\alpha_j$, $r \in \mathbb{R}$, $i \neq j$ → $\binom{n}{2}$ такива елемента

$\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2} = \frac{2^k m(2^k m-1)}{2} = \underbrace{2^{k-1} m(2^k m-1)}_{\text{НЕЧЕТНО}}$

$g^{(r)}(y) \in T[y]$

$g^{(r)}(y) = \prod_{i \neq j}(y - \beta_{ij}^{(r)}) = [redacted] y^M + g_1 y^{M-1} + \ldots + g_M$

$\deg g^{(r)} = \binom{n}{2} = 2^{k-1} m(2^k m - 1)$

$\sigma_k(\{\beta_{ij}\})$ – РАЗГЛЕЖДАМЕ КАТО ПОЛИНОМ НА α-ИТЕ

ВСЯКА ПЕРМУТАЦИЯ НА $\alpha_1 .. \alpha_n$ ЗАДАВА ПЕРМУТАЦИЯ НА $\beta_{ij} \Rightarrow$ ПРИ ВСЯКА ПЕРМУТАЦИЯ НА $\beta_{ij} \Rightarrow \sigma_k(\{\beta_{ij}\})$ НЕ СЕ ПРОМЕНЯ $\Rightarrow \sigma_k(\{\beta_{ij}\})$ НЕ СЕ ПРОМЕНЯ И ПРИ ПЕРМУТАЦИЯ НА α-ИТЕ.

$\Rightarrow \sigma_k(\{\beta_{ij}\})$ Е СИМЕТРИЧЕН ПОЛИНОМ НА $\alpha_1 .. \alpha_n$ С КОЕФИЦИЕНТИ – $\mathbb{R}$ ЧИСЛА.

$\Rightarrow \sigma_n(\{\beta_{ij}\}) = l_k(\alpha_1 .. \alpha_n)$ – СИМЕТРИЧЕН С КОЕФИЦИЕНТИ ОТ $\mathbb{R}$

$\Rightarrow$ ОТ СЛЕДСТВИЕТО $\Rightarrow l_k(\alpha_1 .. \alpha_n) \in \mathbb{R}$

ОТ ФОРМУЛИТЕ НА ВИЕТ $\Rightarrow \sigma_1 = -g_1, \sigma_2 = g_2 \ldots \sigma_M = (-1)^M g_M \Rightarrow g_i \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow g^{(r)}(y) \in \mathbb{R}[y]$, $\deg g = \binom{n}{2} = 2^{k-1} m(2^{k-1} m - 1) \Rightarrow$ ПО ИНДУКЦИЯТА

$\exists$ КОМПЛЕКСЕН КОРЕН НА $g^{(r)}(y)$

$\forall r \in \mathbb{R} \; \exists (i,j)_{(r)} : \beta_{ij}(r) \in \mathbb{C}$

Т.К. $|\mathbb{R}| > \binom{n}{2} \Rightarrow \exists$ РАЗЛИЧЕН $r_1, r_2 \in \mathbb{R} : (i,j)_{(r_1)} = (i,j)_{(r_2)}$

$\beta_{(i,j)(r_1)} \in \mathbb{C}$; $\beta_{(i,j)(r_2)} \in \mathbb{C}$

$\Rightarrow \begin{cases} \alpha_i + \alpha_j + r_1 \alpha_i \alpha_j = g_1 \\ \alpha_i + \alpha_j + r_2 \alpha_i \alpha_j = g_2 \end{cases} \longrightarrow \alpha_i \alpha_j = \frac{g_1 - g_2}{r_1 - r_2} \in \mathbb{C}$

$\Rightarrow \alpha_i + \alpha_j = g_1 - r_1 \frac{g_1 - g_2}{r_1 - r_2} \in \mathbb{C}$

$x^2 - x\left(g_1 - r_1 \frac{g_1 - g_2}{r_1 - r_2}\right) + \frac{g_1 - g_2}{r_1 - r_2} = 0 \Rightarrow$ ИМА КОМПЛЕКСНИ КОРЕНИ.

$\Rightarrow \alpha_i, \alpha_j \in \mathbb{C}$

Т ТЕОРЕМА НА ДАЛАМБЕР /ОСНОВНА ТЕОРЕМА НА АЛГЕБРАТА/

ПОЛЕТО НА КОМПЛЕКСНИТЕ ЧИСЛА, $\mathbb{C}$, Е АЛГЕБРИЧЕСКИ ЗАТВОРЕНО.

Д ДОКАЗАТЕЛСТВО:

НЕКА $f(x) \in \mathbb{C}[x]$, $\deg f = n \geq 1$

$f(x) = f_0x^n + f_1x^{n-1} + \ldots + f_n$

$\overline{f}(x) = \overline{f}_0x^n + \overline{f}_1x^{n-1} + \ldots + \overline{f}_n$

$g = f(x) \cdot \overline{f}(x) \in \mathbb{R}[x]$

$f_n\overline{f}_k + f_{n-1}\cdot\overline{f}_{k+1} + \ldots + f_k\cdot\overline{f}_n$ = КОМПЛЕКСНО СПРЕГНАТОТО СИ

$\Rightarrow \exists \alpha \in \mathbb{C} : g(\alpha) = 0 = f(\alpha)\cdot\overline{f}(\alpha)$

$\Rightarrow$ $\underbrace{f(\alpha)=0}_{\text{корен}}$ или $\underbrace{\overline{f}(\alpha)=0}_{(2)}$

(2) $\overline{\overline{f}(\alpha)} = 0 \Rightarrow \overline{f}_0\alpha^n + \ldots + \overline{f}_n \Rightarrow \overline{f_0\alpha^n + \ldots + f_n} = \overline{f_0}\,\overline{\alpha}^n + \ldots + \overline{f_n} =$

$= f_0\overline{\alpha}^n + \ldots + f^n = f(\overline{\alpha}) = 0 \Rightarrow \overline{\alpha}$ - корен

$\Rightarrow \alpha$ или $\overline{\alpha}$ Е КОРЕН НА f

Сл.1 Всички корени на полином с комплексни коефициенти са комплексни числа

Сл.2 Неразложимите полиноми над $\mathbb{C}$ са само полиномите от 1ва степен

Сл.3 Всеки полином се разлага на линейни множители

— за $\mathbb{R}[x]$

Сл.4 Ако $f(x) \in \mathbb{R}[x]$, $\alpha \in \mathbb{C}$ и $f(\alpha) = 0 \Rightarrow f(\overline{\alpha}) = 0$

Сл.5 $f(x) \in \mathbb{R}[x]$, $\alpha, \overline{\alpha}$ - комплексно-спрегнати корени $\Rightarrow$

$\Rightarrow (x-\alpha)(x+\overline{\alpha}) = x^2 - (\alpha+\overline{\alpha}) + \alpha\overline{\alpha}$ е полином с $\mathbb{R}$ коефициенти и дели f

$x^2 - (\alpha+\overline{\alpha})x + \alpha\overline{\alpha}$, $\alpha \notin \mathbb{R}$ - неразложим над $\mathbb{R}$

Сл.6 Неразложими полиноми над $\mathbb{R}$:

- от първа степен;
- полиноми от втори степен с отрицателна дискриминанта

Крайни полета

D Крайно поле - поле с краен брой елементи.

F - крайно поле $|F| < \infty$

$\text{char } F = p$ - просто

$\exists!$ подполе $F_1 \subset F$ (просто): $F_1 \cong \mathbb{Z}_p \Rightarrow \mathbb{Z}_p \subset F$

(F е разширение на $\mathbb{Z}_p$