Симетрични полиноми над поле

Нека A - комутативен пръстен с 1. $\Rightarrow A[x_1]$ - ком. пр-н. с 1
A - област $\longrightarrow A[x_1]$ - област

$\Rightarrow A[x_1][x_2]$ - ком. пр-н. с 1 или област
$\hookrightarrow A[x_1, x_2]$ $\Rightarrow \dots \Rightarrow A[x_1 \dots x_n]$ - ком. пр-н. с 1 или област

$A[x_1 \dots x_n]$ - пръстен на полиномите на n променливи с коефициенти от A.

- едночлен: $u = a x_1^{i_1} x_2^{i_2} \dots x_n^{i_n}$
- u, v - едночлени, $v = b x_1^{j_1} \dots x_n^{j_n}$ - подобен на u
  $\hookrightarrow$ правим приведение по подобните едночлени $\Rightarrow$
  $\Rightarrow f(x_1 \dots x_n)$ = сума от неподобни едночлени.
- степен на едночлен - $\deg u = \sum_{j=1}^{n} i_j$; $\deg_{x_k} u = i_k$, $k = \overline{1, n}$
- степен на f:

$$\deg_{x_k} f = \max_{u \in f} (\deg_{x_k} u) \longrightarrow \deg f = \max_{u \in f} (\deg u)$$

Тв Ако A - област $\Rightarrow \deg(f.g) = \deg f + \deg g$, $f, g \in A[x_1 \dots x_n]$

Доказателство:

$f = f_k + f_{k-1} + \dots + f_0 \Rightarrow \deg f = k$
f_i - едночлен от степен i

$g = g_\ell + g_{\ell-1} + \dots + g_0 \Rightarrow \deg g = \ell$

$fg = f_k g_\ell + \dots \Rightarrow \deg fg = \deg f + \deg g$
($f_k g_\ell \neq 0$)

Лексикографска наредба в едночлените на полином
$u = a x_1^{i_1} x_2^{i_2} \dots x_n^{i_n}$, $v = b x_1^{j_1} x_2^{j_2} \dots x_n^{j_n}$
$u > v$ (u е по-напред от v в лексикографска наредба), ако
$\exists k$-позиция: $1 \le k \le n$: $i_1 = j_1, \dots i_{k-1} = j_{k-1}, i_k > j_k$

u, v - неподобни $\Rightarrow u > v$ или $u < v$.

$u > v$ и $v > w \Rightarrow u > w$

D Старши едночлен на f е най-големият (първият в лексикографската наредба) едночлен от f, а неговия коефициент, наричаме старши коефициент на f.

Л Лема за старшите едночлени

Нека f и g са два полинома, $f, g \in A[x_1 \dots x_n]$ – област. Нека $u = a x_1^{i_1} \dots x_n^{i_n}$ е старшият едночлен на f и $v = b x_1^{j_1} \dots x_n^{j_n}$ е старшият едночлен на g. Тогава старшият едночлен на fg е uv.

Доказателство:

f: $u = a x_1^{i_1} \dots x_n^{i_n}$; u'

g: $v = b x_1^{j_1} \dots x_n^{j_n}$; v' — произволни от f и g

$u' = a' x_1^{l_1} \dots x_n^{l_n}$; $u > u' \Rightarrow \exists k: i_k > l_k$, $i_t = l_t, t = \overline{1, k-1}$

$v' = b' x_1^{s_1} \dots x_n^{s_n}$; $v > v' \Rightarrow \exists t: j_t > s_t$, $j_k = s_k, k = \overline{1, t-1}$, нека $k < t$

fg: $uv = ab x_1^{i_1+j_1} \dots x_n^{i_n+j_n}$

$u'v' = a'b' x_1^{l_1+s_1} \dots x_n^{l_n+s_n}$

$i_1 + j_1 = l_1 + s_1$

$i_2 + j_2 = l_2 + s_2$

$\dots$

$i_{k-1} + j_{k-1} = l_{k-1} + s_{k-1}$

$i_k + j_k > l_k + s_k \Rightarrow uv > u'v' \Rightarrow uv$ – старшия едночлен

D Нека $f(x_1 \dots x_n) \in A[x_1 \dots x_n]$, A – област, е полином на n променливи. Казваме, че f е симетричен, ако $\forall \sigma \in S_n$ имаме, че $f(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)} \dots x_{\sigma(n)}) = f(x_1 \dots x_n)$

f, g – симетрични полиноми $\Rightarrow f+g, f-g, fg$ – симетрични $\Rightarrow$

$\Rightarrow \{ f \in A[x_1 \dots x_n] \mid A$ – област, f – симетричен $\} \leq A[x_1 \dots x_n]$

Заб.: f – симетричен, $u = a x_1^{i_1} \dots x_n^{i_n}$ – старши за $f \Rightarrow i_1 \leq i_s$, $s < t$

Т Основна теорема за симетричните полиноми

Нека $f \in A[x_1 \dots x_n]$, A – област, f – симетричен. Тогава съществува единствен $g \in A[x_1 \dots x_n]$: $g(\sigma_1 \dots \sigma_n) = f(x_1 \dots x_n)$

// $\sigma_1 \dots \sigma_n$ – елементарни симетрични полиноми

$\sigma_1(x_1 \dots x_n) = x_1 + \dots + x_n$

$\sigma_2(x_1 \dots x_n) = x_1x_2 + x_1x_3 + \dots + x_{n-1}x_n$

$\sigma_k(x_1 \dots x_n) = \sum x_1 \dots x_k$ – всевъзможни произведения с k множителя

$\dots$

$\sigma_n(x_1 \dots x_n) = x_1 \dots x_n$

Доказателство:

$\exists: f = a x_1^{i_1} \dots x_n^{i_n}$, $i_1 \geq i_2 \geq \dots \geq i_n$

$\varphi_1 = a \sigma_1^{i_1 - i_2} \dots \sigma_{n-1}^{i_{n-1} - i_n} \cdot \sigma_n^{i_n} \Rightarrow f - \varphi_1 = f_1$

$\sigma_1 \to x_1$

$\sigma_2 \to x_1 x_2$

$\vdots$

$\sigma_n \to x_1 \dots x_n$

$f_1 - \varphi_2 = f_2$

$\dots$

$f_{s-1} - \varphi_s = f_s = 0$

$\Rightarrow f = \varphi_1 + \dots + \varphi_s$

!: Трябва да докажем, че ако $f(x_1 \dots x_n)$ е симетричен и $g_1(y_1 \dots y_n)$ и $g_2(y_1 \dots y_n)$ са такива, че $g_1(\sigma_1 \dots \sigma_n) = g_2(\sigma_1 \dots \sigma_n) = f(x_1 \dots x_n) \Rightarrow$

$\Rightarrow g_1 = g_2$

↳ Доказваме, че ако $g(\sigma_1 \dots \sigma_n) = 0$, то $g(y_1 \dots y_n) = 0$

$T_n = \{ g(y_1 \dots y_n) \mid g(y_1 \dots y_n) \neq 0, g(\sigma_1 \dots \sigma_n) = 0 \}$

//индукция по $n \to$ Ще докажем, че $T_n = 0$.

$n = 1$ ▷ добавяме този индекс, за да покажем на колко променливи е σ_i

$\sigma_1 = x_1$ $g(\sigma_1^{(1)}) = 0 \Rightarrow g(x_1) = 0 \Rightarrow g = 0 \Rightarrow T_1 = \varnothing$

Нека е доказано за $n-1 \to T_{n-1} = \varnothing$.

Нека допуснем, че $T_n = \varnothing$

Нека $g(y_1 \dots y_n)$ е полиномът от T_n с минимална обща степен.

Разглеждаме g като полином на y_n.

$g(y_1 \dots y_n) = g_0(y_1 \dots y_{n-1}) + g_1(y_1 \dots y_{n-1}) y_n + \dots + g_k(y_1 \dots y_{n-1}) y_n^k$

1 сл) $g_0(y_1 \dots y_{n-1}) = \varnothing \Rightarrow$

$\Rightarrow g(y_1 \dots y_n) = y_n \underbrace{(g_1(y_1 \dots y_{n-1}) + \dots + g_k(y_1 \dots y_{n-1}) y_n^{k-1})}_{\ell(y_1 \dots y_n)}$

$\Rightarrow g(y_1 \dots y_n) = y_n \ell(y_1 \dots y_n) \to \ell(y_1 \dots y_n) \neq 0 \Rightarrow \ell \in T_n$

A – област на цялост $\Rightarrow A[y_1 \dots y_n]$ също е област на цялост

$0 = g(\sigma_1^{(n)} \dots \sigma_n^{(n)}) = \sigma_n^{(n)} \ell(\sigma_1^{(n)} \dots \sigma_n^{(n)})$

$\sigma_n^{(n)} \neq 0 \Rightarrow \ell(\sigma_1^{(n)} \dots \sigma_n^{(n)}) = 0$

$\deg g = \deg \ell + 1$, но g сме взели с минималната степен $\Rightarrow$ ↯

2 сл) $g_0(y_1 \dots y_{n-1}) \neq 0$

$g(\sigma_1^{(n)} \dots \sigma_n^{(n)}) = g_0(\sigma_1^{(n)} \dots \sigma_{n-1}^{(n)}) + g_1(\sigma_1^{(n)} \dots \sigma_{n-1}^{(n)}) \sigma_n + \dots + g_k(\sigma_1^{(n)} \dots \sigma_{n-1}^{(n)}) \sigma_n^{(n)k}$

$\sigma_1 \dots \sigma_{n-1}$ са на n променливи.

Полагаме $x_n = 0$

$\sigma_1^{(n)}(x_1 .. x_{n-1}, 0) = \sigma_1^{(n-1)}(x_1 .. x_{n-1})$

...

$\sigma_n^{(n)} = 0$

↳ Заместваме

$0 = g(\sigma_1^{(n)} .. \sigma_n^{(n)}) = g_0(\sigma_1^{(n-1)} .. \sigma_{n-1}^{(n-1)}) + g_1(\sigma_1^{(n-1)} .. \sigma_{n-1}^{(n-1)}).0 + .. + 0 =$

$= g_0(\sigma_1^{(n-1)} .. \sigma_{n-1}^{(n-1)}) \Rightarrow g_0(y_1 .. y_{n-1}) \neq 0$ и $g_0(\sigma_1^{(n-1)} .. \sigma_{n-1}^{(n-1)}) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow g_0 \in T_{n-1} = \emptyset$ (от ИП) $\Rightarrow$ ↯ $\Rightarrow T_n = \emptyset$

$\Rightarrow$ По [redacted] и индукция доказахме, че ако $g(y_1 .. y_n) \neq 0$

$\Rightarrow g(\sigma_1^{(n)} .. \sigma_n^{(n)}) \neq 0 \Rightarrow$ единствеността

Следствие: Ако $f(x) \in F[x]$ (F - поле), $\deg f = n$ и $\alpha_1 .. \alpha_n$ са всички корени на $f(x)$, $\alpha_i \in T \supset F$, и $g(y_1 .. y_n) \in F[y_1 .. y_n]$ е симетричен $\Rightarrow g(\alpha_1 .. \alpha_n) \in F$

Доказателство: $\exists! h(y_1 .. y_n) \in F[y_1 .. y_n] : h(\sigma_1 .. \sigma_n) = g(y_1 .. y_n)$

$\sigma_i(\alpha_1 .. \alpha_n) \in F$ (от Виет) $\Rightarrow h(\sigma_1(\alpha_1 .. \alpha_n) .. \sigma_n(\alpha_1 .. \alpha_n)) \in F$

Теорема на Даламбер

D F - поле. F е алгебрично затворено, ако за $\forall f(x) \in F[x]$ $\deg f > 1$ $\exists \alpha \in F : f(\alpha) = 0$

Л Лема на Гаус → доказателството е малко shaky

Всеки полином с $\mathbb{R}$ коефициенти има поне един комплексен корен.

Доказателство: индукция по k

$n = \deg f$, $n = 2^k m$, m - нечетно, $k \geq 0$

$k = 0 \Rightarrow n$ - нечетно $\Rightarrow \lim_{x \to +\infty} f(x) = -\lim_{x \to -\infty} f(x) \Rightarrow \exists t_0 : f(t_0) = 0, t_0 \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow$ имаме корен

Нека е доказано за $k-1$. Ще го докажем за $k \geq 1$

$n = 2^k m$, $\deg f = n$

$\exists$ поле $T \supseteq \mathbb{R}$ - поле на разлагане на f над $\mathbb{R}$

$\alpha_1 .. \alpha_n$ - корени на f, $\alpha_i \in T$

$\beta_{ij}^{(r)} = \alpha_i + \alpha_j + r\alpha_i\alpha_j$, $r \in \mathbb{R}$, $i \neq j$ → $\binom{n}{2}$ такива елемента