Полиноми на една променлива

Нека A е комутативен пръстен с единица

$B = \{ f(a_0, a_1, \dots, a_i, \dots) \mid a_i \in A \}$

от дадено място нататък е 0.

↳ Дефиниране събиране и умножение:

$g = (b_0, b_1, \dots, b_j, \dots)$

$f+g = (a_0+b_0, a_1+b_1, \dots, a_i+b_i, \dots)$

$f \cdot g = (d_0, d_1, \dots d_n, \dots) = (a_0b_0, a_0b_1 + a_0b_1, a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0, \dots)$

$\rightarrow d_n = \sum_{i+j=n} a_i b_j$

$(B, +, \cdot)$ – комутативен пръстен с единица

1) $(B, +)$ – абелева група:

$f+g = (a_0+b_0, \dots, a_i+b_i, \dots) = (b_0+a_0, \dots b_i+a_i \dots) = g+f$

$h = (c_0, c_1 \dots c_k \dots)$

$(f+g)+h = ((a_0+b_0)+c_0, \dots (a_i+b_i)+c_i \dots) = (a_0+(b_0+c_0) \dots a_i+(b_i+c_i) \dots) =$

$= f+(g+h)$

$f+(0,0 \dots 0) = (a_0+0, \dots a_i+0 \dots) = (a_0, \dots a_i \dots) = f$

$f+(-a_0, \dots -a_i) = (a_0+(-a_0) \dots a_i+(-a_i) \dots) = (0 \dots 0 \dots)$

2) Асоциативност на умножението

$f, g, h \in B$

$fg = (d_0 \dots d_n \dots) \rightarrow d_n = \sum_{i+j=n} a_i b_j$

$gh = (t_0, \dots t_s \dots) \rightarrow t_s = \sum_{j+k=s} b_j c_k$

$(fg)h = (u_0 \dots u_m \dots)$

$f(gh) = (v_0, \dots v_m \dots)$

$\} \stackrel{?}{\Rightarrow} u_m = v_m \ \forall m$

$u_m = \sum_{n+k=m} d_n c_k = \sum_{n+k=m} \left(\sum_{i+j=n} a_i b_j \right) c_k = \dots = \sum_{i+j+k=m} a_i b_j c_k$

$v_m = \sum_{i+s=m} a_i t_s = \sum_{i+s=m} a_i \left(\sum_{j+k=s} b_j c_k \right) = \dots = \sum_{i+j+k=m} a_i b_j c_k$

$\} \ u_m = v_m \Rightarrow$

$\Rightarrow (fg)h = f(gh)$

В B: $0 = (0 \dots 0 \dots)$

$1 = (1 \dots 0 \dots)$

$A_0 = \{(a,0,0\ldots 0\ldots) \mid a \in A\} \leq B$

$\varphi \begin{cases} A \to A_0 \\ a \to (a,0\ldots 0\ldots) \end{cases}$ → изоморфизъм $\Rightarrow A \cong A_0$

$(a,0,\ldots 0,0\ldots)$ → означаваме a

Дефинираме:

$x = (0,1,\ldots 0) \to x^2 = (0,0,1,0\ldots 0)$

$x^4 = (0,0,0,0,1,0\ldots 0) \to x^n = (0\ldots 0,\underset{\downarrow}{1},0,\ldots)$

$n+1$-ва позиция.

$ax^n = (a,0\ldots 0)(0\ldots 1\ldots 0) = (0\ldots a,0\ldots 0)$

$n+1$-ва позиция.

$f = (a_0,a_1\ldots,a_n,0\ldots) = (a_0,0\ldots 0) + (0,a_1,0\ldots 0) + \ldots + (0\ldots a_n,0\ldots) =$

$= a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n = f(x).$

$\Rightarrow B = \{f(x) = b_0x^n + b_1x^{n-1} + \ldots + b_{n-1}x + b_n \mid b_i \in A, n \in \mathbb{N}\}$

$A[x]$ → пръстен на полиномите на променливата x с коефициенти от A / полиномиален пръстен над A.

$f = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n \in A[x]$

a_0 - старши коефициент

$a_0 = 1 \Rightarrow$ полиномът е унитарен ~~нормализиран~~

a_i - коефициент

a_n - свободен коефициент

n - степен ($n = \deg f$)

$f = a = \text{const} \Rightarrow \deg f = 0$

$\# \ a \neq 0$

$f = 0 \to \deg f = -\infty$

$\deg(f+g) \leq \max(\deg f, \deg g)$

$\deg(fg) = \deg f + \deg g$ (когато изходният пръстен няма делители на 0)

A - комутативен пръстен с $1 \Rightarrow A[x]$ - също

A - област $\Rightarrow A[x]$ - област

F - поле $\Rightarrow F[x]$ - поле

Т Делене с частно и остатък

$\forall g \in F[x], g \neq 0 \Rightarrow \exists!\ q$ - частно, и r - остатък, $q,r \in F[x]$:

$f = gq + r$ и $\deg r < \deg g$

36

Доказателство:

∃) индукция по $\deg f = n$ $\quad f = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n$, $g = b_0x^s + b_1x^{s-1} + \ldots + b_s$

1) $g = const \neq 0$

$f = g(g^{-1}f) + 0$

2) $\deg f < \deg g$

$f = g \cdot 0 + f$

3) $(a_0x^n + \ldots + a_n) - (x^{n-s}a_0b_0^{-1})g = f_1$, $\deg f_1 \leq n-1$

$\Rightarrow \exists q_1, r_1 : f_1 = gq_1 + r_1$ и $\deg r_1 < \deg g$

$f = f_1 + a_0b_0^{-1}x^{n-s}$ $\quad g = gq_1 + r_1 + a_0b_0^{-1}x^{n-s} = g(\underbrace{q_1 + a_0b_0^{-1}x^{n-s}}_{q}) + \underbrace{r_1}_{r}$

!) $f = gq_1 + r_1 = gq_2 + r_2$; $\deg r_1 < \deg g$ и $\deg r_2 < \deg g$

↓ изваждаме

$g(q_1 - q_2) = r_2 - r_1$

$\deg(g(q_1 - q_2)) = \deg g + \deg(q_1 - q_2) \geq \deg g > \deg(r_2 - r_1)$ ↯

(равенството е в F-поле; $q_1 - q_2 \neq 0$)

$\Rightarrow$ представянето е единствено

Забележка: Теоремата би могла да бъде използвана за A-област и b_0 – обратим; ако A е комутативен пръстен с единица, но не е област, теоремата дава формулата, но няма единственост на представянето.

$f = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$, $g = x - \alpha$, $a_i, \alpha \in$ F-поле

$q = b_0x^{n-1} + b_1x^{n-2} + \ldots + b_{n-2}x + b_{n-1}$

$f = gq + r$, $\deg r < 1 \Rightarrow r \in F$

$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n = (x - \alpha)(b_0x^{n-1} + \ldots + b_{n-1}) + r$

$\Rightarrow$

$a_0 = b_0$	$b_0 = a_0$
$a_1 = b_1 - \alpha b_0$	$b_1 = a_2 + \alpha b_1$
$a_2 = b_2 - \alpha b_1$	$b_2 = a_2 + \alpha b_2$
$\ldots$	$\ldots$
$a_{n-1} = b_{n-1} - \alpha b_{n-2}$	$b_{n-1} = a_{n-1} + \alpha b_{n-2}$
$a_n = r - \alpha b_{n-1}$	$r = a_n + \alpha b_{n-1}$

$\Rightarrow$ Схема на Хорнер

	a_0	a_1	$\ldots$	a_n
α	a_0	b_1		r

$\Rightarrow f = g(x - \alpha) \Leftrightarrow r = 0$

ТВ K – област, $g = x - \alpha \in K[x]$, $f \in K[x] \Rightarrow f = gq + r$

$\Rightarrow f = q(x-\alpha) \Leftrightarrow r = 0$

Т Всеки идеал I в пръстена $F[x]$ е главен идеал, породен от полинома от най-ниска степен, принадлежащ на I.

Доказателство: $F[x], \{0\} = (0) \trianglelefteq F[x]$

Нека $I \neq \{0\}$ и $f \in I$: $\deg f = n$ – възможно най-ниската степен на елемент от I, $f \neq 0$. Ще покажем, че $I = (f)$.

Нека $g \in I \Rightarrow g = fq + r$, $\deg r \leq n \Rightarrow r = g - fq \in I$

$\Rightarrow r = 0 \Rightarrow g \in (f) \Rightarrow I \subseteq (f)$

Нека $t \in (f) \Rightarrow t = f \cdot s$, $s \in F[x]$

$f \in I \Rightarrow f \cdot s \in I \Rightarrow t \in I \Rightarrow (f) \subseteq I \Rightarrow \underline{I = (f)}$

K-област $\Rightarrow f(x-\alpha)\, q \Leftrightarrow f(\alpha) = r = 0$

ТВ $f \in K[x]$, $\deg f = n$, $\exists \alpha_i \in K$, $i = \overline{1, n+1}$, $\alpha_i \neq \alpha_j, \forall i \neq j$:

$f(\alpha_i) = 0$

$\Rightarrow f = 0$

Доказателство:

$f = (x-\alpha_1) q_1(x) \longrightarrow f(\alpha_2) = (\alpha_2 - \alpha_1) q_1(\alpha_2) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow q_1(\alpha_2) = 0 \longrightarrow q_1 = (x-\alpha_2) q_2(x)$

K-област $\Rightarrow \ldots$

$\Rightarrow f = (x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\ldots(x-\alpha_{n+1}) q_{n+1}(x) \Rightarrow \deg f \geq n+1$ ↯

$\deg f = n$

? Твърдението не е вярно, ако K не е област !

Следствие: Принцип на сравнение на коефициентите

$f, g \in K[x]$, $\deg g = \deg f$: $\exists \alpha_i \in K$, $i = \overline{1, n+1}$, $\alpha_i \neq \alpha_j, \forall i \neq j$:

$f(\alpha_i) = g(\alpha_i)$; $i = \overline{1, n+1} \Rightarrow f = g$

Доказателство:

$f - g \longrightarrow$ от предното твърдение $\Rightarrow f - g = 0 \Rightarrow f = g$
