1) КОРЕКТНОСТ ?

$x \in a + \ker\varphi$

$\triangleright x = a + i,\ i \in \ker\varphi \Rightarrow \varphi(x) = \varphi(a) + \underbrace{\varphi(i)}_{0} = \varphi(a)$

2) ХОМОМОРФИЗЪМ ?

$\psi(a+\ker\varphi + b+\ker\varphi) = \psi(a+b+\ker\varphi) = \varphi(a+b) = \varphi(a) + \varphi(b) =$

$= \psi(a+\ker\varphi) + \psi(b+\ker\varphi).$

$\psi((a+\ker\varphi)(b+\ker\varphi)) = \psi(ab+\ker\varphi) = \varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b) =$

$= \psi(a+\ker\varphi).\ \psi(b+\ker\varphi).$

3) БИЕКЦИЯ ?

$a+\ker\varphi \neq b+\ker\varphi.$

ДОПУСКАМЕ, ЧЕ $\psi(a+\ker\varphi) = \psi(b+\ker\varphi) \Rightarrow \varphi(a) = \varphi(b) \Rightarrow$

$\Rightarrow \varphi(a-b) = 0 \Rightarrow a-b = t \in \ker\varphi \Rightarrow a = b+t \Rightarrow a \in b+\ker\varphi \Rightarrow$

$\Rightarrow a+\ker\varphi = b+\ker\varphi$ ↯ $\Rightarrow \psi(a+\ker\varphi) \neq \psi(b+\ker\varphi) \Rightarrow$

$\Rightarrow \psi$ - ИНЕКЦИЯ.

$x \in \mathrm{Im}\varphi \Rightarrow \exists a \in K : x = \varphi(a) = \psi(a+\ker\varphi) \Rightarrow \psi$ - СЮРЕКЦИЯ $\Rightarrow$

$\Rightarrow \psi$ - БИЕКЦИЯ

$\Rightarrow \psi$ - ИЗОМОРФИЗЪМ $\Rightarrow K/\ker\varphi \cong \mathrm{Im}\varphi$

ИДЕАЛИ В КОМУТАТИВЕН ПРЪСТЕН. КИТАЙСКА ТЕОРЕМА ЗА ОСТАТЪЦИТЕ.

K - КОМУТАТИВЕН ПРЪСТЕН С ЕДИНИЦА.

D $I \lhd K$ СЕ НАРИЧА МАКСИМАЛЕН, АКО $\forall J \lhd K : I \subsetneq J \Rightarrow J = K.$

D $I \lhd K$ СЕ НАРИЧА ПРОСТ ИДЕАЛ, АКО $\forall a,b \in I \Rightarrow a \in I \ \|\ b \in I.$

T K - КОМУТАТИВЕН ПРЪСТЕН С ЕДИНИЦА И $I \lneq K$. ТОГАВА:

1) $I \lhd_{max} K \Leftrightarrow K/I$ - ПОЛЕ

2) I - ПРОСТ $\Leftrightarrow K/I$ - ОБЛАСТ НА ЦЯЛОСТ

ДОКАЗАТЕЛСТВО:

1) $\Rightarrow$) $I \lhd_{max} K.$

K - КОМУТАТИВЕН $\Rightarrow K/I$ - КОМУТАТИВЕН С $1 = (1+I)$

НЕКА $x+I \neq I \Rightarrow x \notin I.$

$M = \{x.a+i \mid i \in I,\ a \in K\} = (x)+I$

$M \lhd K : xa_1+i_1 - (xa_2+i_2) = x(a_1-a_2) + (i_1-i_2) \in M$

$r \in K\ r(xa+i) = xra + ri \in M$

$i \in I = 0.a + i \in M \Rightarrow I \subset M$

$x = x.1 + 0 \in M \Rightarrow I \neq M$

I - max $\Rightarrow M = K \Rightarrow 1 \in M$

$\exists a_3 \in K, \exists i_3 \in I : 1 = x a_3 + i_3$

$(x+I)(a_3+I) = x a_3 + I = 1 + I \Rightarrow (a_3+I) = (x+I)^{-1} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ ВСЕКИ НЕНУЛЕВ ЕЛЕМЕНТ Е ОБРАТИМ $\Rightarrow K/I$ - ПОЛЕ

$\Leftarrow K/I$ - ПОЛЕ

$J \lhd K$, $I \subsetneq J$

$\exists b : b \in J, b \notin I$

$\Rightarrow b + I \neq I \Rightarrow \exists y + I = (b+I)^{-1} : (y+I)(b+I) = 1 + I$

$\Rightarrow yb + I = 1 + I \Rightarrow yb + i = 1,\ i \in I \Rightarrow 1 \in J \Rightarrow x \in K \Rightarrow x.1 \in J \Rightarrow J = K.$

$\Rightarrow I$ - max.

2) ...

$I, J \lhd K$ - КОМУТАТИВЕН ПРЪСТЕН С 1.

1) $I \cap J \lhd K$

2) $I + J = \{a + b \mid a \in I, b \in J\} \lhd K$

3) $IJ = \{a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_s b_s \mid s \in \mathbb{N}, a_i \in I, b_i \in J\}$

D $I, J \lhd K \Rightarrow I$ и J СА ВЗАИМНО ПРОСТИ, АКО $I + J = K$

КИТАЙСКА ТЕОРЕМА ЗА ОСТАТЪЦИТЕ:

K - КОМУТАТИВЕН ПРЪСТЕН С 1. $I_1 \dots I_n \lhd K$, $n \geq 2$, $I_s + I_t = K$ $\forall s \neq t$.

$\forall x_1 \dots x_n \in K \Rightarrow \exists a \in K : a \in x_i + I_i, i = \overline{1,n} \Leftrightarrow x_i \in a + I_i,\ i = \overline{1,n}$

Класическа китайска теорема за остатъците (не я док-ме):

$\mathbb{Z} \Rightarrow t_1 \dots t_n : (t_i, t_j) = 1\ \forall i \neq j$

$\forall b_1 \dots b_n \in \mathbb{Z}\ \exists x : x \equiv b_i (t_i)\ i = \overline{1,n}$

ДОКАЗАТЕЛСТВО: *индукция по* n

$n = 2$

$1 \in I_1 + I_2 = K \Rightarrow \exists a_1 \in I_1, a_2 \in I_2 : 1 = a_1 + a_2$

ДАДЕНИ СА $x_1, x_2 \Rightarrow$ ТЪРСИМ a

$a = x_2 a_1 + x_1 a_2$

$a - x_1 = x_2 a_1 + x_1 (\underbrace{a_2 - 1}_{-a_1}) = x_2 a_1 - x_1 a_1 = (x_2 - x_1) a_1 \in I_1$

$\Rightarrow a \in x_1 + I_1$

$a - x_2 = x_2 (a_1 - 1) + x_1 a_2 = x_2 (-a_2) + x_1 a_2 = (-x_2 + x_1) a_2 \in I_2$

$\Rightarrow a \in x_2 + I_2$

$n > 2$. ДОПУСКАМЕ, ЧЕ Е ВЯРНО $\forall k < n$.

$I_1 \dots I_n$

$I_1+I_2=K \Rightarrow 1=a_2+b_2,\ a_2\in I_1,\ b_2\in I_2$

$I_1+I_3=K \Rightarrow 1=a_3+b_3,\ a_3\in I_1,\ b_3\in I_3$

...

$I_1+I_n=K \Rightarrow 1=a_n+b_n,\ a_n\in I_1,\ b_n\in I_n$

$\Rightarrow 1=(a_2+b_2)(a_3+b_3)\dots(a_n+b_n)$ → ако имаме a_i в някое събираемо, то това събираемо е от $I_1 \Rightarrow 1=\square+\square+\dots+b_2\cdot\dots\cdot b_n$

$\square\in I_1$

$s_1\in I_1$

$t_1\in \bigcap_{m=2}^{n} I_m = J_1$

$1=s_1+t_1$

$\Rightarrow I_1+J_1=K$

Аналогично:

$1=s_2+t_2,\ s_2\in I_2,\ t_2\in \bigcap_{\substack{\ell=1\\ \ell\neq 2}}^{n} I\ell = J_2 \Rightarrow I_2+J_2=K$

...

$1=s_n+t_n,\ s_n\in I_n,\ t_n\in \bigcap_{m=1}^{n-1} I_m = J_n \Rightarrow I_n+J_n=K$

$1,0 \to \exists e_1: 0+J_1\ni e_1\in 1+I_1$

$\exists e_2: 0+J_2\ni e_2\in 1+I_2$

- - - - -

$\exists e_n: 0+J_n\ni e_n\in 1+I_n$

Лемма $x_1\dots x_n$

$a=x_1e_1+\dots+x_ne_n$

$a-x_s=\underbrace{x_1e_1}_{\in I_s}+\dots+\underbrace{x_s(e_s-1)}_{\in I_s}+\dots+\underbrace{x_ne_n}_{\in I_s} \in I_s$

$\forall e_i, i\neq s\in I_s$

$e_s\in 1+I_s \Rightarrow e_s-1\in I_s$

$\Rightarrow a-x_s\in I_s \to a\in x_s+I_s$

$x_s\in a+I_s$

Следствие:

K - комутативен пръстен с $I_1\dots I_n$: $I_j+I_k=K\ \forall j\neq k$

$\Rightarrow K/\bigcap_{s=1}^{n} I_s \cong K/I_1\oplus\dots\oplus K/I_n$

$\mathbb{Z}_{36}\cong\mathbb{Z}_4\oplus\mathbb{Z}_9$