Вкарване: $\exists A' \subset T : A \cong A'$

D K, M – пръстени. Казваме, че $\varphi: K \to M$ е хомоморфизъм, ако:

$\varphi(a+b) = \varphi(a) + \varphi(b)$

$\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$, $\forall a, b \in K$

φ е изоморфизъм, когато: 1) φ е хомоморфизъм

2) φ е биекция

$K \cong M$ (изоморфни са), когато $\exists$ изоморфизъм $\varphi: K \to M$.

$A' = \{[ax, a] \mid \forall a, x \in A, a \neq 0\}$

$[ax, a] = [bx, b]$

$\varphi: A \to A' \subset T$

$\varphi(x) = [ax, a]$

$\varphi(x+y) = [a(x+y), a] = [ax+ay, a] = [ax, a] + [ay, a] = \varphi(x) + \varphi(y)$.

$\varphi(xy) = [a(xy), a] = [(ax)(ay), a \cdot a] = [ax, a][ay, a] = \varphi(x)\varphi(y)$

$\hookrightarrow \varphi$ – хомоморфизъм

$\varphi(x) = [ax, a]$

$[ax, a] = [by, b] \Rightarrow axb = bya \Rightarrow ab(x-y) = 0 \Rightarrow x - y = 0 \Rightarrow x = y$

$\Rightarrow \varphi(x) = \varphi(y) \Rightarrow x = y$

$\Rightarrow A \cong A' \subset T$

Забележка: Това поле от частни е най-малкото поле, което съдържа A,

T Ако A е област на цялост, F е поле, за което $A \subset F$, T – полето от частни за A, тогава $\exists$ подполе $T_1 \subseteq F : A \subset T_1 \cong T$.

Схема на док-вото:

Прави се изображение $\varphi: T \to F$.

$\varphi([a, b]) = ab^{-1}$

0) φ – коректно дефинирана.

1) φ – хомоморфизъм

2) φ – инекция ($\varphi(x) \neq \varphi(y) \Rightarrow x \neq y$)

3) $T_1 = \operatorname{Im}\varphi \Rightarrow T \cong T_1$.

Идеали и фактор-пръстени. Теорема за хомоморфизмите при пръстени

D K, M – пръстени

$\varphi: K \to M$ – хомоморфизъм, ако:

1) $\varphi(a+b) = \varphi(a) + \varphi(b)$, $\forall a, b \in K$

2) $\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$

$\varphi(0) = 0$

$\varphi(-a) = -\varphi(a)$

φ е хомоморфизъм на адитивните групи на двата пръстена и относно умножението.

$\ker\varphi = \{x \in K \mid \varphi(x) = 0 \in M\}$

$\mathrm{Im}\varphi = \{\varphi(x) \mid x \in K\}$

$\ker\varphi < K$ | $a \in \ker\varphi,\ r \in K$

$a, b \in \ker\varphi$ | $\varphi(ar) = 0 \Rightarrow ar \in \ker\varphi$

$\varphi(a-b) = 0$ | $\varphi(ra) = 0 \Rightarrow ra \in \ker\varphi$

$\varphi(ab) = 0$ |

D Идеал:

Нека K е пръстен. $\varnothing \neq I \subset K$ се нарича идеал, ако

1) $a - b \in I,\ \forall a, b \in I$

2) $ar \in I,\ \forall a \in I,\ \forall r \in K$

$ra \in I,\ \forall a \in I,\ \forall r \in K$

Записва се $I \lhd K$

Пример: $\{0\} \lhd K;\ K \lhd K$

$(3) = \{3k \mid k \in \mathbb{Z}\} = 3\mathbb{Z} < \mathbb{Z}$

Нека K-комутативен пръстен с единица.

$a \in K \Rightarrow (a) = \{ax \mid x \in K\}$

$ax - ay = a(x-y) \in (a)$

$(ax)r = a(xr) \in (a)$

$r(ax) = a(rx) \in (a)$

$\Rightarrow (a) \lhd K$ - главен идеал, породен от елемента a

Тв В пръстена на $\mathbb{Z}$ всички идеали са главни.

Док-во: Нека $I \lhd \mathbb{Z}$

1) $I = \{0\} \Rightarrow I = (0)$

2) $I \neq \{0\} \rightarrow \exists x \in I : x \neq 0$

$-x = (-1)x \in I$

$\Rightarrow$ В I има положителни и отрицателни числа

$d = \min$ положително число от I.

$d \neq 0,\ d > 0$

$x \in I : x = dq + r,\ 0 \leq r < d$

$r = x - dq,\ x \in I,\ d \in I \Rightarrow dq \in I \Rightarrow r \in I \Rightarrow$ т.к. d е минималното положително $\Rightarrow r = 0 \Rightarrow x = dq \Rightarrow x \in (d) \Rightarrow I \subseteq (d)$

$d \in I \Rightarrow dq \in I \Rightarrow (d) \subseteq I \Rightarrow I = (d)$.

Тв K-пръстен с единица. $I \lhd K$. $\exists a$ - обратим, $a \in K$ и $a \in I \Rightarrow I = K$

Доказателство:

$a \in I$, обратим $\Rightarrow \exists a^{-1}$

$a \cdot a^{-1} \in I \Rightarrow 1 \in I$

$x \in K$ - произволно

$x = x \cdot 1 \in I \Rightarrow I = K$

Извод: Идеалите в поле са само тривиалните.

Фактор-пръстен

Нека $I \lhd K$, K-пръстен. Ясно е, че $\underbrace{I \lhd (K,+)}$.

$K = \bigcup_{x \in K} (x+I)$

$x+I = y+I \Leftrightarrow x-y \in I$ } имаме от

$K/I = \{x+I \mid x \in K\}$ – K факторизирано по I.

$(x+I)*(y+I) = (x+y)+I$

$(x+I)(y+I) = (xy)+I$

Коректна ли е дефиницията?

(1) $x_1+I = x+I \Rightarrow x_1 - x \in I : x_1 = x+i_1, i_1 \in I$

$y_1+I = y+I \Rightarrow y_1 - y \in I : y_1 = y+i_2, i_2 \in I$

$x_1y_1 = (x+i_1)(y+i_2) = xy + i_1y + xi_2 + i_1i_2$

$x_1y_1 - xy = i_1y + xi_2 + i_1i_2 \in I$

$\Rightarrow xy+I = x_1y_1+I$.

Дали K/I е пръстен?

K/I – група относно $(+)$

1) Асоциативност на $\cdot$

$((a+I)(b+I))(c+I) = (ab+I)(c+I) = (ab)c+I = a(bc)+I = (a+I)(bc+I) =$

$= (a+I)((b+I)(c+I))$.

2) Дистрибутивност

$(a+I)((b+I)+(c+I)) = (a+I)((b+c)+I) = (a(b+c)+I) = ab+ac+I =$

$= (ab+I)+(ac+I) = (a+I)(b+I)+(a+I)(c+I)$

$\Rightarrow K/I$ – пръстен

$\hookrightarrow$ фактор-пръстен на K факторизирано по I.

Нека $I \lhd K$, K-пръстен $\Rightarrow \exists$ фактор-пръстен K/I.

$\eta : K \to K/I$

$\eta(a) = (a+I)$

$\eta(a+b) = (a+b)+I = (a+I)+(b+I) = \eta(a)+\eta(b)$

$\eta(ab) = ab+I = (a+I)(b+I) = \eta(a)\eta(b)$

$\Rightarrow \eta$ – естествен хомоморфизъм

$\operatorname{Ker}\eta = \{x+I \mid x \in K\} \Rightarrow \operatorname{Ker}\eta = I$

Теорема за хомоморфизмите при пръстени:

K, M – пръстени; $\varphi : K \to M$ – хомоморфизъм; тогава

$\operatorname{Ker}\varphi \lhd K$ и $K/\operatorname{Ker}\varphi \cong \operatorname{Im}\varphi$.

Доказателство:

$K \xrightarrow{\varphi} \operatorname{Im}\varphi \leq M$

$\eta \searrow \quad \nearrow \bar{\varphi}$

$K/\operatorname{Ker}\varphi$

$\bar{\varphi}(a+\operatorname{Ker}\varphi) = \varphi(a)$

1) КОРЕКТНОСТ ?

$x \in a + \ker\varphi$

$\Rightarrow x = a + i,\ i \in \ker\varphi \Rightarrow \varphi(x) = \varphi(a) + \underbrace{\varphi(i)}_{0} = \varphi(a)$

2) ХОМОМОРФИЗЪМ ?

$\psi(a+\ker\varphi + b+\ker\varphi) = \psi(a+b+\ker\varphi) = \varphi(a+b) = \varphi(a) + \varphi(b) =$

$= \psi(a+\ker\varphi) + \psi(b+\ker\varphi).$

$\psi((a+\ker\varphi)(b+\ker\varphi)) = \psi(ab+\ker\varphi) = \varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b) =$

$= \psi(a+\ker\varphi).\ \psi(b+\ker\varphi).$

3) БИЕКЦИЯ ?

$a+\ker\varphi \neq b+\ker\varphi.$

ДОПУСКАМЕ, ЧЕ $\psi(a+\ker\varphi) = \psi(b+\ker\varphi) \Rightarrow \varphi(a) = \varphi(b) \Rightarrow$

$\Rightarrow \varphi(a-b) = 0 \Rightarrow a-b = t \in \ker\varphi \Rightarrow a = b+t \Rightarrow a \in b+\ker\varphi \Rightarrow$

$\Rightarrow a+\ker\varphi = b+\ker\varphi$ ↯ $\Rightarrow \psi(a+\ker\varphi) \neq \psi(b+\ker\varphi) \Rightarrow$

$\Rightarrow \psi$ - ИНЕКЦИЯ.

$x \in \mathrm{Im}\varphi \Rightarrow \exists a \in K : x = \varphi(a) = \psi(a+\ker\varphi) \Rightarrow \psi$ - СЮРЕКЦИЯ $\Rightarrow$

$\Rightarrow \psi$ - БИЕКЦИЯ

$\Rightarrow \psi$ - ИЗОМОРФИЗЪМ $\Rightarrow K/\ker\varphi \cong \mathrm{Im}\varphi$

ИДЕАЛИ В КОМУТАТИВЕН ПРЪСТЕН. КИТАЙСКА ТЕОРЕМА ЗА ОСТАТЪЦИТЕ.

K - КОМУТАТИВЕН ПРЪСТЕН С ЕДИНИЦА.

D $I \lhd K$ СЕ НАРИЧА МАКСИМАЛЕН, АКО $\forall J \lhd K : I \subsetneq J \Rightarrow J = K.$

D $I \lhd K$ СЕ НАРИЧА ПРОСТ ИДЕАЛ, АКО $\forall a,b \in I \Rightarrow a \in I \ \|\ b \in I.$

T K - КОМУТАТИВЕН ПРЪСТЕН С ЕДИНИЦА И $I \lneq K$. ТОГАВА:

1) $I \lhd_{max} K \Leftrightarrow K/I$ - ПОЛЕ

2) I - ПРОСТ $\Leftrightarrow K/I$ - ОБЛАСТ НА ЦЯЛОСТ

ДОКАЗАТЕЛСТВО:

1) $\Rightarrow$) $I \lhd_{max} K.$

K - КОМУТАТИВЕН $\Rightarrow K/I$ - КОМУТАТИВЕН С $1 = (1+I)$

НЕКА $x+I \neq I \Rightarrow x \notin I.$

$M = \{x.a+i \mid i \in I,\ a \in K\} = (x)+I$

$M \lhd K : xa_1+i_1 - (xa_2+i_2) = x(a_1-a_2) + (i_1-i_2) \in M$

$r \in K\ r(xa+i) = xra + ri \in M$