05.04.2016

(12) Идеали и факторпръстени. Теорема за хомоморфизмите при пръстени.

K, M - пръстени

$\varphi: K \to M$ е хомоморфизъм, ако:

1) $\varphi(a+b) = \varphi(a) + \varphi(b)$

2) $\varphi(ab) = \varphi(a) \cdot \varphi(b)$

$\varphi(0) = 0$

$\varphi(-a) = -\varphi(a)$

φ е хомоморфизъм на адитивните групи на двата пръстена + умножението.

$\operatorname{Ker}\varphi = \{ x \in K \mid \varphi(x) = 0 \}$

$\operatorname{Im}\varphi = \{ \varphi(x) \mid x \in K \}$

$\operatorname{Ker}\varphi$ е подпръстен: $a, b \in \operatorname{Ker}\varphi$, то $\varphi(a-b) = \varphi(a) - \varphi(b) = 0 - 0 = 0$, $\varphi(a \cdot b) = \varphi(a)\varphi(b) = 0 \cdot 0 = 0 \Rightarrow a - b, ab \in \operatorname{Ker}\varphi \Rightarrow \operatorname{Ker}\varphi < K$

$a \in \operatorname{Ker}\varphi$, $r \in K$, $\varphi(ar) = 0 \Rightarrow ar \in \operatorname{Ker}\varphi$

$\varphi(ra) = 0 \Rightarrow ra \in \operatorname{Ker}\varphi$

Елемент от $\operatorname{Ker}\varphi$ по произволен елемент от K дава елемент от $\operatorname{Ker}\varphi \Rightarrow \operatorname{Ker}\varphi$ е идеал.

Опр. Нека K пръстен

$\emptyset \neq I \subset K$ е идеал на K, ако:

1) $a - b \in I$, $\forall a, b \in I$

2) $ar \in I$, $\forall a \in I$, $\forall r \in K$

$ra \in I$, $\forall a \in I$, $\forall r \in K$

Записваме $I \lhd K$ и четем „I е идеал на K".

Примери:

$\{0\} \lhd K$

$\mathbb{Z}; (3) = \{3k \mid k \in \mathbb{Z}\} = 3\mathbb{Z} \lhd \mathbb{Z}$

Нека K е комутативен пръстен с 1, тогава, ако $a \in K$ - произволен, то $(a) = \{ax \mid x \in K\}$.

Тогава $ax - ay = a(x-y) \in (a)$

$(ax)r = a(xr) \in (a)$

$r(ax) = a(rx) \in (a)$

$\Rightarrow (a) \lhd K$

↑ главен идеал, породен от елемента a

Пр. В пръстена на $\mathbb{Z}$ всички идеали са главни.

Д-во: $I \lhd \mathbb{Z}$

1) $I = \{0\} = (0)$

2) $I \neq \{0\}$

$\Rightarrow \exists x \in I : x \neq 0, \; -x = -1 . x \in I$

$\Rightarrow$ В този случай някое от идеала, както положителни, така и отрицателни числа

d - min положително от I

$d \neq 0,\ d > 0$

$x \in I: \ x = dq + r, \ 0 \leq r < d$

$r: \underbrace{x}_{\in I} - \underbrace{dq}_{\in I} \in I$

$\Rightarrow r = 0 \Rightarrow x = dq \in (d)$

$\Rightarrow I \subset (d)$

$d \in I \Rightarrow dq \in I \Rightarrow (d) \subset I$

$\Rightarrow I = (d)$

(Гв) K е пръстен с ~~1~~ с 1

$I \lhd K$ и $\exists a$ - обратим в K и $a \in I$

$\Rightarrow I = K$

Доказателство:

$a \in I$, a - обратим $\Rightarrow \exists a^{-1} \Rightarrow a.a^{-1} \in I \Rightarrow 1 \in I$

$x \in K \Rightarrow x = x.1 \in I \Rightarrow I = K$

Следствие: Идеалите в поле са само тривиалните идеали.

„Ако ви трябва идеал, няма да го търсите по полята" - Великова

Дер: Факторпръстен
Нека $I \lhd K$.

Ясно е, че I е нормална подгрупа на адитивната група на K.

$K = \bigcup_{x \in K} (x + I)$

$x + I = y + I \iff x - y \in I$

$\boxed{K/I = \{x + I \mid x \in K\}}$ – факторпръстен

$(x + I) + (y + I) = x + y + I$

$(x + I)(y + I) = xy + I$ – коректна е

Коректна ли е дефиницията?

$x_1 + I = x + I \Rightarrow x_1 - x \in I : x_1 = x + i,\ i \in I$

$y_1 + I = y + I \Rightarrow y_1 - y \in I : y_1 = y + i_2,\ i_2 \in I$

$x_1 \cdot y_1 = (x + i_1)(y + i_2) = xy + i_1 y + x i_2 + i_1 i_2$

$x_1 \cdot y_1 - x \cdot y = \underbrace{i_1 y}_{\in I} + \underbrace{x i_2}_{\in I} + \underbrace{i_1 i_2}_{\in I} \in I$

$\Rightarrow xy + I = x_1 \cdot y_1 + I \Rightarrow$ коректна е

K/I е група относно $(+)$

1) асоц.

$((a + I) \cdot (b + I))(c + I) = (ab + I)(c + I) =$ използвайки предходно е асоц.

$= (ab)c + I \overset{\text{асоц.}}{=} a(bc) + I = (a + I)(bc + I) = (a + I)((b + I)(c + I))$

2) дистр.

$(a+I)((b+I)+(c+I)) = (a+I)((b+c)+I) =$

$= a(b+c)+I = (ab+ac)+I = ab+I+ac+I =$

$= (a+I)(b+I)+(a+I)(c+I)$

K/I - факторпръстен „K факторизирам по I"

Нека $I \lhd K$: $\exists K/I$, $I = 0+I$, $1+I$

$\eta : K \to K/I$

$\eta(a) = a+I$

$\eta(a+b) = (a+b)+I = (a+I)+(b+I) = \eta(a)+\eta(b)$

$\eta(ab) = ab+I = (a+I)(b+I) = \eta(a).\eta(b)$

η - естествен хомоморфизъм

$\ker\eta = \{x \mid x+I = I\} = \{x \mid x \in I\} = I$