$F_1 < F$ - просто $\Rightarrow F_1 \equiv F \Rightarrow F = \varphi(\mathbb{Z}_p) \Rightarrow \varphi$ - сюрекция $\Rightarrow \varphi$ - биекция

$\Rightarrow F \cong \mathbb{Z}_p$.

б) $\text{char } F = 0$.

$0, 1, 2.1, \dots n1 \dots$
$-1, 2.(-1) \dots$ } различни помежду си.

$(k1)(m1)^{-1} = (s1)(t1)^{-1} \Delta\Rightarrow k1 \cdot t1 = s1 \, m1$.

$\Rightarrow \varphi : \mathbb{Q} \to F$

$\varphi(k/m) = k1 \cdot (m1)^{-1}$

$\varphi\left(\frac{k}{m} + \frac{s}{l}\right) = \varphi\left(\frac{kl+sm}{ml}\right) = (kl+sm)1 \cdot ((ml)1)^{-1} =$

$= (k1\,l1 + s1\,m1)(m1)^{-1}(l1)^{-1} = k1\,l1\,(m1)^{-1}(l1)^{-1} +$

$+ s1\,m1\,(m1)^{-1}(l1)^{-1} = k1(m1)^{-1} + s1(l1)^{-1} = \varphi(k/m) + \varphi(s/l)$

$\varphi\left(\frac{ks}{ml}\right)$ - аналогично доказателство

$\frac{k}{m} \neq \frac{s}{l} \Delta\Rightarrow kl \neq sm \Delta\Rightarrow k1\,l1 \neq s1\,m1 \Delta\Rightarrow k1(m1)^{-1} \neq s1(l1)^{-1}$

$\frac{k}{m} \neq \frac{s}{l} \Delta\Rightarrow \varphi(k/m) \neq \varphi(s/m)$ - инекция.

$F_1 = \varphi(\mathbb{Q}) = \{k1(s1)^{-1} \mid k, s \in \mathbb{Z}\}$

/аналогично/ $\to F_1 < F \Rightarrow F \equiv \varphi(\mathbb{Q}) \Rightarrow F \cong \mathbb{Q}$

С1 Ако F - поле, $\Rightarrow$ а) $\text{char } F = p \Rightarrow \mathbb{Z}_p \cong F_1 < F$ // F е разширение на $\mathbb{Z}_p$

б) $\text{char } F = 0 \Rightarrow \mathbb{Q} \cong F_1 < F$

Влагане на област на цялост в поле от частни

D Област на цялост - комутативен пръстен без делители на 0.

A - област на цялост

$A = \{0\}$

Зав.: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Delta\Rightarrow ad = bc$
в $\mathbb{Q}$

Разглеждаме множеството $B = \{(a,b) \mid a, b \in A, b \neq 0\}$

$(a,b) \sim (c,d) \Delta\Rightarrow ad = bc$

$\sim$ - релация - еквивалентност

1) $(a,b) \sim (c,d)$
2) $(a,b) \sim (c,d) \Rightarrow (c,d) \sim (a,b)$ } от комутативност на A.
3) $(a,b) \sim (c,d)$ и $(c,d) \sim (k,m) \Rightarrow (a,b) \sim (k,m)$.

Док-во

$ad = bc \Rightarrow adm = bcm = bdk \Rightarrow adm - bdk = 0 \Rightarrow d(am - bk) = 0, d \neq 0$

$cm = dk$

$\Rightarrow am - bk = 0$, т.к. няма делители на нулата $\Rightarrow am = bk$.

Забележка: Когато имаме пръстен без делители на нула, то ако $ac=bc$ и $c\neq 0 \Rightarrow a=b \Rightarrow$ можем да съкращаваме от двете страни на равенство на ненулеви елементи.

Извод: Релация на еквивалентност $\Rightarrow$ Имаме класове на еквивалентност в $B \Rightarrow [a,b]=\{(x,y) \mid (x,y)\in B \text{ и } (a,b)\sim(x,y)\}$.

$T=\{[a,b] \mid (a,b)\in B\}$.

$[a,b]=[c,d] \Leftrightarrow (a,b)\sim(c,d) \Leftrightarrow ad=bc$.

D $[a,b]+[c,d]=[ad+bc, bd]$ } зависят от представителя
$[a,b][c,d]=[ac, bd]$ }

Коректност на дефинициите:

$[a,b]=[x,y] \Rightarrow [ad+bc, bd]=[xl+yk, yl]$
$[c,d]=[k,l] \qquad [ac, bd]=[xk, yl]$.

$ax=by \Rightarrow aycl=bxdk$
$cl=dk$

$(ad+bc)yl \overset{?}{=} (xl+yk)bd$

$adyl+bcyl \overset{?}{=} xlbd+ykbd$

$adyl=xlbd$; $bcyl=bdyk \Rightarrow adyl+bcyl=xldb+ykbd$

$\Rightarrow [ad+bc, bd]=[xl+ky, yl]$.

$\Rightarrow$ Дефинициите са коректни.

1) Абелева група относно събирането
$\rightarrow [a,b]+[c,d]=[c,d]+[a,b]$
$\rightarrow [a,b]+([c,d]+[k,l])=([a,b]+[c,d])+[k,l]$.
$\rightarrow$ нулев елемент $[0,a]$, $\forall a\neq 0$. $(0,a)\sim(0,b)$ $[0,a]=0$
$[0,a]+[x,y]=[0\cdot y+ax, ay]=[ax, ay]=[x,y]$
$\rightarrow [a,b]+[-a,b]=[ab-ab, b^2]=[0,b^2]$

2) комутативно умножение
$[a,b].[c,d]=[c,d].[a,b]$

3) асоциативност на умножението
$([a,b].[c,d]).[k,l]=[a,b]([c,d].[k,l])$.

4) дистрибутивен закон
$([a,b]+[c,d])[k,l]=[ad+bc, bd][k,l]=[(ad+bc)k, bdl]=$
$=[adk+bck, bdl]=[adk, bdl]+[bck, bdl]=[ak, bl]+[ck, dl]=$
$=[a,b][k,l]+[c,d][k,l] \Rightarrow T$ е комутативен пръстен.

5) единичен елемент
$a\neq 0$, $a\in A$; $e=[a,a]$
$b\neq 0 \Rightarrow (a,a)\sim(b,b)$
$[x,y]=e=[x,y][a,a]=[ax, ay]=[x,y]$

6) $[a,b]\neq 0 \Rightarrow a\neq 0$.
$[a,b][b,a]=[ab, ba]=e$
$\Rightarrow [a,b]$ е обратим и $[a,b]^{-1}=[b,a]$
$\Rightarrow T$ е поле

Вграждане: $\exists A' \subset T : A \cong A'$

D K, M – пръстени. Казваме, че $\varphi: K \to M$ е хомоморфизъм, ако:

$\varphi(a+b) = \varphi(a) + \varphi(b)$

$\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$, $\forall a, b \in K$

φ е изоморфизъм, когато: 1) φ е хомоморфизъм

2) φ е биекция

$K \cong M$ (изоморфни са), когато $\exists$ изоморфизъм $\varphi: K \to M$.

$A' = \{[ax, a] \mid \forall a, x \in A, a \neq 0\}$

$[ax, a] = [bx, b]$

$\varphi: A \to A' \subset T$

$\varphi(x) = [ax, a]$

$\varphi(x+y) = [a(x+y), a] = [ax+ay, a] = [ax, a] + [ay, a] = \varphi(x) + \varphi(y)$.

$\varphi(xy) = [a(xy), a] = [(ax)(ay), a \cdot a] = [ax, a][ay, a] = \varphi(x)\varphi(y)$

$\hookrightarrow \varphi$ – хомоморфизъм

$\varphi(x) = [ax, a]$

$[ax, a] = [by, b] \Rightarrow axb = bya \Rightarrow ab(x-y) = 0 \Rightarrow x - y = 0 \Rightarrow x = y$

$\Rightarrow \varphi(x) = \varphi(y) \Rightarrow x = y$

$\Rightarrow A \cong A' \subset T$

Забележка: Това поле от частни е най-малкото поле, което съдържа A.

T Ако A е област на цялост, F е поле, за което $A \subset F$, T – полето от частни за A, тогава $\exists$ подполе $T_1 \subseteq F : A \subset T_1 \cong T$.

Схема на док-вото:

Прави се изображението $\varphi: T \to F$.

$\varphi([a, b]) = ab^{-1}$

0) φ – коректно дефинирана.

1) φ – хомоморфизъм

2) φ – инекция ($\varphi(x) \neq \varphi(y) \Rightarrow x \neq y$)

3) $T_1 = \operatorname{Im}\varphi \Rightarrow T \cong T_1$.

Идеали и фактор-пръстени. Теорема за хомоморфизмите при пръстени

D K, M – пръстени

$\varphi: K \to M$ – хомоморфизъм, ако:

1) $\varphi(a+b) = \varphi(a) + \varphi(b)$, $\forall a, b \in K$

2) $\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$

$\varphi(0) = 0$

$\varphi(-a) = -\varphi(a)$

φ е хомоморфизъм на адитивните групи на двата пръстена и относно умножението.