// 05.04.2016 //

11 Поле от частни на област на цялост.

Област на цялост: Комутативен пръстен без делители на нулата.

Една квадратна матрица е делителна нулата $\Leftrightarrow$ нейната $\det = 0$.

A - област на цялост = (комутативен пръстен без делители на 0)

$A \neq \{0\}$ (има поне един ненулев елемент)

(Ще правим конструкция от вида „дроби".
Няма да има проблем с комутативността.
Но $\frac{4}{5} = \frac{8}{10} = \dots$. Това означава, че с $\frac{4}{5}$ се изписва цяло множество от дроби, т.е. имаме различен запис на едно и също число, или набор от двойки, но които се съпоставя една и съща стойност. Т.е. има някаква релация, която разбива A на класове на еквивалентност.

$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad = cb$)

$\{(a,b) \mid a,b \in A, b \neq 0\} = B$

$(a,b) \sim (c,d) \Leftrightarrow ad = bc$

↑ в релацията (на еквивалентност)

„$\sim$" е релация на еквивалентност

1) $(a,b) \sim (a,b)$ ← (пресечът е комутативен)

2) $(a,b) \sim (c,d) \Rightarrow (c,d) \sim (a,b)$

3) $(a,b) \sim (c,d),\ (c,d) \sim (k,m) \Rightarrow (a,b) \sim (k,m)$

Док-во на 3):

$ad = bc$

$cm = dk$

$adm = bcm = bdk$

$adm - bdk = 0$

$d(am - bk) = 0$, $d \neq 0$ (защото е втори аргумент в двойката (c,d), т.е. е знаменател)

$\Rightarrow am - bk = 0 \Rightarrow am = bk$

~~Забележка: Забе~~

~~Щом нямаме делители на нулата~~

Забележка: Когато имаме простен без делители на нулата, можем да съкраща-ваме от двете страни на ненулев елемент.

$ac = bc$, $c \neq 0$.

$\Downarrow$

$a = b$

Забележка: Цялото множество се ~~прекъсва~~ разбива на непресичащи се класове на еквивалентност.

Множеството в се разбива на класове на екв. и

$[a,b] = \{(x,y) \mid (a,b) \sim (x,y)\}$

$T = \{[a,b] \mid (a,b) \in B\}$

$[a,b] = [c,d] \Leftrightarrow (a,b) \sim (c,d) \Leftrightarrow ad = bc$

Def// $[a,b] + [c,d] = [ad+bc, bd]$

$[a,b] \cdot [c,d] = [ac, bd]$

Коректност на def:

$\left.\begin{matrix}[a,b] = [x,y] \\ [c,d] = [k,l]\end{matrix}\right\} \overset{?}{\Rightarrow}$ $[ad+bc, bd] \overset{?}{=} [xl+yk, yl]$

$[ac, bd] \overset{?}{=} [xk, yl]$

$\left.\begin{matrix}ay = bx \\ cl = dk\end{matrix}\right\} \Rightarrow acyl = bxkbd \Rightarrow [ac, bd] = [xk, yl]$

$(ad+bc)yl \overset{?}{=} (xl+yk)bd$

$adyl + bcyl = xlbd + ykbd$

$\Downarrow$ заместване ay с bx

$adyl = xlbd$

$\Downarrow$ заместване cy с kd

$bcyk = bykd$

$\Rightarrow [ad+bc, bd] = [xl+yk, yl]$

Трябва да докажем: ↓ за да докажем, че T е поле

1) Абелева група относно събирането

$\rightarrow [a,b] + [c,d] = [c,d] + [a,b]$

$\rightarrow ([a,b]+[c,d])+[k,l] = [a,b]+([c,d]+[k,l])$

$\rightarrow 0 = [0,a]$, $\forall a \neq 0$

$(0,a) \sim (0,b) \Rightarrow 0 = 0 \cdot b = 0 \cdot a = 0$

$a,\ a \neq 0,\ b \neq 0$

$[0,a]+[x,y] = [0y+ax, ay] = [ax, ay] = [x,y]$

$\rightarrow [a,b]+[-a,b] = [ab-ab, b^2] = [0, b^2] = 0$

2) комутативност на умножението

$[a,b] \cdot [c,d] = [c,d] \cdot [a,b]$

3) асоциативност на „ $\cdot$ "

$([a,b] \cdot [c,d]) \cdot [k,l] = [a,b] \cdot ([c,d] \cdot [k,l])$

4) дистрибутивен закон

$([a,b]+[c,d]) \cdot [k,l] = [ad+bc, bd] \cdot [k,l] =$

$=$ дистр. в основния пръстен

$= [(ad+bc)k, bdl] = [adlk + bck, bdl] =$

$= [adk, bdl] + [bck, bdl] = [ak, bl] + [ck, bl] =$

$= [a,b] \cdot [k,l] + [c,d] \cdot [k,l]$

От 1), 2), 3), 4) $\Rightarrow$ $\mathbb{T}$ е комутативен пръстен

За да стане поле, трябва да докажем, че всеки ненулев елемент е обратим.

5) единичен елемент

$a \neq 0,\ a \in A$

$e = [a, a]$, ($b \neq 0$, то $(a,a) \sim (b,b)$) $\Rightarrow$

$[x, y] . e = [x, y] . [a, a] = [xa, ya] = [x, y]$

6) $[a, b] \neq 0 \Rightarrow a \neq 0$

$[a, b] . [b, a] = [ab, ab] = e$

$\Rightarrow [a, b]$ е обратим и неговия обратен е

$[b, a]$

$\Rightarrow$ От 1), 2), 3), 4), 5), 6) $\Rightarrow$ Г е поле.

Деф II
(Вложение)
$A' \subset Г$

$A \cong A'$

Опр.
Деф II (изоморфизъм на пръстени)

~~Деф~~ $Ж, М$ - произволни пръстени

$\varphi : Ж \to М$ е хомоморфизъм, ако:

1) $\varphi(a+b) = \varphi(a) + \varphi(b)$
2) $\varphi(ab) = \varphi(a) . \varphi(b)$, $\forall a, b \in Ж$

φ е изоморфизъм, когато:
- φ е хомоморфизъм
- φ е биекция

~~Ук~~ $Ук \cong ℳ$, когато $\exists \varphi$ - изоморфизъм,

$\varphi : Ук \to ℳ$

$x \in A$ - произволен

$A' = \{[ax, a],\ \forall a \in A, a \neq 0\}$

$[ax, a] = [bx, b]$

$\varphi : A \to A' \subset Г$

$\varphi(x) = [ax, a]$

$\varphi(x+y) = [a(x+y), a] = [ax + ay, a] = [ax, a] +$

$+ [ay, a] = \varphi(x) + \varphi(y)$

$\varphi(x.y) = [axy, a] = [(ax)(ay), a^2] =$

$= [ax, a].[ay, a] = \varphi(x).\varphi(y)$

дотук φ е хомоморфизъм

$[ax, a] = \varphi(x)$

$[ax, a] = [bx, b]$

$\Downarrow$

$axb = aby$

$\Rightarrow ab(x-y) = 0$

$a \neq 0,\ b \neq 0$

$\Rightarrow x - y = 0$

$x = y$

Ако $\varphi(x) = \varphi(y) \Rightarrow x = y \Rightarrow A \cong A' \subset Г$, т.е. A се влага в множеството Г.

$\Rightarrow T$ е поле от частни на A.

Забележка: Това поле (T) от частни е единствено в смисъла, че е „най-малкото" поле, което съдържа пръстена A.

(ТВ)

Ако A е област на цялост,

F е поле, за което $A \subset F$,

T е полето от частни за A,

тогава $\exists$ подполе $T_1 \subset F$: $A \subset T_1$; $T_1 \cong T$

Схема на доказателството. Нравим се изображението φ от T в полето F ($\varphi: T \to F$) по следния начин: $\varphi([a,b]) = a.b^{-1}$

$\uparrow \quad \uparrow$

$A \quad A$

Доказва се:

1) φ е коректно

2) φ - хомоморфизъм

3) φ - инекция

4) $T_1 = \mathrm{Im}\,\varphi \Rightarrow T \cong T_1$