$x \in a\ker\varphi \Rightarrow x = ah, h \in \ker\varphi$

$\varphi(x) = \varphi(ah) = \varphi(a)$

↳ Дефинираме $\psi: G_1/\ker\varphi \to \mathrm{Im}\varphi : \psi(a\ker\varphi) = \varphi(a)$

Ако $x\ker\varphi = a\ker\varphi \Rightarrow \varphi(x) = \varphi(a) \Rightarrow \psi(x\ker\varphi) = \psi(a\ker\varphi)$.

$\psi(a\ker\varphi b\ker\varphi) = \psi(ab\ker\varphi) = \varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b) = \psi(a\ker\varphi)\psi(b\ker\varphi)$

$\Rightarrow$ ψ е хомоморфизъм.

$\psi(a\ker\varphi) = \psi(b\ker\varphi) \Rightarrow \varphi(a) = \varphi(b) \Rightarrow \varphi(ab^{-1}) = \varphi(a)\varphi(b)^{-1} = e \Rightarrow$

$\Rightarrow ab^{-1} \in \ker\varphi \Rightarrow a \in \ker\varphi b = b\ker\varphi \Rightarrow a\ker\varphi = b\ker\varphi$.

$\Rightarrow$ ψ е инекция.

$x \in \mathrm{Im}\varphi \Rightarrow \exists y \in G_1 : \varphi(y) = x \Rightarrow x = \psi(y\ker\varphi) \Rightarrow \mathrm{Im}\psi = \mathrm{Im}\varphi$

$\Rightarrow$ ψ е биекция

$\Rightarrow$ ψ е изоморфизъм. $\Rightarrow G_1/\ker\varphi \cong \mathrm{Im}\varphi$

D Казваме, че групата G действа върху множеството M, когато за $\forall g \in G, \forall x \in M$ е съпоставен елемент $g(x) \in M$ и:

$$\left.\begin{array}{l} 1)\ g_1 g_2(x) = g_1(g_2(x)) \\ 2)\ e(x) = x \end{array}\right\} \forall x \in M, \forall g_i \in G, i = \overline{1,2}$$

Пример: 1) група от еднаквости – диадрални групи

2) всички ротации с начало О действат върху всички точки от равнината.

3) GL действа върху $\mathbb{R}^n$

$A \in GL$, $x(x_1 .. x_n) \in \mathbb{R}^n \to A(x) = A\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$

Тв Групата G действа върху множеството $M \Leftrightarrow \exists$ хомоморфизъм $\varphi: G \to S(M)$

Доказателство:

$\Rightarrow$) Нека G действа върху M. $g \in G \Rightarrow$ на $\forall x \in M$ можем да съпоставим $g(x) \in M$.

$\varphi_g : M \to M : \varphi_g(x) = g(x)$ ——— ще докажем, че е биекция.

$x \neq y \in M$.

Допускаме, че $g(x) = g(y) \Rightarrow \exists g^{-1} : g(g^{-1}(x)) = g(g^{-1}(y)) \Rightarrow e(x) = e(y) \Rightarrow$

$\Rightarrow x = y$ ↯ $\Rightarrow$ Допускането е невалидно $\Rightarrow g(x) \neq g(y) \Rightarrow \varphi_g(x) \neq \varphi_g(y) \Rightarrow$

$\Rightarrow$ инекция.

$z \in M$

$z \stackrel{?}{=} \varphi_g(g^{-1}(z)) = g(g^{-1}(z)) \to \varphi_g$ – сюрекция $\Rightarrow$ биекция.

$\to \varphi: G \to S(M)$

$\varphi(g_1 g_2) = \varphi_{g_1 g_2} = \varphi_{g_1} \circ \varphi_{g_2} = \varphi(g_1) \circ \varphi(g_2)$

$\varphi_{g_1 g_2}(x) = g_1 g_2(x) = g_1(g_2(x)) = \varphi_{g_1}(\varphi_{g_2}(x))$ $\Rightarrow \varphi$ е хомоморфизъм

$\Leftrightarrow$ $\exists$ хомоморфизъм $\eta: G \to S(M) \Rightarrow \forall g \in G \to \eta(g): M \to M$ – биекция.

$\Rightarrow \eta(g)(x) \in M \Rightarrow$ дефинираме действие на g върху M : $g[x] = \eta(g)(x) \in M$.

$e[x] = \eta(e)(x) = id(x) = x$

$(g_1 g_2)(x) = \eta(g_1 g_2)(x) = \eta(g_1)\eta(g_2)(x) = \eta(g_1)\big(\eta(g_2)(x)\big) = g_1[\eta(g_2)(x)] =$

$= g_1[g_2[x]] \Rightarrow G$ действа върху M.

! Примери за действие на група върху себе си:

I $g \in G, x \in G \Rightarrow g(x) = gx \in G$

$e(x) = ex = x$

$g_1 g_2(x) = g_1(g_2(x)) = g_1(g_2 x) = g_1 g_2 x$

$\Rightarrow \exists$ хомоморфизъм $\eta: G \to S(G)$, $\eta(g)(x) = g(x)$

$\ker \eta = \{g \in G \mid \eta(g) = id\} = \{e\}$

$G/\ker \eta = G/\{e\} = G \cong \operatorname{Im}\eta < S(G)$.

Извод: Теорема на Кейли | Всяка група е изоморфна на подгрупа на симетричната група.

Др. вариант: Ако G е крайна с n елемента, то $G \cong G_1 < S_n$.

II $g \in G, x \in G$

$g[x] = gxg^{-1}$

$e[x] = x$

$g_1 g_2[x] = g_1 g_2 x (g_1 g_2)^{-1} = g_1 g_2 x g_2^{-1} g_1^{-1} = g_1[g_2[x]]$

$\Rightarrow$ има действие

! Когато групата е комутативна, x остава на мястото си.

D $O(x) = \{g(x) \mid g \in G\}$ – орбита на x

Свойства

1) $y \in O(x) \Rightarrow O(y) = O(x)$

$y \in O(x) \Rightarrow \exists g_1 \in G: y = g_1(x) \Rightarrow z \in O(y) \Rightarrow z = g_2(y) = g_2(g_1(x)) =$

$= g_2 g_1(x) \in O(x) \Rightarrow O(y) \subset O(x)$

$y = g_1(x) \Rightarrow x = g_1^{-1}(y) \Rightarrow x \in O(y)$

$t \in O(x) \Rightarrow t = g_3(x) = g_3(g_1^{-1}(y)) = g_3 g_1^{-1}(y) \in O(y) \Rightarrow O(x) \subset O(y)$

$O(x) = O(y)$

2) $O(x) \cap O(z) = \begin{cases} O(x) \\ \varnothing \end{cases}$

Допускаме, че $\exists y \in O(x) \cap O(z) \Rightarrow O(y) = O(x)$ и $O(y) = O(z) \Rightarrow O(x) = O(z)$

$\Rightarrow M$ се разбива на обединение от непресичащи се орбити

$M = \bigcup_{i \in I} O(x_i)$

В II ОРБИТИТЕ НА X СА КЛАСОВЕ СПРЕГНАТИ ЕЛЕМЕНТИ

$O(x) = \{gxg^{-1} \mid g \in G\} = C_x$, НО ИМА РАЗЛИЧНИ ОЗНАЧЕНИЯ.

D $St_G(x) = St(x) = \{g \in G \mid g(x) = x\}$ – СТАБИЛИЗАТОР НА X.

Свойства

1) $St(x) < G$

$g_1, g_2 \in St(x)$

$g_1 g_2(x) = x \Rightarrow g_1 g_2 \in St(x)$

$g_1^{-1}(x) = x \Rightarrow g_1^{-1} \in St(x)$

$\Rightarrow St(x) < G$

2) $y \in O(x)$, $y = g(x) \Rightarrow \ell \in St(y) \Rightarrow y = \ell(y) \Rightarrow g(x) = \ell(g(x)) \Rightarrow x = g^{-1}\ell g(x)$

$\Rightarrow g^{-1}\ell g \in St(x) \Rightarrow g^{-1} St(y) g \subset St(x)$

$t \in St(x) \Rightarrow x = t(x) \Rightarrow x = g^{-1}(y) \Rightarrow g^{-1}(y) = t(g^{-1}(y)) \Rightarrow y = gtg^{-1}(y)$

$\Rightarrow gSt(x)g^{-1} \subset St(y) \Rightarrow St(x) \subset g^{-1}St(y)g$

$\Rightarrow St(x) = g^{-1}St(y)g$ ⟶ СПРЕГНАТИ ПОДГРУПИ

3) $y \in O(x) \Rightarrow y = g(x)$

$\ell(x) = y \Leftrightarrow \ell \in gSt(x)$

① $\ell(x) = y = g(x) \Rightarrow x = \ell^{-1}g(x) \Rightarrow \ell^{-1}g \in St(x) \Rightarrow g \in \ell St(x) \Rightarrow \ell \in gSt(x)$

② $\ell \in gSt(x) \Rightarrow \ell = gm_1, m_1 \in St(x) \Rightarrow gm_1(x) = g(m_1(x)) = g(x) = y$

4) $\exists$ БИЕКЦИЯ МЕЖДУ ТОЧКИТЕ ОТ $O(x)$ И ЛЯВИТЕ СЪСЕДНИ КЛАСОВЕ НА $St(x)$.

$y \in O(x) \Rightarrow \exists g : y = g(x) \Rightarrow y \to gSt(x)$

$\Rightarrow$ КОГАТО $|O(x)| < \infty$, $|O(x)| = |G : gSt(x)| = |G| / |St(x)|$

T Нека G-крайна действа върху M-крайно. Тогава M се разбива на обединение на краен брой непресичащи се орбити и

$|M| = \sum_{i=1}^{k} |O(x_i)| = \sum_{i=1}^{k} \frac{|G|}{|St(x_i)|}$ ##, където $x_1 .. x_k$ са представители на различните орбити.

Приложение в/у II ⟶ $St(x) = \{y \in G \mid gxy^{-1} = x\} = \{y \in G \mid xy = yx\}$

(централизатор на x $Z(x)$ ⇕ $C_G(x)$)

$\Rightarrow |G_x| = \frac{|G|}{|Z(x)|}$

$\Rightarrow |G| = \sum_{i=1}^{k} \frac{|G|}{|C_G(x_i)|}$ – формула за класовете на спрегнати елементи

* Т-ми на Силов – в учебника ⟶ допълнителни *