Дефиниране: $\psi : G_1 / \mathrm{Ker}\,\varphi \to \mathrm{Im}\,\varphi$ (коректно дефинирано)

$\psi(a\,\mathrm{Ker}\,\varphi) = \varphi(a)$ ако $x\,\mathrm{Ker}\,\varphi = a\,\mathrm{Ker}\,\varphi \Rightarrow \varphi(x) = \varphi(a) \Rightarrow \psi(a\,\mathrm{Ker}\,\varphi)$ ✓

За доказване ψ - изоморфизъм (хомоморфизъм и биекция)

хомоморфизъм: $\psi((a\,\mathrm{Ker}\,\varphi)\cdot(b\,\mathrm{Ker}\,\varphi)) = \psi(ab\,\mathrm{Ker}\,\varphi) = \varphi(ab) =$

$= \varphi(a)\cdot\varphi(b) = \psi(a\,\mathrm{Ker}\,\varphi)\cdot\psi(b\,\mathrm{Ker}\,\varphi) \Rightarrow \psi$ - хомоморфизъм.

биекция

1) инекция: Ако $\psi(a\,\mathrm{Ker}\,\varphi) = \psi(b\,\mathrm{Ker}\,\varphi) \Rightarrow$

$\Rightarrow \varphi(a) = \varphi(b) \Rightarrow \varphi(ab^{-1}) = \varphi(a)\varphi(b^{-1}) = e \Rightarrow ab^{-1} \in \mathrm{Ker}\,\varphi$

$\Rightarrow a \in (\mathrm{Ker}\,\varphi)b = b\,\mathrm{Ker}\,\varphi \Rightarrow a\,\mathrm{Ker}\,\varphi = b\,\mathrm{Ker}\,\varphi$

Ако образите на 2 класа съвпадат има инекция

2) сюрекция:

$x \in \mathrm{Im}\,\varphi \Rightarrow \exists y \in G_1 : \varphi(y) = x = \psi(y\,\mathrm{Ker}\,\varphi) \Rightarrow \mathrm{Im}\,\psi = \mathrm{Im}\,\varphi$

от (1 и 2) ψ - биекция $\Rightarrow$ ψ - изоморфизъм

$\Rightarrow$ $G_1 / \mathrm{Ker}\,\varphi \cong \mathrm{Im}\,\varphi$

↳ факторгрупа

---

8. Действие на група върху множество, орбити и стабилизатори.

Действие на група върху елементите са - Теорема на Кейли и формула за класовете.

Симетрична група на S_n $|M| = n$ $M = \{1, \dots, n\}$

$S_n = \{\varphi \mid \varphi : M \to M, \varphi$ - биекция$\}$

$x \in M$ $\varphi \in S_n$, $\varphi(x) \in M$ $\psi \in S$ $\psi \circ \varphi(x) = \psi(\varphi(x))$ $id(x) = x$

Деф: Казваме че група G действа вдясно върху M когато $\forall g \in G$ и $\forall x \in M$ е съпоставен ел. $g(x) \in M$ $(G \times M \to M)$

$(g, x) \to g(x)$ и са изпълнени:

1) $(g_1 g_2)(x) = g_1(g_2(x))$

2) $e(x) = x$ $\forall x \in M$, $\forall g_1, g_2 \in G$.

Диаграмна група се такива? много от всички ротации и фавиитата с фиксирано начало, всяка ротация действа върху точки от равнината.

Т6.1: G - действа вдуМнож. M $\Leftrightarrow$ $\exists$ хомоморфизъм $\varphi: G \to S(M)$

Док(1): $\Rightarrow$

Нека G действа вдуМ $g \in G$ $x \to g(x)$

$\varphi_g : M \to M$, $\varphi_g(x) = g(x)$

док че φ_g - биекция: $x \neq y \in M$ допускаме, че $g(x) = g(y) \Rightarrow$

$\Rightarrow g^{-1}(g(x)) = g^{-1}(g(y))$, $e(x) = e(y) \Rightarrow x = y$ ↯

$\Rightarrow$ ако $x \neq y \Rightarrow g(x) \neq g(y) \Rightarrow \varphi_g(x) \neq \varphi_g(y)$ - инжекция

сюрекция: $z \in M$ $z = \varphi_g(g^{-1}(z)) = g(g^{-1}(z)) \Rightarrow \varphi_g$ - сюрекция

$\Rightarrow$ φ_g - биекция $\varphi_g \in S(M)$

φ_g - елемент от симетричната група на множ. M

$\varphi : G \to S(M)$ $\varphi(g) = \varphi_g$

$\varphi(g_1 g_2) = \varphi_{g_1} \varphi_{g_2}$

$\varphi_{g_1 g_2}(x) = (g_1 g_2)(x) = g_1(g_2(x)) = \varphi_{g_1}(g_2(x)) = \varphi_{g_1}(\varphi_{g_2}(x)) = \varphi_{g_1} \circ \varphi_{g_2}(x)$

$\Rightarrow \varphi_{g_1 g_2} = \varphi_{g_1} \circ \varphi_{g_2}$, $\varphi(g_1 g_2) = \varphi(g_1) \circ \varphi(g_2) \Rightarrow \varphi$ - хомоморфизъм.

$\Leftarrow$

$\exists \eta : G \to S(M)$ $g \in G$, $x \in M$ - хомоморфизъм

$\eta(g) : M \to M$ - биекция $\eta(g)(x) \in M$

Деф. действие на G вдуМ: $g[x] = \eta(g)(x)$ ($g[x] \in M$)

$e[x] = \eta(e)(x) = id(x) = x$

$(g_1 g_2)[x] = \eta(g_1 g_2)(x) = \eta(g_1) \circ \eta(g_2)(x) = \eta(g_1)(\eta(g_2)(x)) =$

$= g_1[\eta(g_2)(x)] = g_1(g_2[x]) \Rightarrow$ действие

Основни пр. за действие и дуа само себе си:

I вид: действие на G вдуМнож. от ел. на G

$g \in G$ и $x \in G$ $g(x) = g.x \in G$ $e(x) = ex = x$

$(g_1 g_2)(x) = g_1(g_2 x) = g_1(g_2(x)) \Rightarrow G$ - група действа вдуе себе си

$\Rightarrow \exists$ хомоморфизъм $\eta : G \to S(G)$ $\eta(g)(x) = gx$ - хомоморфизъм.

$\Rightarrow \operatorname{Ker}\eta = \{a \in G \mid \eta(a) = id\}$

$\eta(a)(x) = x$ $\forall x \in G$ $ax = x = ax \Rightarrow a = e$

$\Rightarrow \operatorname{Ker}\eta = \{e\}$ $G/\operatorname{Ker}\eta = G/\{e\} = G \cong \operatorname{Im}\eta < S(G)$

Извод: Т на Кейли: Всяка група е изоморфна на подгрупа на симетрична група и ако $|G| = n$ (G - крайна с n ел.) $\Rightarrow$

$\Rightarrow G \cong G_1 < S_n$

Осн. Ф. действие на група върху себе си чрез спрягане:

$g \in G,\ x \in G = M \qquad g[x] = gxg^{-1},\quad e[x] = exe^{-1} = x$

$(g_1 g_2)[x] = (g_1 g_2)\, x\, (g_1 g_2)^{-1} = g_1 g_2 x g_2^{-1} g_1^{-1} = g_1[g_2 x g_2^{-1}] =$

$= g_1[g_2[x]] \Rightarrow$ спрягането е действие на G върху G.

Опр: [Орбита на елемент:] Нека G - действа върху M и $x \in M$. $O(x) = \{g(x) \mid g \in G\}$ - орбита на елемента x наричаме всички елементи от G.

Свойства на орбитите:

1) Ако $y \in O(x) \Rightarrow O(x) = O(y)$

2ка // $\boxed{\Rightarrow}$ $y \in O(x) \Rightarrow \exists g_1 \in G : y = g_1(x)$

$z \in O(y) \Rightarrow z = g_2(y) = g_2(g_1(x)) = (g_2 g_1)x \Rightarrow z \in O(x) \Rightarrow O(y) \subset O(x)$

$\boxed{\Leftarrow}$ $y = g_1(x) \Rightarrow g^{-1}(y) = g^{-1}(gx) = x \Rightarrow x \in O(y)$

$t \in O(x) \Rightarrow t = g_3(x) = g_3(g^{-1}(y)) = (g_3 g^{-1})(y)$

$\Rightarrow t \in O(y) \Rightarrow O(x) \subset O(y) \Rightarrow O(x) = O(y)$

2) Ако вземем 2 произволни орбити и те се сечат, то случайно:

$O(x) \cap O(z) = \begin{cases} \emptyset \\ O(x) = O(z) \end{cases}$

Ако допуснем че $\exists y \in O(x) \cap O(z) \Rightarrow O(y) = O(x) \Rightarrow O(y) = O(z) \Rightarrow$

$\Rightarrow O(x) = O(z)$

- M се разбива на обединение на непресичащи се орбити т.е.

$M = \bigcup_{i \in I} O(x_i)$

- Орбитата на i ел. G и съответен ел. на фактора ел.

↳ $O(x) = \{gxg^{-1} \mid g \in G\} = Cx$ - съответен ел. на ел. x.

- Стабилизатор на ел. G действа върху M $x \in M$

↳ $St_G(x) = St(x) = \{g \in G \mid g(x) = x\}$ (ел. от G за които $g(x) = x$)

Св-ва за стабилизатора:

1) $St_G(x) < G$

2ка // $g_1, g_2 \in St(x)$

$(g_1 \cdot g_2)(x) = g_1(g_2(x)) = g_1(x) = x \Rightarrow g_1 g_2 \in St(x)$

$g_1^{-1}(x) = x \Rightarrow g_1^{-1} \in St(x)$

$\Rightarrow St(x) < G$

2) Нека $y \in O(x)$ и $y \in \rho(x)$ $\quad \ell \in St(y) \Rightarrow \ell(y)$

$\rho(x) = \ell(\rho(x)) \Rightarrow x = (\rho^{-1}\ell\rho)(x) \Rightarrow \rho^{-1}\ell\rho \in St(x)$

$\rho^{-1} St(y) \rho \subset St(x)$

2) Нека $y \in O(x)$ и $y = \rho(x)$

- $\ell \in St(y) \quad y = \ell(y)$

$\rho(x) = \ell(\rho(x)) \Rightarrow x = (\rho^{-1}\ell\rho)(x) \Rightarrow \rho^{-1}\ell\rho \in St(x)$

$\rho^{-1} St(y) \rho \subset St(x)$

- $t \in St(x) \quad x = t(x)$

$y = \rho(x) \Rightarrow x = \rho^{-1}(y) \Rightarrow \rho^{-1}(y) = t\rho^{-1}(y) \Rightarrow \rho = \rho t \rho^{-1}(y) \Rightarrow$

$\Rightarrow \rho t \rho^{-1} \in St(y) \Rightarrow St(x) = \rho^{-1} St(y) \rho.$

Извод: Стабилизаторите на 2 ел. в една орбита са спрегнати подгрупи.

3) Нека $y \in O(x)$ и $\rho = \rho(x)$, $\ell(x) = y \iff \ell \in \rho St(x)$

$\Rightarrow$ $\ell(x) = y = \rho(x) \Rightarrow x = \ell^{-1}\rho(x) \Rightarrow \ell^{-1}\rho \in St(x) \Rightarrow \rho \in \ell St(x) \iff$

$\iff \ell \in \rho St(x)$

$\Leftarrow$ $\ell \in \rho St(x) \Rightarrow \ell = \rho \cdot u_y$, $u_y \in St(x)$ $\ell(x) = (\rho u_y)x = \rho(u_y x) = \rho x = y$

4) Е вече ясно, че точките от $O(x)$ и техните свързващи елементи са в $St(x)$

Пресмятаме: $y \in O(x) \Rightarrow \exists \rho: y = \rho(x) \quad y \to \rho St(x)$

$\Rightarrow$ в елегантно което са краен бр. точки в орбитата броя на точките в орбитата е колкото индекса т.е $|O(x)|$

т.е $|O(x)| = |G : St(x)| = \dfrac{|G|}{|St(x)|}$ $\Rightarrow$ от (Т4 на Лагранж)

(Т4) Нека G - крайна група действа върху крайно множество M

M се разбива на обединение на краен бр. орбити непресичащи се т.е.

$M = O(x_1) \cup O(x_2) \cup \ldots \cup O(x_k)$

$|M| = \sum_{i=1}^{k} |O(x_i)| = \sum_{i=1}^{k} \dfrac{|G|}{|St(x_i)|}$ където $x_1 \ldots x_k$ е по 1 представител от всяка различна орбита.

Ако в пр.-за действието на групата върху себе си условията Т4:

Пр. Т: $\Rightarrow$ G-действа върху G със спрягане

$St(x) = \{y \mid yxy^{-1} = x\} = C_G(x)$ елементи които комутират с x

$yx = xy$ ел. x се нарича централизатор на ел. x

Формула за класовете спрегнати ел. чрез орбитите

$|C_x| = \frac{|G|}{|C_G(x)|}$ ↳ $|G| = \sum_{i=1}^{k} |C_{x_i}| = \sum \frac{|G|}{|C_G(x)|}$

9

Опр Тяло: Нека $M \neq \emptyset$ дефинираме 2 бинарни операции „+" и „·" т.е $\forall a,b \in M$: $a+b \in M$, $a \cdot b \in M$ и M е тяло ако са изпълнени следните свойства:

1) $(M,+)$ е Абелева група $\begin{cases} a+b = b+a \\ (a+b)+c = a+(b+c) \\ \exists 0: a+0=a, \forall a \\ \forall a, \exists b_{(a)}: a+b_{(a)} = 0 \end{cases}$

2) Асоциативно е за умножението
$(ab)c = a(bc)$ $\forall a,b,c \in M$

3) Да са изпълнени дистрибутивни закона: т.е.
$a(b+c) = ab+ac$ $\forall a,b,c \in M$
$(b+c)a = ba+ca$

- Ако M изпълнява и $ab=ba \Rightarrow M$ - комутативно тяло

Опр за Подтяло: Нека M - тяло и $K \neq \emptyset$ $K \subset M$, K - подтяло на M ако е тяло относно същите операции в M. Записваме $K < M$.

Примери за тела:
- Комутативни тела: ① $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$
  - ① Множеството на ф-ите непрекъснати в/у $\mathbb{R}$
  - ② Мн-ва на ф-ите които имат производни в/у $\mathbb{R}$
- Некомутативни тела: Матрици $M = M_{n\times n}(\mathbb{R})$
- Крайни комутативни тела: • $\mathbb{Z}_n = \{\bar{0}, \bar{1}, \dots, \overline{n-1}\}$ - класовете ост. по $(\mathrm{mod}\, n)$
  $\bar{a}+\bar{b} = \bar{c}$ където $\bar{c} \equiv a+b \,(\mathrm{mod}\, n)$
  $\bar{a}\cdot\bar{b} = \bar{r}_1$ където $\bar{r}_1 \equiv ab \,(\mathrm{mod}\, n)$
- Крайни некомутативни тела: $M_{n\times n}(\mathbb{Z}_2)$, [illegible]